Lezione 26 febbraio 2026

giovedì 26 febbraio 2026 11:12

VISTO: $S \subseteq \mathbb{A}$ SSA, $\dim S = k \rightsquigarrow S$ si può esprimere con $n-k$ equazioni cartesiane

Def. Sia $H \subseteq \mathbb{A}$, SSA di dim k, e si fissi un SRA $\mathcal{R} = (O, v_1, \dots, v_n)$ in $\mathbb{A}$. Delle

EQUAZIONI CARTESIANE per S

sono il dato di un sistema lineare $A \cdot x = b$, per cui l'insieme delle soluzioni $S \subseteq \mathbb{A}^n_K$ con l'insieme delle coordinate di punti di H.

Più precisamente: se $F_{\mathcal{R}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}^n_K$ è l'applicazione coordinate, che a ogni punto associa le coordinate rispetto a $\mathcal{R}$:

$$F_{\mathcal{R}}(P) = (a_1, \dots, a_n)$$

, dove a_i sono le coordinate di $\overrightarrow{OP}$, allora si ha

$$F_{\mathcal{R}}(H) = S.$$

OSS. Dato $H \subseteq \mathbb{A}$, le equazioni cartesiane di H non sono univocamente determinate.

Infatti, se $A \cdot x = b$ sono eq. cart. per H, ogni SL $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$ EQUIVALENTE a $A \cdot x = b$ è un insieme di eq. cartesiane per H.

In particolare, il NUMERO m di EQUAZIONI CARTESIANE in $A \cdot x = b$ NON è UNIVOCAMENTE DETERMINATO.

Vediamo ora che, ad ogni modo, è univocamente determinato il NUMERO MINIMO DI EQUAZ. CARTESIANE di $H \subseteq \mathbb{A}$.

PROP.: Sia $H \subseteq \mathbb{A}$ SSA di $\dim H = k$, $\dim \mathbb{A} = n$.

Allora $\forall$ insieme di m eq. cartesiane $A \cdot x = b$, con $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, si ha

$$m \geq n-k$$

Inoltre, siccome $\forall H \subseteq \mathbb{A}$, $\exists A \cdot x = b$ con $m = n-k$, si ha che

$$n-k = \min \left\{ m \in \mathbb{N} : \begin{array}{l} A \cdot x = b,\ A \in M_{m,n}(\mathbb{K}), \text{ sono} \\ \text{eq. cart. per } H \end{array} \right\}$$

Dim.:

In generale, se $A \cdot x = b$ sono eq. cartesiane per H

$k = \dim H = \dim W = n - \operatorname{rg} A$, con W SSV delle coordinate delle giaciture di H.

$\Rightarrow \operatorname{rg} A = n-k$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

In particolare

$$n-k = \operatorname{rg}(A) \leq \min\{m, n\} \Longrightarrow \boxed{n-k \leq m}$$

$\Rightarrow$ $n-k$ è il minimo numero di equazioni necessarie per S.

OSS.: Se $k = n-1$, H si dice IPERPIANO di $\mathbb{A}$

$\#$ minimo di eq. $n-k = n-(n-1) = 1$

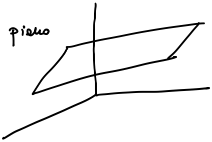
$\Rightarrow$ ogni IPERPIANO può essere assegnato da 1 eq. cartesiana.

Es. $n=2$, $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, $n-1=1$

iperpiano = retta

$n = 3$, $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, $n-1 = 2$

iperpiano = piano



$a x_1 + b x_2 + c x_3 = d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

opp. $a x + b y + c z = d$

$n = 4$ $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ $n-1 = 3$

Iperpiano è $S \subseteq \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ $(= \mathbb{R}^4)$

$\dim S = 3$ $a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4 = e$

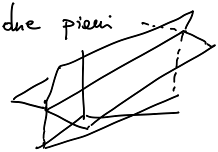
Es. rette in $\mathbb{A}^4_{\mathbb{K}}$ $k = 1$

$\Rightarrow$ sono necessarie $n - k = n - 1$ eq. cartesiane

$n = 3$: $n - 1 = 2$ eq. cart.

$$\begin{cases} a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z = b_1 \rightsquigarrow \text{rapp. un piano } H_1 \\ a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z = b_2 \rightsquigarrow \text{rapp. altro piano } H_2 \end{cases}$$

Quindi: OGNI RETTA DI $\mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}$ si può esprimere come INTERSEZ. di due piani



Eq. parametriche per retta $r \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}$ sono del tipo:

$$\begin{cases} x = q_1 + l t \\ y = q_2 + m t \\ z = q_3 + n t \end{cases}$$

$$\boxed{v = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per trovare eq. cartesiane

cons. $M = \begin{pmatrix} l & x-\xi_1 \\ m & y-\xi_2 \\ n & z-\xi_3 \end{pmatrix}$

$\operatorname{rg} M = 1$

La matrice a scala $\tilde{M}$ sarà

$$\begin{pmatrix} \overset{\neq 0}{*} & p_1(x,y,z) \\ 0 & p_2(x,y,z) \\ 0 & p_3(x,y,z) \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} p_2(x,y,z)=0 \\ p_3(x,y,z)=0 \end{cases}$$

PASSAGGIO DA EQ. CARTESIANE a EQ PARAMETRICHE

Supp. $S \subseteq A$ SSA, $\dim S = k$

abbia eq. cart. $A \cdot x = b$

Sappiamo dal Teo di Struttura per soluz. di SL che la gen. soluz. è

$$\underset{\downarrow (x_1, \dots, x_n)}{s} = \tilde{s} + s_0 \,, \qquad s_0 \in W$$

$\tilde{s} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n$

$\dim W = k = \operatorname{rg} A$

Fisso base di W: $\{w_1, \dots, w_k\}$

$$s = \tilde{s} + t_1 w_1 + \dots + t_k w_k$$

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1 + t_1 w_{11} + \dots + t_k w_{1k} \\ x_2 = \xi_2 + t\, w_{21} \quad + t_k w_{2k} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_n = \xi_n + t_1 w_{n1} \quad + t_k w_{nk} \end{cases}$$

sono eq. par. per S

Esempi: $k = n-1$ iperpiano in A^n_K

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b$$

$n = 2$: $\underbrace{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b}$, $a_{11} \neq 0$

$(a_{11} \quad a_{12} \mid b)$

$$x_2 = t$$

$$x_1 = \frac{b - a_{12}\cdot t}{a_{11}}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} t \\ x_2 = t \end{cases}$$

$$Q = \left(\frac{b}{a_{11}}, 0\right) , \quad v = \begin{pmatrix} -\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{opp. } w = \begin{pmatrix} -a_{12} \\ a_{11} \end{pmatrix}$$

es. $x + 3y - 1 = 0$

$y = t, \quad x = 1 - 3t$

$$r: \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = t \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = 3z - 2 \\ y = 1 - z \end{cases}$$

$$Q = (1, 0) \qquad \begin{cases} x = -2 + 3z \\ y = 1 - z \end{cases}$$

$$v = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Q' = (-2, 1)$$

$$v' = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Q \overset{?}{\in} r' \iff \begin{cases} 3z - 2 = 1 \\ 1 - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3z = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

sì

$$Q' \in r \qquad \begin{cases} 1 - 3t = -2 \\ t = 1 \end{cases}$$

Es. $n = 3$, $k = 1$ rette

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$$

Per trovare delle equazioni parametriche, devo risolvere il sistema e scrivere le coordinate della generica soluzione.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} I \\ \downarrow \\ II \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad II - 2I$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{3}\cdot II]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y - z = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = t \\ y = t - 1 \\ x = t - 1 - t + 2 \end{cases} , \quad x = 1$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases} \rightsquigarrow \quad Q = (1, -1, 0)$$

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

PIANI IN $\mathbb{A}^3_K$

$$ax + by + cz = d$$

$a \neq 0 \qquad z = t_1 , \quad y = t_2$

$$x = -\frac{b}{a} t_2 - \frac{c}{a} t_1 + d$$

$$\begin{cases} x = d - \frac{c}{a} t_1 - \frac{b}{a} t_2 \\ y = t_2 \\ z = t_1 \end{cases}$$

$$Q = (d, 0, 0)$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

opp. $w_1 = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$