Lezione 3 marzo 2026

martedì 3 marzo 2026 09:10

Tutore: dott. TRONCARELLI

Giovedì 9-11 ; mercoledì 9-11

* * *

RELAZIONE TRA LUNGH. D'ARCO e MISURA

Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, I int. aperto

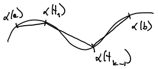
$[a,b] \subseteq I$

Sia $P = \{t_0 = a, t_1, \ldots, t_{k-1}, t_k = b\}$

una PARTIZIONE di I ; $t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$

Def: $\ell(\alpha, P) := \sum_{i=1}^{k} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|$

LUNGHEZZA DELLA POLIGONALE INSCRITTA ad α in $[a,b]$



Def.: Se $\sup \{\ell(\alpha, P) : P \text{ partizione di } [a,b]\} < +\infty$ allora α si **RETTIFICALE** su $[a,b]$

Teorema: Se $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è $\boxed{C^1}$

$\Rightarrow$ α è rettificabile, e

$$\sup \{\ell(\alpha, P) : P \text{ partiz. di } [a,b]\} = \int_a^b \|\alpha'(z)\| \, dz$$

Dim.: Mostriamo prima che $\forall P$ partizione

$$\ell(\alpha, P) \leq \int_a^b \|\alpha'(z)\| \, dz$$

Poi: mostriamo che è l'estremo superiore, usando la def.: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \tilde{P}$ t.c.

$$\ell(\alpha, \tilde{P}) > \int_a^b \|\alpha'(z)\| dz - \varepsilon$$

OSS.: $\alpha'(z)$ è C^0, $\|\alpha'(z)\|$ è C^0 su $[a,b]$

$$\|\alpha'(z)\| : [a,b] \to \mathbb{R}$$

Per il Teo. di Weierstrass, $\|\alpha'(z)\|$ ha MAX

$$\Rightarrow \|\alpha'(z)\| \leq M$$

$$\Rightarrow \underset{\displaystyle \ell(\alpha, P)}{\overset{\displaystyle \int_a^b \|\alpha'(z)\| \, dz}{\vee\!|}} \leq M(b-a) < +\infty$$

$\Rightarrow$ α è rettificabile

Lemma: Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continua

$$\Rightarrow \quad \left\| \int_a^b f(z)\, dz \right\| \leq \int_a^b \| f(z) \|\, dz$$

Dim. Poniamo $v = \dfrac{\int_a^b f(z)\, dz}{\left\| \int_a^b f(z)\, dz \right\|}$, $\|v\| = 1$

$$\underbrace{\int_a^b f(z)\, dz \cdot v}_{\|} = \left\| \int_a^b f(z)\, dz \right\|$$

$$\int_a^b \underline{(f(z) \cdot v)}\, dz \leq \int_a^b \|f(z)\| \overbrace{\|v\|}^{=1}\, dz$$

$\leq \|f(z)\| \cdot \|v\|$

Cauchy-Schwarz e monotonia di $\int_a^b$

Dim.: di $l(\alpha, P) \leq \int_a^b \|\alpha'(z)\|\, dz$

Sia P partizione; $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$

$$\|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| = \sqrt{(x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}))^2 + \dots + (x_n(t_i) - x_n(t_{i-1}))^2}$$

Teo. Fond. Calc. Int.

$$= \sqrt{\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} x_1'(z)\, dz\right)^2 + \dots + \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} x_n'(z)\, dz\right)^2}$$

$$= \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha'(z)\, dz \right\| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(z)\|\, dz$$

Lemma

$$\sum_{i=1}^{k} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| \leq \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(z)\|\, dz$$

$$= \int_a^b \|\alpha'(z)\|\, dz$$

per additività sui domini dell'int. def.

Mostriamo ora che $\int_a^b \|\alpha'(\tau)\| d\tau = \sup$

Fisso $\varepsilon > 0$

Per ipotesi $\alpha(t)$ è $\mathcal{C}^1 \Rightarrow \alpha'(t)$ è $\mathcal{C}^0$

$\alpha : I \to \mathbb{R}^n$

su $[a,b]$; per Teo. di Heine-Cantor

Esercizio.

$$\Downarrow$$

$$\exists\, \delta > 0 \text{ t.c. se } |t-s| < \delta$$

$$\Rightarrow \|\alpha'(t) - \alpha'(s)\| < \varepsilon$$

Per comodità, invece di applicare HC a ε, lo applichiamo a $\frac{\varepsilon}{(b-a)}$

Scegliamo P partizione t.c. $\max |t_i - t_{i-1}| < \delta$

$$\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha'(t)\, dt$$

$$= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \big(\alpha'(t) - \alpha'(s) + \underbrace{\alpha'(s)}_{\text{non dipende da } t}\big)\, dt$$

con $s \in [t_{i-1}, t_i]$

$t \in [t_{i-1}, t_i]$

$$= \alpha'(s) \cdot (t_i - t_{i-1}) + \int^{t_i} \big(\alpha'(t) - \alpha'(s)\big)\, dt$$

t_{i-1}

$$\|\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})\| = \|\alpha'(s)(t_i-t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\alpha'(t)-\alpha'(s))\, d\cancel{t}\,\|$$

Ricordo: $\|u+v\| \geq \|u\| - \|v\|$

Infatti: $\|u\| = \|u-v+v\| \underset{\text{triangolare}}{\leq} \|u+v\| + \|-v\|$

$$= \|u+v\| + \|v\|$$

$$\geq \|\alpha'(s)(t_i-t_{i-1})\| - \left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i} (\alpha'(t)-\alpha'(s))\, dt\right\|$$

$\downarrow$ Lemma

$$\geq (t_i-t_{i-1})\|\alpha'(s)\| - \underbrace{\int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\|\alpha'(t)-\alpha'(s)\|}_{|t-s|<\delta \;\Rightarrow\; < \frac{\varepsilon}{(b-a)}} dt}_{< \frac{\varepsilon}{(b-a)}(t_i-t_{i-1})}$$

$$> (t_i-t_{i-1})\|\alpha'(s)\| - (t_i-t_{i-1})\frac{\varepsilon}{(b-a)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\|\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})\|}{(t_i-t_{i-1})} > \|\alpha'(s)\| - \frac{\varepsilon}{(b-a)}$$

in $\Rightarrow$ integro su s

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\frac{\|\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})\|}{(t_i-t_{i-1})}}_{\text{non dipende da } s} ds > \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(s)\| ds - \frac{\varepsilon}{(b-a)} (t_i-t_{i-1})$$

$$\frac{\|\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})\|}{\cancel{(t_i-t_{i-1})}} \cdot \cancel{(t_i-t_{i-1})} > \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(s)\| ds - \frac{\varepsilon}{(b-a)} (t_i-t_{i-1})$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \|\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})\|}_{l(\alpha, P)} > \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(s)\| ds - \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon}{(b-a)} (t_i-t_{i-1})$$

$$l(\alpha, P) > \int_a^b \|\alpha'(s)\| ds - \frac{\varepsilon}{\cancel{(b-a)}} \cancel{(b-a)}$$

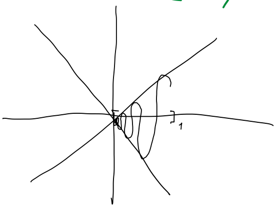
OSS.: L'ipotesi C^1 è essenziale, C^0 NON basta; $\exists$ curve C^0 non rettificabili

DO CARMO es. 9*, 1° capitolo

$\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$\alpha(t) = (t, t \sin \pi/t)$ se $t \neq 0$

$= (0,0)$ se $t = 0$

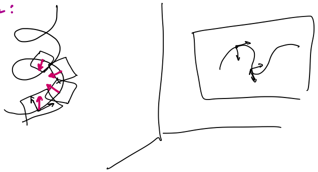


in $t=0$ non è differenziabile

Prossimo obiettivo: definire la

TORSIONE di una $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$

Idea:



Voglio studiare la variazione del piano generato da $T(s)$ e $n(s)$.

Def.: Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ supp. regolare e biregolare ; il piano vettoriale $\mathrm{Span}\,(T(s), n(s)) =: W_s$ si chiama **PIANO VETT. OSCULATORE**

Il piano affine passante per $\alpha(s) = p$ con giacitura W_p si chiama **PIANO OSC. AFFINE H_p**

Pb: Studiare la variazione di un piano vettoriale non è semplice.

Siccome un piano vettoriale è univocamente det. dalla direz. ortogonale, preferisco introdurre una famiglia di versori normali al piano.

Def.: Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ PLA regolare e biregolare

$$b(s) := T(s) \wedge n(s)$$

VERSORE BINORMALE ad α in s.

OSS. $\{T(s), n(s), b(s)\}$ risulta una BASE ORTONORMALE

si chiama **TRIEDRO DI FRENET**