

Note del Corso di GEOMETRIA 2

A.A. 2025/2026

Prof. Valentina Beorchia

Gennaio 2026

Indice

1	Spazi affini	2
1.1	Sottospazi affini e loro equazioni	5
1.2	Parallelismo, incidenza e sghembità	8
1.2.1	Passaggio da equazione cartesiane a parametriche	8
1.2.2	Passaggio da equazioni parametriche a cartesiane	9
1.3	Tabella riassuntiva delle condizioni di parallelismo e incidenza tra piani . . .	10
1.4	Tabella riassuntiva delle condizioni di parallelismo, incidenza e sghembità tra rette nello spazio	12
1.5	Tabella riassuntiva delle condizioni di parallelismo e incidenza tra una retta e un piano nello spazio	14
2	Applicazioni affini e affinità	16
2.0.1	Isomorfismi affini	18
2.0.2	Gruppi di trasformazioni affini	19
2.1	Rappresentazioni numeriche di affinità	23
2.1.1	Affinità di $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$	23
2.1.2	Affinità di uno spazio affine arbitrario	24

Capitolo 1

Spazi affini

Definizione 1.0.1. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Uno spazio affine su V è un insieme non vuoto $\mathbb{A}$, i cui elementi si dicono i punti di $\mathbb{A}$, ed una funzione

$$\sigma : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow V, \quad \sigma(P, R) = \overrightarrow{PR},$$

tale che valgano i seguenti assiomi:

(SA1) per ogni $P \in \mathbb{A}$ e per ogni $v \in V$, $\exists! R \in \mathbb{A}$ tale che $v = \overrightarrow{PR}$;

(SA2) per ogni terna di punti (non necessariamente distinti) $P, Q, R \in \mathbb{A}$ si ha $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

Proposizione 1.0.2. *Dai due assiomi di spazio affine si hanno le seguenti proprietà:*

1. per ogni $P \in \mathbb{A}$ si ha $\overrightarrow{PP} = 0 \in V$;
2. per ogni $P, R \in \mathbb{A}$, si ha $\overrightarrow{RP} = -\overrightarrow{PR}$;
3. per ogni punto $P \in \mathbb{A}$, la funzione $f_P : \mathbb{A} \rightarrow V$, $f_P(Q) = \overrightarrow{PQ}$ è una biiezione.

Dimostrazione. (1) Dall'assioma (SA2), ponendo $P = Q = R$, si ha

$$\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP},$$

e sommando ad entrambi i membri il vettore $\overrightarrow{PP}$ si ha la tesi.

(2) Dall'assioma (SA2), ponendo $R = P$, si ha

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = 0$$

per il primo punto, quindi $\overrightarrow{QP}$ è il vettore opposto di $\overrightarrow{PQ}$.

(3) La tesi segue direttamente dall'assioma (SA1). □

Definizione 1.0.3. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Allora definiamo la dimensione di $\mathbb{A}$ come

$$\dim \mathbb{A} := \dim V.$$

Se $\dim \mathbb{A} = 1$, allora $\mathbb{A}$ si dice *retta affine*; se $\dim \mathbb{A} = 2$, allora $\mathbb{A}$ si dice *piano affine*.

Proposizione 1.0.4. Se $\mathbb{A}$ è uno spazio affine su V , l'applicazione

$$t : \mathbb{A} \times V \longrightarrow \mathbb{A} \quad \text{definita da} \quad (P, v) \mapsto Q : \overrightarrow{PQ} = v$$

verifica: $\forall P \in \mathbb{A}, \forall v, w \in V$ vale $t(t(P, v), w) = t(P, (v + w))$

Dimostrazione. Per SA1, fissati P e v , esiste un unico punto Q tale che $v = \overrightarrow{PQ}$. D'altra parte, per la stessa ragione, esiste un unico punto R tale che $w = \overrightarrow{QR}$. Pertanto

$$v + w = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

dove la seconda uguaglianza segue da (SA2). In conclusione si ha

$$t(t(P, v), w) = t(t(P, \overrightarrow{PQ}), w) = t(Q, w) = t(Q, \overrightarrow{QR}) = Rt(P, \overrightarrow{PR}) = t(P, \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = t(P, v + w).$$

come volevamo. $\square$

Fissando il vettore v nel secondo fattore del dominio di t si ottiene una biiezione di $\mathbb{A}$ come segue.

Definizione 1.0.5. Se $\mathbb{A}$ è uno spazio affine su V e $v \in V$ è un vettore fissato, l'applicazione

$$t_v : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A} \quad \text{definita da} \quad P \mapsto t_v(P) := Q, \quad v = \overrightarrow{PQ}$$

si dice *traslazione di $\mathbb{A}$ lungo v* .

Esempio 1.0.6. Nel caso particolare dello spazio affine standard $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$, abbiamo che $f : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ è una traslazione se e solo se

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + a_1, \dots, x_n + a_n)$$

per un certo $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, e si ha $f = t_{\vec{a}}$.

Per esempio, l'applicazione $f : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$ definita da

$$f(x, y, z) = \left(x - \sqrt{2}, y + 3i, z - 1 - \frac{3i}{4} \right)$$

è una traslazione dello spazio affine complesso.

Osservazione 1.0.7. Dato V spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$, possiamo definire una *struttura di spazio affine in V su se stesso*, ponendo:

$$\overrightarrow{vw} := w - v.$$

Si verifica facilmente che gli assiomi sono verificati.

Definizione 1.0.8. In particolare, se $V = \mathbb{K}^n$, una struttura di spazio affine su $\mathbb{K}^n$ è data da:

$$\sigma : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad \sigma((p_1, p_2, \dots, p_n), (q_1, q_2, \dots, q_n)) := \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{PQ}.$$

Lo spazio affine così definito verrà indicato con il simbolo $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$, e si dice *spazio affine standard*.

Vediamo ora come associare delle coordinate a un punto di uno spazio affine arbitrario. Useremo la nozione di coordinate di un vettore in una base, e per fare ciò dobbiamo fissare un punto, che chiameremo origine.

Definizione 1.0.9. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su uno spazio vettoriale V . Un *riferimento affine* per $\mathbb{A}$ è il dato di:

- un punto $O \in \mathbb{A}$;
- una base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ di V .

Il punto O si dice *origine del riferimento*.

Dato un punto $P \in \mathbb{A}$ qualsiasi, possiamo definire le *coordinate di P* come le coordinate del vettore $\overrightarrow{OP}$ nella base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, cioè se

$$\overrightarrow{OP} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n,$$

definiamo l' n -upla $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ come le coordinate di P .

Convenzione 1

Per distinguere le coordinate di vettori dalle coordinate di punti di spazi affini, useremo la seguente notazione:

- le coordinate di un vettore verranno indicate in colonna: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$;
- le coordinate di un punto verranno indicate in riga: $(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Esempio 1.0.10. Se $\mathbb{A}$ è una retta affine, un riferimento affine è dato da un punto $O \in \mathbb{A}$ e da un vettore non nullo $v \in V$.

Se $\mathbb{A}$ è un piano affine, un riferimento affine è dato da un punto $O \in \mathbb{A}$ e da due vettori non nulli e non proporzionali $v_1, v_2 \in V$.

Definizione 1.0.11. In $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ possiamo scegliere il seguente riferimento:

- il punto $O \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ di componenti nulle $O = (0, \dots, 0)$;
- la base canonica di $\mathbb{K}^n$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Questo riferimento si dice *riferimento affine canonico* di $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$.

1.1 Sottospazi affini e loro equazioni

Definizione 1.1.1. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V . Fissati

- un punto $Q \in \mathbb{A}$, e
- un sottospazio vettoriale $W \subseteq V$,

il sottospazio affine passante per Q e parallelo a W è il sottoinsieme di $\mathbb{A}$ definito da

$$S = \{P \in A \mid \overrightarrow{QP} \in W\}.$$

Il sottospazio $W \subseteq V$ si chiama *giacitura* di S .

Dalla definizione seguono subito le seguenti proprietà:

Proposizione 1.1.2. *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V . Si ha:*

1. *se S è un sottospazio affine passante per Q e di giacitura W , allora $Q \in S$.*
2. *Per ogni coppia di punti $P_1, P_2 \in S$, si ha $\overrightarrow{P_1P_2} \in W$.*
3. *S ha una struttura di spazio affine su W .*

Definizione 1.1.3. Sia $S \subseteq A$ un sottospazio affine di giacitura W . Definiamo

$$\dim S := \dim W.$$

Se $\dim S = \dim \mathbb{A} - 1$, allora S si dice *iperpiano* di $\mathbb{A}$.

Vediamo ora due modi per descrivere i sottospazi affini, cioè tramite equazioni cartesiane ed equazioni parametriche.

Teorema 1.1.4. *Sia $A \cdot x = b$ un sistema di equazioni lineari di ordine n a coefficienti nel campo K . Se $A \cdot x = b$ è compatibile, allora l'insieme delle sue soluzioni*

$$S = \{s \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot s = b\}$$

è un sottospazio affine di $\mathbb{A}_K^n$ la cui giacitura è il sottospazio vettoriale W di $\mathbb{K}^n$ formato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato:

$$W = \{s \in K^n \mid A \cdot s = 0\}.$$

In tal caso $\dim(S) = n - \text{rk}(A)$, e per ogni $s \in S$, il sottoinsieme S coincide con il sottospazio affine di $\mathbb{A}_K^n$ passante per s e parallelo a W .

Dimostrazione. Poiché il sistema lineare è compatibile, S non è vuoto. Sia dunque $\tilde{s}$ una sua soluzione. Per il teorema di struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare, ogni altra soluzione s si può scrivere nella forma

$$s = \tilde{s} + w, \quad w \in W.$$

Quindi si ha

$$s \in S \iff s - \tilde{s} \in W.$$

Per definizione, S risulta il sottospazio affine di $\mathbb{A}_K^n$ passante per $\tilde{s}$ di giacitura W . Infine, per il Teorema di Dimensione, $\dim W = n - \text{rk}(A) = \dim S$. $\square$

Definizione 1.1.5. Sia $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ un sottospazio affine. Un sistema di equazioni cartesiane per S è un qualunque sistema di equazioni lineari $Ax = b$, tale che

$$S = \{s \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \mid A \cdot s = b\}.$$

Osservazione 1.1.6. (1) Un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ può essere descritto da diversi sistemi di equazioni cartesiane.

Infatti, se $S = \{s \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \mid A \cdot s = b\}$, allora per ogni sistema di equazioni lineari $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$ equivalente ad $A \cdot x = b$, le equazioni di $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$ sono delle equazioni cartesiane per S .

(2) Sia $A \cdot x = b$ un sistema di equazioni cartesiane per il sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$. Allora il punto $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ appartiene a S se e solo se $b = 0$, cioè se e solo se il sistema di equazioni lineari è omogeneo.

(3) Ogni iperpiano di $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ può essere descritto da una equazione lineare del tipo

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = d, \quad (1.1.1)$$

con $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ non tutti nulli.

Infatti, se $A \cdot x = b$ è un sistema di equazioni cartesiane per S , abbiamo che

$$\dim(S) = n - 1 = n - \text{rk}(A).$$

Da questo segue che $\text{rk}(A) = 1$. Siccome il sistema lineare $A \cdot x = b$ è compatibile, per il Teorema di Rouché - Capelli si ha $\text{rk}(A|b) = \text{rk}(A) = 1$.

Sia $A \cdot x = b$ un sistema lineare equivalente con A a scala. Siccome $\text{rk}(A|b) = \text{rk}(A) = 1$, la matrice $(A|b)$ ha un'unica riga non nulla, che corrisponde a una equazione lineare del tipo (1.1.1).

Vediamo ora come si possono descrivere i sottospazi affini tramite equazioni parametriche.

Osservazione 1.1.7. Sia $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ sottospazio affine passante per un punto $Q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ e di giacitura $W \subseteq \mathbb{K}^n$. Sia $\{w_1, \dots, w_m\}$ una base del sottospazio vettoriale W . Fissiamo le componenti dei vettori w_i (come elementi di $\mathbb{K}^n$)

$$w_1 = \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{21} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} w_{12} \\ w_{22} \\ \vdots \\ w_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad w_m = \begin{pmatrix} w_{1m} \\ w_{2m} \\ \vdots \\ w_{nm} \end{pmatrix}.$$

Allora abbiamo

$$P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S \iff \overrightarrow{QP} \in W \iff \exists t_1, t_2, \dots, t_m \in \mathbb{K} : \overrightarrow{QP} = t_1 w_1 + t_2 w_2 + \dots + t_m w_m.$$

Definizione 1.1.8. Usando le stesse notazioni di cui sopra, le equazioni

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + t_2 w_{12} + \dots + t_m w_{1m} \\ x_2 = q_2 + t_1 w_{21} + t_2 w_{22} + \dots + t_m w_{2m} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + t_2 w_{n2} + \dots + t_m w_{nm} \end{cases}$$

si dicono *equazioni parametriche di S*.

Osservazione 1.1.9. Un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ può essere descritto da diversi sistemi di equazioni parametriche.

1.2 Parallelismo, incidenza e sghembità

Definizione 1.2.1. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su uno spazio vettoriale V , e siano $S_1 \subseteq \mathbb{A}$, $S_2 \subseteq \mathbb{A}$ due sottospazi affini di giaciture W_1 e W_2 rispettivamente.

- S_1 e S_2 si dicono *paralleli*, in simboli

$$S_1 \parallel S_2,$$

se

$$W_1 \subseteq W_2 \text{ oppure } W_2 \subseteq W_1;$$

- S_1 e S_2 si dicono *incidenti* se

$$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset;$$

- S_1 e S_2 si dicono *sghembi* se non sono nè paralleli nè sghembi.

1.2.1 Passaggio da equazione cartesiane a parametriche

Sia $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ un sottospazio affine dato dalle equazioni cartesiane $A \cdot x = b$.

Per trovare delle equazioni parametriche per S , si risolve il sistema di equazioni lineari $A \cdot x = b$, esprimendo le sue soluzioni in funzione di opportune variabili libere $t_1, \dots, t_m$,

che equivale a trovare una soluzione particolare Q di $Ax = b$, ed una base $w_1, \dots, w_m$ dello spazio W delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato $A \cdot x = 0$, in modo che

$$S = Q + W = Q + t_1 w_1 + \dots + t_m w_m,$$

al variare di $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{K}$.

1.2.2 Passaggio da equazioni parametriche a cartesiane

Sia $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ un sottospazio affine dato dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + t_2 w_{12} + \dots + t_m w_{1m} \\ x_2 = q_2 + t_1 w_{21} + t_2 w_{22} + \dots + t_m w_{2m} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + t_2 w_{n2} + \dots + t_m w_{nm} \end{cases}$$

Osserviamo che un punto $P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ appartiene a S se e solo se il seguente sistema lineare delle indeterminate $t_1, t_2, \dots, t_m$ ammette soluzione:

$$\begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{1m} \\ w_{21} & \dots & w_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{n1} & \dots & w_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ x_2 - q_2 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix}.$$

Per il Teorema di Rouché - Capelli, ciò è equivalente al fatto che i ranghi delle matrici dei coefficienti e della matrice completa siano uguali; per costruzione, il rango della matrice dei coefficienti è m , quindi delle equazioni cartesiane per S si ottengono imponendo che tutti i minori di ordine $m + 1$ siano nulli.

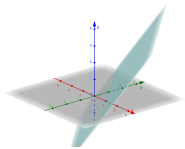
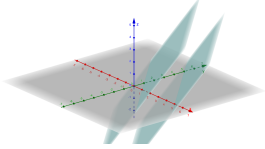
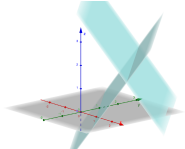
vfill

1.3 Tabella riassuntiva delle condizioni di parallelismo e incidenza tra piani

Consideriamo due piani π, π' nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ di equazioni cartesiane:

$$\pi : ax + by + cz = d, \quad \pi' : a'x + b'y + c'z = d'.$$

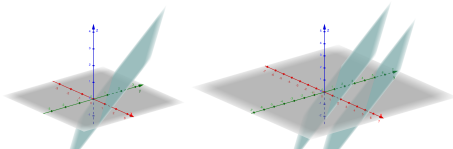
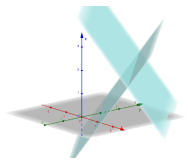
Allora si ha:

$\text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$	$\text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$	posizione	
1	1	$\pi \parallel \pi', \pi = \pi'$	
1	2	$\pi \parallel \pi', \pi \cap \pi' = \emptyset$	
2	2	$\pi \nparallel \pi', \dim \pi \cap \pi' = 1$	

Consideriamo due piani π, π' nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ di equazioni parametriche:

$$\pi : \begin{cases} x = Q_1 + l_1 t_1 + l_2 t_2 \\ y = Q_2 + m_1 t_1 + m_2 t_2 \\ z = Q_3 + n_1 t_1 + n_2 t_2 \end{cases} \quad \pi' : \begin{cases} x = T_1 + o_1 s_1 + o_2 s_2 \\ y = T_2 + u_1 s_1 + u_2 s_2 \\ z = T_3 + w_1 s_1 + w_2 s_2 \end{cases}$$

Allora si ha:

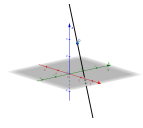
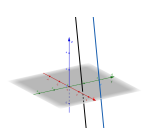
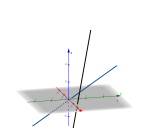
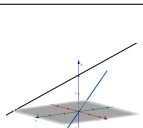
$\text{rk} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & o_1 & o_2 \\ m_1 & m_2 & u_1 & u_2 \\ n_1 & n_2 & w_1 & w_2 \end{pmatrix}$	posizione	
2	$\pi \parallel \pi', \pi = \pi' \text{ oppure } \pi \cap \pi' = \emptyset$	
3	$\pi \not\parallel \pi', \dim \pi \cap \pi' = 1$	

1.4 Tabella riassuntiva delle condizioni di parallelismo, incidenza e sghembità tra rette nello spazio

Consideriamo due rette r, r' nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ di equazioni cartesiane:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}, \quad r' : \begin{cases} ex + fy + gz = h \\ e'x + f'y + g'z = h' \end{cases}.$$

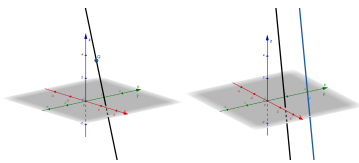
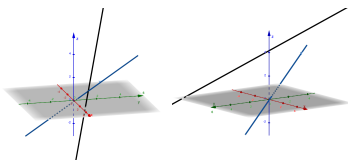
Allora si ha:

$\text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ e & f & g \\ e' & f' & g' \end{pmatrix}$	$\text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ e & f & g & h \\ e' & f' & g' & h' \end{pmatrix}$	posizione	
2	2	$r \parallel s, r = s$	
2	3	$r \parallel s, r \cap s = \emptyset$	
3	3	$r \nparallel s, r \cap s = \{R\}$	
3	4	$r \nparallel s, r \cap s = \emptyset$	

Consideriamo due rette r, r' nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ di equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = Q_1 + lt \\ y = Q_2 + mt \\ z = Q_3 + nt \end{cases} \quad r' : \begin{cases} x = T_1 + os \\ y = T_2 + us \\ z = T_3 + ws \end{cases}$$

Allora si ha:

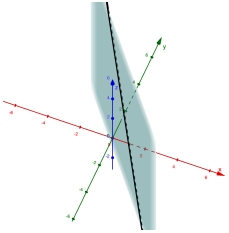
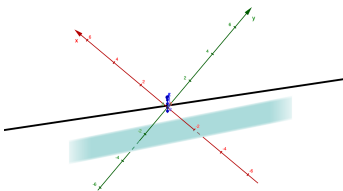
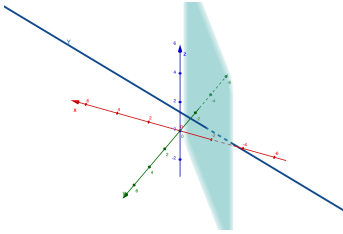
$\text{rk} \begin{pmatrix} l & o \\ m & u \\ n & w \end{pmatrix}$	posizione	
1	$r \parallel r', r = r'$ oppure $r \cap r' = \emptyset$	
2	$r \nparallel r', r \cap r' = \{R\}$ un punto oppure $r \cap r' = \emptyset$	

1.5 Tabella riassuntiva delle condizioni di parallelismo e incidenza tra una retta e un piano nello spazio

Consideriamo una retta r e un piano π nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ di equazioni cartesiane:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}, \quad \pi : ex + fy + gz = h.$$

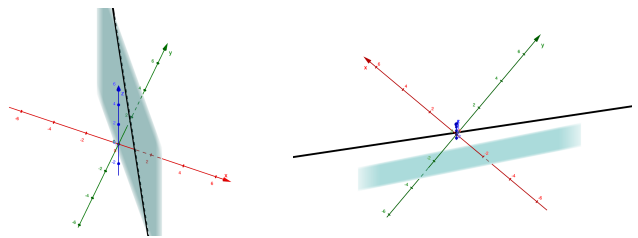
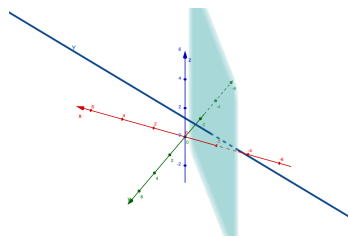
Allora si ha:

$\text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ e & f & g \end{pmatrix}$	$\text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$	posizione	
2	2	$r \parallel \pi, r \subseteq \pi$	
2	3	$r \parallel \pi, r \cap \pi = \emptyset$	
3	3	$r \nparallel \pi, r \cap \pi = \{R\}$	

Consideriamo una retta r e un piano π nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ di equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = Q_1 + lt \\ y = Q_2 + mt \\ z = Q_3 + nt \end{cases} \quad \pi : \begin{cases} x = T_1 + o_1 s_1 + o_2 s_2 \\ y = T_2 + u_1 s_1 + u_2 s_2 \\ z = T_3 + w_1 s_1 + w_2 s_2 \end{cases}$$

Allora si ha:

rk $\begin{pmatrix} l & o_1 & o_2 \\ m & u_1 & u_2 \\ n & w_1 & w_2 \end{pmatrix}$	posizione	
2	$r \parallel \pi, r \subseteq \pi$ oppure $r \cap \pi = \emptyset$	
3	$r \nparallel \pi, r \cap \pi = \{R\}$ un punto	

Capitolo 2

Applicazioni affini e affinità

Avendo introdotto la struttura geometrica di spazio affine, consideriamo ora le applicazioni tra spazi affini che conservano la struttura, ovvero che mandano sottospazi affini in sottospazio affini (non necessariamente della stessa dimensione). Queste mappe verranno chiamate applicazioni (o trasformazioni) affini.

Definizione 2.0.1. Siano V e V' due $\mathbb{K}$ -spazi vettoriali e siano $\mathbb{A}$ e $\mathbb{A}'$ due spazi affini, rispettivamente su V e V' .

Diciamo che una applicazione

$$f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$$

è una *applicazione affine* se esiste un'applicazione $\mathbb{K}$ -lineare

$$\varphi : V \rightarrow V',$$

detta *parte lineare* di f , tale che, per ogni $P, Q \in \mathbb{A}$, vale

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ}).$$

In particolare, se f è biettiva, anche φ è biettiva, quindi è un isomorfismo di spazi vettoriali, e diremo che f è un *isomorfismo affine*. In tal caso, $\mathbb{A}$ e $\mathbb{A}'$ si dicono *isomorfi* e scriveremo

$$\mathbb{A} \cong \mathbb{A}'.$$

Osservazione 2.0.2. Lo spazio affine standard $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ si può immergere come sottospazio affine in $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^m$ per ogni $m > n$, ad esempio mediante l'applicazione affine iniettiva

$$j : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$$

definita da

$$j(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0).$$

Nel caso particolare $n = 1$ e $m = 2$, si ottiene l'inclusione della retta affine $\mathbb{A}^1$ nel piano $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ mediante $x \mapsto (x, 0) \forall x \in \mathbb{A}^1$, cioè si ottiene la retta rappresentata dall'asse x .

Osservazione 2.0.3. Un sistema di equazioni parametriche per un sottospazio affine $S \subset \mathbb{A}^n$ di dimensione k determina un'applicazione affine iniettiva (*immersione affine*)

$$f : \mathbb{A}^k \rightarrow \mathbb{A}^n,$$

con $f(\mathbb{A}^k) = S$.

Infatti, se S ha equazioni

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + t_2 w_{12} + \dots + t_k w_{1k} \\ x_2 = q_2 + t_1 w_{21} + t_2 w_{22} + \dots + t_k w_{2k} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + t_2 w_{n2} + \dots + t_k w_{nk} \end{cases}$$

l'applicazione

$$f(t_1, \dots, t_k) = (q_1 + t_1 w_{11} + t_2 w_{12} + \dots + t_k w_{1k}, \dots, q_n + t_1 w_{n1} + t_2 w_{n2} + \dots + t_k w_{nk})$$

ha come parte lineare l'applicazione data dalla moltiplicazione per la matrice

$$A = (w_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k}.$$

Notazione 2.0.4. Indicheremo con $\mathcal{L}(V, V')$, oppure con $\text{Hom}(V, V')$, lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari tra due spazi vettoriali V e V' .

Lemma 2.0.5. Fissati due punti arbitrari $O \in \mathbb{A}$ e $O' \in \mathbb{A}'$, per ogni $\varphi \in \mathcal{L}(V, V')$ esiste un'unica trasformazione affine

$$f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$$

tale che $f(O) = O'$ e con parte lineare φ .

In particolare, data una trasformazione affine f , la parte lineare φ è univocamente determinata.

Dimostrazione. Per ogni $P \in \mathbb{A}$, consideriamo il vettore $\varphi(\overrightarrow{OP}) \in V'$, e poniamo $f(P) \in \mathbb{A}'$ uguale all'unico punto tale che

$$\varphi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{O'f(P)}.$$

In particolare, abbiamo che

$$\varphi(\overrightarrow{OO}) = \varphi(0) = 0 = \overrightarrow{O'f(O)},$$

quindi $f(O) = O'$.

L'applicazione f risulta una trasformazione affine per costruzione, ed è unica. Infatti, se $g : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ è un'altra trasformazione affine tale che

$$g(O) = O',$$

con parte lineare φ , si ha per ogni $P \in \mathbb{A}$

$$\overrightarrow{O'g(P)} = \overrightarrow{g(O)g(P)} = \varphi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{O'f(P)},$$

e per l'assioma (SA1) si ha

$$g(P) = f(P).$$

□

2.0.1 Isomorfismi affini

Analizziamo ora nel dettaglio l'insieme degli isomorfismi affini.

Proposizione 2.0.6. *Se $\mathbb{A}, \mathbb{A}', \mathbb{A}''$ sono spazi affini, allora valgono:*

- i) *l'applicazione identica $id_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ (la cui parte lineare è $\varphi = id_V$) è un isomorfismo affine;*
- ii) *se $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ è un isomorfismo allora anche $f^{-1} : \mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{A}$ è un isomorfismo;*
- iii) *se $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ e $g : \mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{A}''$ sono applicazioni affini, allora anche l'applicazione $g \circ f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}''$ è affine, la cui parte lineare è composizione delle due parti lineari.*

In particolare, la composizione di isomorfismi affini è anch'essa un isomorfismo.

Dimostrazione. Il punto i) è immediato.

ii) Sia $\varphi : V \rightarrow V'$ la parte lineare di f . Affermiamo che φ^{-1} è la parte lineare di f^{-1} , cioè che per ogni coppia $P', Q' \in \mathbb{A}'$, vale

$$\overrightarrow{f^{-1}(P')f^{-1}(Q')} = \varphi^{-1}(\overrightarrow{P'Q'}).$$

Consideriamo i punti $f^{-1}(Q'), f^{-1}(P') \in \mathbb{A}$. Essendo f una applicazione affine si ha

$$\varphi(\overrightarrow{f^{-1}(P')f^{-1}(Q')}) = \overrightarrow{f(f^{-1}(P'))f(f^{-1}(Q'))} = \overrightarrow{P'Q'}$$

Applicando φ^{-1} ad ambo i membri, si ottiene la tesi.

Il punto iii) si verifica facilmente.

□

Esempio 2.0.7. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V e sia $\mathcal{B} := (v_1, \dots, v_n)$ una base di V . Scelto $O \in \mathbb{A}$, si consideri il riferimento affine $\Sigma = (O; v_1, \dots, v_n)$.

Consideriamo l'applicazione

$$f_{\mathcal{B}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}_K^n \quad \text{data da} \quad P(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n),$$

che ad ogni punto associa la n -upla delle coordinate rispetto a Σ , è un isomorfismo affine con parte lineare

$$\varphi_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Infatti, dati P di coordinate $(x_1, \dots, x_n)$ e Q di coordinate $(y_1, \dots, y_n)$ in $\mathbb{A}$, per definizione si ha che

$$\overrightarrow{OP} = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OQ} = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n.$$

Inoltre vale

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (y_1 - x_1)v_1 + \dots + (y_n - x_n)v_n.$$

Pertanto, $\varphi(\overrightarrow{PQ}) = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n) \in \mathbb{K}^n$.

D'altro canto, $f(P) = (x_1, \dots, x_n)$ e $f(Q) = (y_1, \dots, y_n)$, e

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{of(Q)} - \overrightarrow{of(P)} = (y_1, \dots, y_n) - (x_1, \dots, x_n) = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n) = \varphi(\overrightarrow{PQ})$$

e questo significa che $f_{\mathcal{B}}$ è una applicazione affine e $\varphi_{\mathcal{B}}$ è la sua parte lineare.

Infine, si verifica facilmente che $\varphi_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo.

Osservazione 2.0.8. Dall'esempio precedente segue che ogni spazio affine di dimensione n su $\mathbb{K}$ è isomorfo (non canonicamente, l'isomorfismo dipende dalla scelta di una base) ad $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$.

Definizione 2.0.9. Un isomorfismo affine di uno spazio affine $\mathbb{A}$ in sé si dice *affinità* di $\mathbb{A}$.

In questo caso la parte lineare di f è un automorfismo φ di V , cioè $\varphi \in GL(V)$.

2.0.2 Gruppi di trasformazioni affini

Dalla Proposizione 2.0.6 segue facilmente il seguente fatto.

Proposizione 2.0.10. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine. Allora l'insieme

$$Aff(\mathbb{A}) := \{\text{affinità di } \mathbb{A}\}$$

è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni.

Definizione 2.0.11. I sottogruppi di $\text{Aff}(\mathbb{A})$ si dicono *gruppi di trasformazioni affini*.

Vediamo ora alcuni gruppi di trasformazioni affini e come un'affinità qualunque si può fattorizzare come composizione di due affinità più semplici.

Cominciamo con il caratterizzare le traslazioni.

Teorema 2.0.12. Se $\mathbb{A}$ è uno spazio affine su V allora le traslazioni di $\mathbb{A}$ sono tutte e sole le affinità aventi come parte lineare id_V .

Dimostrazione. Si consideri la traslazione t_v lungo v , dove $v \in V$:

$$t_v : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A} \quad P \mapsto t_v(P) = Q : \overrightarrow{PQ} = v.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \overrightarrow{t_v(P)t_v(P')} &= \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'} = -\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'} = \\ &= -v + \overrightarrow{PP'} + v = \overrightarrow{PP'}. \end{aligned}$$

Pertanto t_v è una applicazione affine di parte lineare $\varphi = \text{id}_V$. Abbiamo visto in precedenza che t_v è biunivoca e quindi, essendo φ un isomorfismo di spazi vettoriali, è un isomorfismo affine. Quindi t_v è un'affinità.

Viceversa, se $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ è un'affinità e la sua parte lineare è id_V , allora per definizione, comunque scelti $P, Q \in \mathbb{A}$:

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{PQ}.$$

Pertanto, posto

$$v := \overrightarrow{Pf(P)}$$

si ha per ogni $Q \in \mathbb{A}$

$$\overrightarrow{Qf(Q)} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{Pf(P)} + \overrightarrow{f(P)f(Q)} = -\overrightarrow{PQ} + v + \overrightarrow{PQ} = v.$$

□

Esercizio A1. Si provi che, per ogni $v, w \in V$, valgono i seguenti fatti:

- i) t_v è biiettiva;
- ii) l'applicazione inversa di t_v è t_{-v} ;
- iii) se v è il vettore nullo si ha $t_{0_V} = \text{id}(\mathbb{A})$;
- iv) $t_{v+w} = t_v \circ t_w = t_w \circ t_v$.

Osservazione 2.0.13. Abbiamo visto che l'insieme di tutte le traslazioni di uno spazio affine $\mathbb{A}$ è un sottogruppo di $\text{Aff}(\mathbb{A})$ e dunque un gruppo di trasformazioni affini, detto *sottogruppo delle traslazioni* e denotato con $T(\mathbb{A})$.

Osservazione 2.0.14. Se si fissa un punto $O \in \mathbb{A}$, si verifica facilmente che l'insieme delle affinità che lo fissano

$$\text{Aff}_O(\mathbb{A}) := \{f \in \text{Aff}(\mathbb{A}) \mid f(O) = O\}$$

è un sottogruppo di $\text{Aff}(\mathbb{A})$ e dunque è un altro gruppo di trasformazioni affini.

Lemma 2.0.15. *L'applicazione*

$$\Phi_O : \text{Aff}_O(\mathbb{A}) \longrightarrow GL(V)$$

che associa ad ogni affinità la sua parte lineare è un isomorfismo di gruppi, in cui le operazioni sono la composizione di applicazioni.

Più in generale, possiamo definire l'analoga applicazione riguardo ad una qualunque affinità; in altri termini, estendiamo Φ_O a tutto $\text{Aff}(\mathbb{A})$.

Teorema 2.0.16. *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine sullo spazio vettoriale V . Allora l'applicazione*

$$\Phi : \text{Aff}(\mathbb{A}) \longrightarrow GL(V)$$

che associa ad ogni affinità la sua parte lineare è un omomorfismo di gruppi. Inoltre $\ker(\Phi) = T(\mathbb{A})$, che è dunque un sottogruppo normale di $\text{Aff}(\mathbb{A})$.

Dimostrazione. Bisogna provare che, comunque scelte $f, g \in \text{Aff}(\mathbb{A})$, poste $\varphi = \Phi(f)$ e $\psi = \Phi(g)$ le rispettive parti lineari, allora si ha

$$\Phi(f \circ g) = \varphi \circ \psi.$$

Per la Definizione, questo equivale a provare che, per ogni $P, Q \in \mathbb{A}$ si verifica

$$\overrightarrow{(f \circ g)(P) (f \circ g)(Q)} = (\varphi \circ \psi)(\overrightarrow{PQ}).$$

Poiché f ha come parte lineare φ e g ha come parte lineare ψ , si ottengono le uguaglianze

$$\overrightarrow{f(g(P)) f(g(Q))} = \varphi(\overrightarrow{g(P) g(Q)}) = \varphi(\psi(\overrightarrow{PQ})),$$

come si voleva.

Inoltre $\ker(\Phi)$ è costituito da tutte e sole le affinità con parte lineare identica e tale insieme è esattamente $T(\mathbb{A})$ per il Teorema. $\square$

Un'altra classe importante di affinità sono le *similitudini*, che risultano associate a applicazione lineari date da *omotetie* e che richiamiamo brevemente.

Definizione 2.0.17. Se V è un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale e $c \in \mathbb{K}$, si dice *omotetia di rapporto c* l'applicazione lineare

$$\omega_c : V \rightarrow V \quad \omega_c(v) = cv, \quad \forall v \in V.$$

L'applicazione ω_c è un isomorfismo di $\mathbb{K}$ -spazi vettoriali se e solo se $c \neq 0$, altrimenti è l'omomorfismo nullo, e la sua matrice associata in una base qualunque $\mathcal{B}$ è

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\omega_c) = c\mathbb{I}_n,$$

dove $n = \dim(V)$.

La nozione di omotetia può essere riletta nell'ambito della Geometria Affine attraverso l'isomorfismo Φ_O come segue.

Definizione 2.0.18. Con le notazioni precedenti, se $c \in K^*$ e $O \in \mathbb{A}$, diciamo *omotetia di rapporto c e centro O* l'affinità

$$\omega_{c,O} := \Phi_O^{-1}(\omega_c)$$

cioè

$$\omega_{c,O} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A} \quad \text{dove} \quad \overrightarrow{O \omega_{c,O}(P)} = c\overrightarrow{OP}.$$

In particolare, se $c = -1$, l'affinità $\omega_{-1,O}$ si dice *simmetria di centro O* e si denota anche con σ_O .

Vediamo ora un risultato fondamentale sulle affinità, che ci permette di fattorizzare ogni affinità come composizione di una traslazione e di una affinità con un punto fisso. Più precisamente:

Teorema 2.0.19 (Fattorizzazione di un'affinità). *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine sullo spazio vettoriale V e sia $O \in \mathbb{A}$ un punto fissato. Allora per ogni $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$*

- i) *esistono e sono unici $v \in V$ e $g \in \text{Aff}_O(\mathbb{A})$ tali che $f = g \circ t_v$;*
- ii) *esistono e sono unici $w \in V$ e $h \in \text{Aff}_O(\mathbb{A})$ tali che $f = t_w \circ h$.*

Dimostrazione. i) Definiamo il vettore

$$v := \overrightarrow{f^{-1}(O) O}$$

e consideriamo la corrispondente traslazione t_v . Questa è biunivoca e ha per inversa $t_v^{-1} = t_{-v}$. Poiché $\text{Aff}(\mathbb{A})$ è un gruppo, la composizione di affinità è ancora un'affinità; pertanto definiamo l'affinità

$$g := f \circ t_v^{-1}.$$

Resta solo da provare che $g \in \text{Aff}_O(\mathbb{A})$, cioè che $g(O) = O$. Dalla definizione

$$g(O) = f(t_v^{-1}(O)) = f(t_{-v}(O)) = f(O - v) = f(f^{-1}(O)) = O,$$

come volevamo.

ii) Definiamo il vettore $w := f(O) - O$ e consideriamo la corrispondente traslazione t_w . Come prima, possiamo definire l'affinità

$$h := t_w^{-1} \circ f.$$

Resta solo da provare che $h \in \text{Aff}_O(\mathbb{A})$, cioè che $h(O) = O$. Dalla definizione

$$h(O) = t_w^{-1}(f(O)) = t_w^{-1}(O + w) = t_w^{-1}(t_w(O)) = O,$$

come volevamo. □

2.1 Rappresentazioni numeriche di affinità

Vogliamo ora determinare una rappresentazione di un'affinità in termini delle coordinate di un generico punto.

2.1.1 Affinità di $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$

Per semplicità incominciamo con lo spazio affine standard $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$.

Sia $f : \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ un'affinità con parte lineare φ . Sia

$$A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\varphi) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$$

la matrice associata a φ nella base canonica $\mathcal{E}$, sia $O = (0, \dots, 0)$ e poniamo

$$C := f(O).$$

Dato $P \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ arbitrario, per definizione di affinità si ha

$$f(P) - C = f(P) - f(O) = \varphi(P - O) = A \cdot (P - O) = A \cdot {}^t P.$$

Possiamo quindi scrivere

$${}^t f(P) = {}^t C + A \cdot {}^t P. \quad (2.1.1)$$

Viceversa, per ogni $A \in GL_n(\mathbb{K})$ e per ogni $C \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$, l'applicazione

$$f_{A,C} : \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n, \quad f_{A,C}(P) = {}^t C + A \cdot {}^t P$$

è un'affinità.

Infatti, si ha

$$\overrightarrow{f_{A,C}(P)f_{A,C}(Q)} = f_{A,C}(Q) - f_{A,C}(P) = {}^t C + A \cdot {}^t Q - ({}^t C + A \cdot {}^t P) = A \cdot {}^t (Q - P),$$

quindi $f_{A,C}$ è un'affinità con parte lineare data dalla moltiplicazione per la matrice A .

Come conseguenza abbiamo il seguente risultato.

Proposizione 2.1.1. *Il gruppo delle affinità di $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ ha per elementi:*

$$Aff_n(\mathbb{K}) = \{f_{A,C} : A \in GL_n(\mathbb{K}), C \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n\}.$$

Osservazione 2.1.2. In particolare le traslazioni in $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ si rappresentano come

$$t_C(P) = {}^t C + {}^t P$$

2.1.2 Affinità di uno spazio affine arbitrario

Il caso generale è perfettamente analogo al caso $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$; fissiamo un riferimento affine

$$(O, v_1, \cdot, v_n).$$

Teorema 2.1.3. *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V e sia $(O, v_1, \cdot, v_n)$ un riferimento affine. Allora ogni affinità f con automorfismo associato φ si esprime nella forma*

$$f(P(x_1, \cdot, x_n)) = Q(y_1, \cdot, y_n),$$

con

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^t C + A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (2.1.2)$$

e $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Viceversa, ogni applicazione del tipo (2.1.2) è un'affinità di $\mathbb{A}$.

Corollario 2.1.4. Fissato un riferimento affine $(O, v_1, \dots, v_n)$ di $\mathbb{A}$, l'applicazione

$$\text{Aff}(\mathbb{A}) \rightarrow \text{Aff}_n(\mathbb{K}), \quad f \mapsto f_{A,C} \text{ data da (2.1.2)}$$

è un isomorfismo di gruppi.

Si può dare una forma ancora più compatta dell'equazione (eq: affinità in generale) di un'affinità. Osserviamo che i dati della matrice $M \in K^{n,n}$ e del vettore $C \in K^n$ possono essere inseriti in una matrice $(n+1) \times (n+1)$ nei seguenti due modi.

I) Siano $\overline{X} := {}^t(1, x_1, \dots, x_n)$ e $\overline{Y} := {}^t(1, y_1, \dots, y_n)$ e sia

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & & & \\ \vdots & & M & \\ c_n & & & \end{pmatrix}.$$

Allora l'equazione è equivalente a

$$\overline{Y} = Q \overline{X}. \quad (2.1.3)$$

II) Siano $\tilde{X} := {}^t(x_1, \dots, x_n, 1)$ e $\tilde{Y} := {}^t(y_1, \dots, y_n, 1)$ e sia

$$\tilde{Q} := \begin{pmatrix} & & c_1 \\ & M & \vdots \\ & & c_n \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora l'equazione (eq: affinità in generale) è equivalente a

$$\tilde{Y} = \tilde{Q} \tilde{X}. \quad (2.1.4)$$