Lezione 25 febbraio 2026

mercoledì 25 febbraio 2026 11:08

Visto: SSA, eq parametriche per SSA

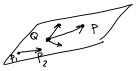
Def.: $S \subseteq A$ si dice SSA passante per $Q \in A$ e con giacitura $W \subseteq V$, dove W è SSV di V, se

$$S = \{P \in A \;:\; \overrightarrow{QP} \in W\}$$

Prop. Sia $S \subseteq A$ SSA. Allora si ha:

① $Q \in S$

② $\forall$ coppia $P_1, P_2 \in S$ si ha $\overrightarrow{P_1P_2} \in W$



③ S ha struttura di spazio affine su W.

Dim. ① $Q \in S \iff \overrightarrow{QQ} \in W$ sì, perché W è SSV.

② $P_1, P_2 \in S$, $\overrightarrow{P_1P_2} \underset{\boxed{SA2}}{=} \overrightarrow{P_1Q} + \overrightarrow{QP_2} = \underbrace{-\underbrace{\overrightarrow{QP_1}}_{\in W}}_{\in W} + \underbrace{\overrightarrow{QP_2}}_{\in W} \in W$

③ S è SA : $\sigma' = \sigma|_{S \times S} : S \times S \to W$

$S \subseteq A$, $\underline{\sigma : A \times A \to V}$ con $\boxed{SA1}$ e $\boxed{SA2}$

$\boxed{SA1}$ $\forall P_1 \in S$, $\forall w \in W$, $\exists!\, P_2^{\in S}$ t.c. $\overrightarrow{P_1P_2} = w$

P_2 esiste ed è unico in A perché A sp. affine

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1Q} + \overrightarrow{QP_2} = -\overrightarrow{QP_1} + \overrightarrow{QP_2} = w$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{QP_2} = \underset{\substack{\Uparrow \\ W}}{w} + \underbrace{\overrightarrow{QP_1}}_{\in W} \in W \implies P_2 \in S$$

$\boxed{SA2}$ $\forall$ terne $P_1, P_2, P_3 \in S$ si ha

$$\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} = \overrightarrow{P_1P_3}$$

$$\underline{\sigma'(P_1,P_2) + \sigma'(P_2,P_3)} = \sigma(P_1,P_2) + \sigma(P_2,P_3) \underset{\boxed{SA2}\text{ in } A}{\overset{!}{=}} \sigma(\overset{\substack{S \\ \Downarrow}}{P_1}, \overset{\substack{S \\ \Downarrow}}{P_3}) = \underline{\sigma'(P_1,P_3)}$$

Parentesi: Se $f : A \to B$ funzione tra insiemi e $C \subseteq A$ è un sottoinsieme di A la RESTRIZIONE di f a C è la funzione

$$f\big|_C : C \to B$$

$$f\big|_C(x) := f(x)$$

In prt. se $S \subseteq A$, $S \times S \subseteq A \times A$

* * *

Vogliamo ora generalizzare l'equazione cartesiana di una retta piana: $a x_1 + b x_2 = c$

TEOREMA: Sia $A \cdot x = b$ un sistema lineare (SL) di m equazioni in n incognite:

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{K}), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times 1}{x}} = \underset{m \times 1}{\underbrace{b}}$$

e supponiamo che sia COMPATIBILE ($\Leftrightarrow$ $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b)$)

Allora l'insieme delle sue soluzioni

$$S = \{ s \in \mathbb{K}^n : A \cdot s = b \}$$

è un SSA di $\mathbb{K}^n = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$

con giacitura $\mathbb{W}$, dove $\mathbb{W}$ è il SSV di $\mathbb{K}^n$ delle soluzioni del SLO associato a $A \cdot x = b$, quindi $A \cdot x = 0$.

Infine: $\dim S = \dim \mathbb{W} = n - \operatorname{rg} A$.

Dim. Dal Teorema di Struttura per le soluzioni di un SL, sappiamo che fissata $\tilde{s} \in S$, $\forall\, s \in S$, $\exists\ s_0 \in \mathbb{W}$ t.c.

$$s = \tilde{s} + s_0$$

Quindi: s è soluzione $\Leftrightarrow$ $s - \tilde{s} \in \mathbb{W}$

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{s} = \begin{pmatrix} \tilde{s}_1 \\ \vdots \\ \tilde{s}_n \end{pmatrix}$$

$$s - \tilde{s} = \begin{pmatrix} s_1 - \tilde{s}_1 \\ \vdots \\ s_n - \tilde{s}_n \end{pmatrix} = \tau\big((\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_n), (s_1, \dots, s_n)\big) = \overrightarrow{\tilde{s}\, s}$$

dove $\sigma : \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \times \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbb{K}^n$

$$\Longrightarrow S = \{ s \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \ : \ \overrightarrow{\tilde{s}s} \in W \}$$

~ . ~ . ~ . ~ . ~

Vediamo ora che è SEMPRE possibile esprimere un SSA come insieme delle soluzioni di un opportuno SL: $A \cdot x = b$

Le m equazioni si chiamano EQ. CARTESIANE per S.

PASSAGGIO DA EQ PARAM. di SSA a EQ CARTESIANE

Sia $S \subseteq \mathbb{A}$; fissiamo un sistema di riferimento affine in $\mathbb{A}$.

Possiamo esprimere il generico punto di S

come
$$\begin{cases} x_1 = s_1 + t_1 w_{11} + t_2 w_{12} + \dots + t_k w_{1k} \\ x_2 = s_2 + t_1 w_{21} + t_2 w_{22} + \dots + t_k w_{2k} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_n = s_n + t_1 w_{n1} + t_2 w_{n2} + \dots + t_k w_{nk} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - s_1 = \qquad \text{— '' —} \\ x_2 - s_2 = \qquad \text{— '' —} \\ \vdots \\ x_n - s_n = \qquad \text{— '' —} \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 - s_1 \\ \vdots \\ x_n - s_n \end{pmatrix}}_{\text{vettore colonna}} = t_1 \begin{pmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} w_{12} \\ \vdots \\ w_{n2} \end{pmatrix} + \dots + t_k \begin{pmatrix} w_{1k} \\ \vdots \\ w_{nk} \end{pmatrix}$$

vettore colonna = combinazione lineare di k vettori colonna

$$\Longleftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1k} & x_1 - s_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nk} & x_n - s_n \end{pmatrix}$$

è una matrice $n \times (k+1)$

$k \leq n-1$

OSS. $\operatorname{rg} M \geq k$ perché le prime k colonne sono LIN. INDIP., perché sono coordinate di k vettori LIN INDIP $w_1, \dots, w_k$ (formano base di W)

L'ultima colonna è comb. LIN. delle prime k colonne

$$\Longleftrightarrow \boxed{\operatorname{rg} M = k}$$

$\Longleftrightarrow$ se $\tilde{M}$ è la matrice a scala ottenuta da M con OPERAZIONI ELEMENTARI allora deve essere # righe non nulle di $\tilde{M}$ è $= k$

$\Longleftrightarrow$ gli ultimi n-k termini dell'ultima colonna di $\tilde{M}$ sono tutti nulli.

OSS.: Siccome le prime k colonne sono LIN. INDIP., mettendo la matrice a scala trovo k PIVOT e poi dei termini nell'ultima colonna.

Conclusione: le n-k espressioni in $x_1, \dots, x_n$ che devono essere nulle rappresentano le n-k equazioni cartesiane cercate; quindi le coordinate dei punti di S sono le soluzioni di un SL di n-k eq. in n incognite.

Esempio: rette in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$:

$$\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = 1 - t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - t \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2 = 3t \\ y - 1 = -t \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & x+2 \\ -1 & y-1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} k = 1 \\ n = 2 \end{matrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1-y \\ 3 & x+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II} - 3\text{I}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1-y \\ 0 & x+2-3(1-y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1-y \\ 0 & \boxed{x+3y-1} \end{pmatrix} = \tilde{M}$$

$$\operatorname{rg} \tilde{M} = 1 \Longleftrightarrow x + 3y - 1 = 0$$

OSS.: Siccome M è quadrata, possiamo anche imporre $\operatorname{rg} M = 1$ anche con la condizione $\det M = 0$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & x+2 \\ -1 & y-1 \end{pmatrix}$$

$$\det M = 3(y-1) - (-1)(x+2) = 3y - 3 + x + 2$$
$$= x + 3y - 1 = 0$$