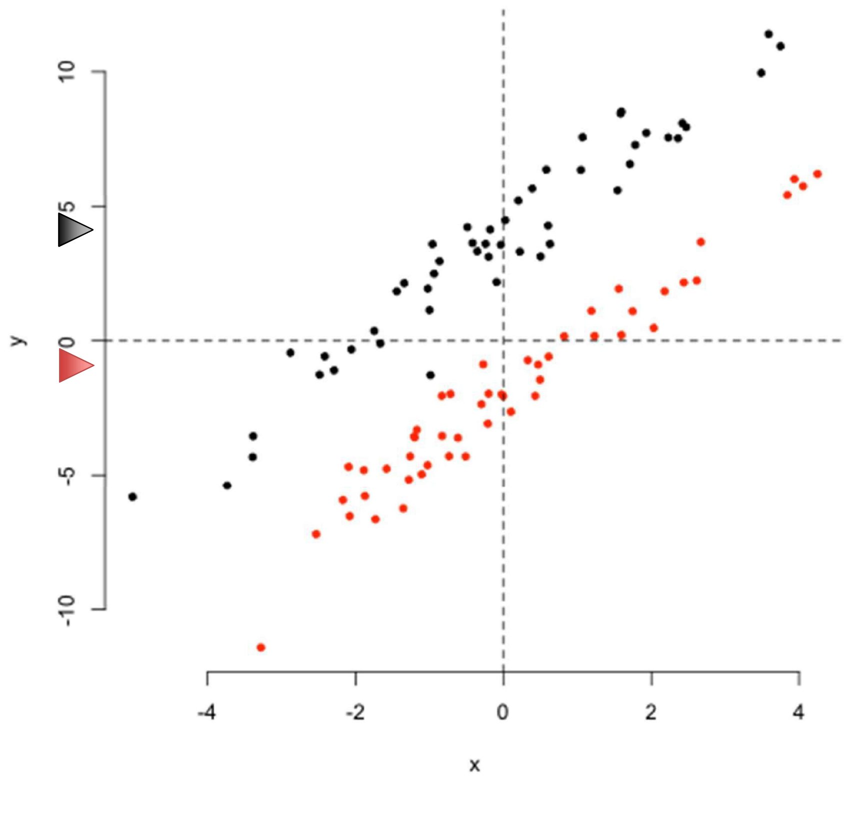
Rappresentazioni grafiche dei modelli di regressione lineare con interazione

Modelli Lineari Applicati
2025/26

(Lezione 2: Sommario ripasso)

Caso 1: due gruppi, differente media



MODELLO:

$$\hat{y}_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \gamma D_{1i}$$

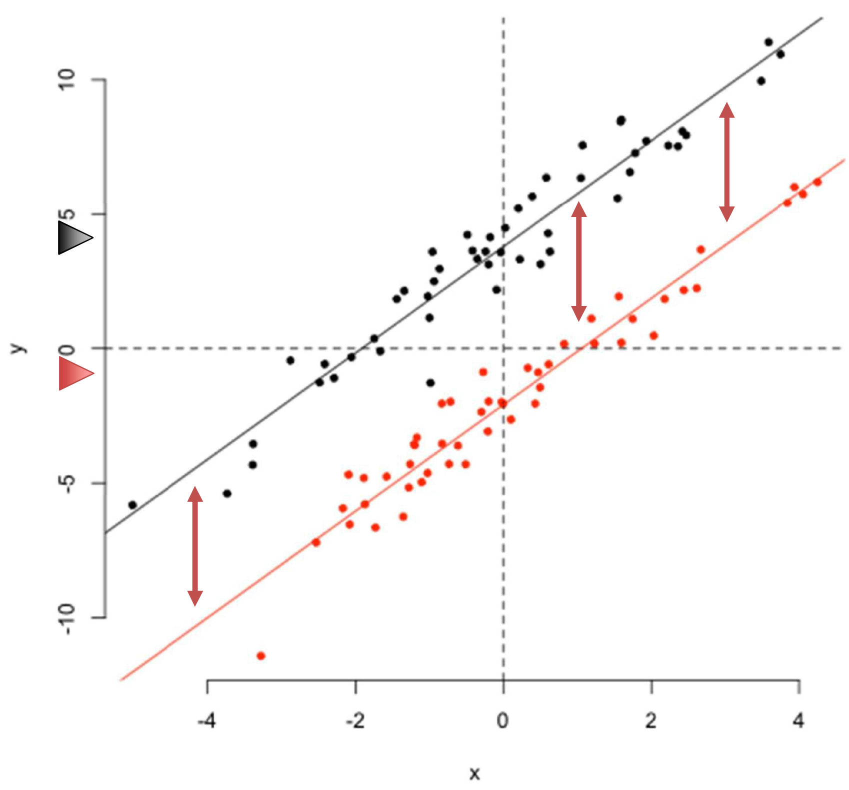
codifica dummy:

se y_i = MASCHIO, allora $D_{1i} = 0$

se y_i = FEMMINA, allora $D_{1i} = 1$

Matrice del modello:

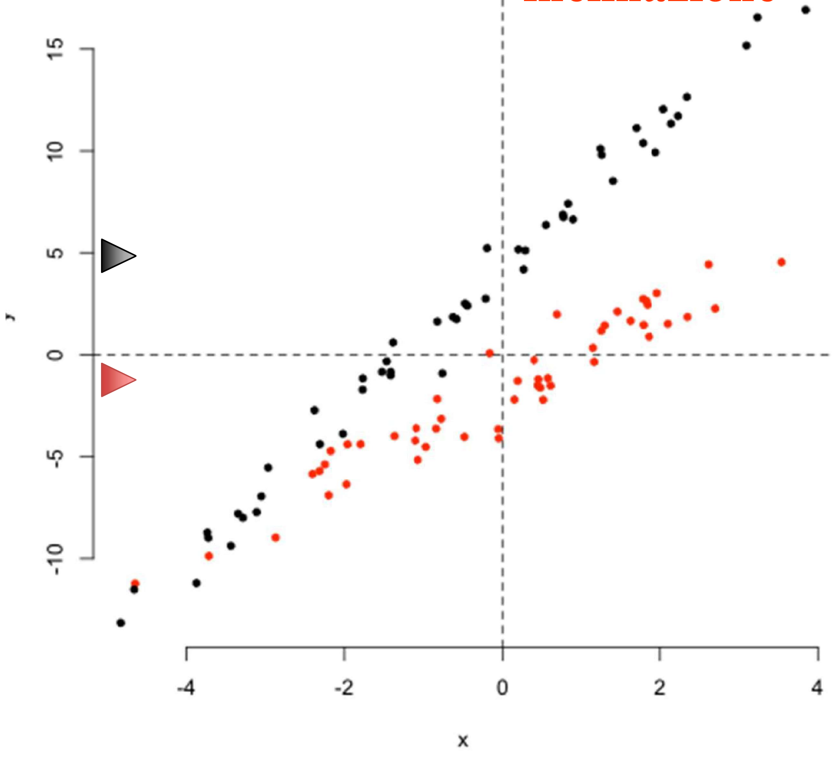
$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & 1 \\ 1 & x_{12} & 1 \\ 1 & x_{13} & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1n} & 0 \end{bmatrix}$$



$\hat{y}_i = (\alpha + \gamma) + \beta_1 x_{1i}$

$\hat{y}_i = \alpha + \beta_1 x_{1i}$

Caso 2: due gruppi, differente media e diversa inclinazione



MODELLO:

$\hat{y}_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \gamma D_{1i} + \beta_2 x_{1i} D_{1i}$

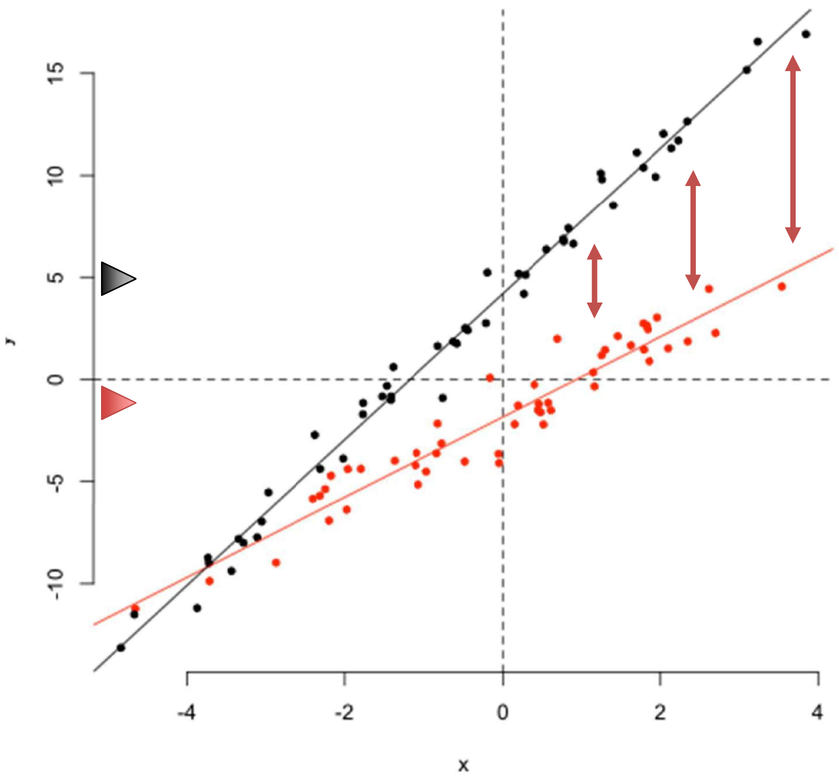
codifica dummy:

se y_i = MASCHIO, allora $D_{1i} = 0$

se y_i = FEMMINA, allora $D_{1i} = 1$

Matrice del modello:

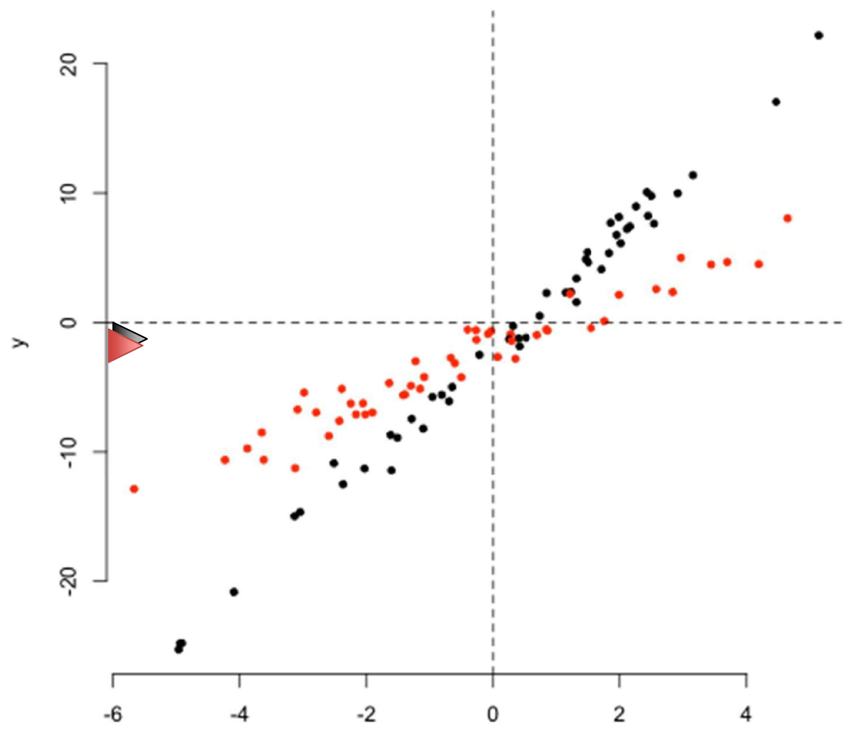
$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & 1 & x_{11}\cdot 1 \\ 1 & x_{12} & 1 & x_{12}\cdot 1 \\ 1 & x_{13} & 0 & x_{13}\cdot 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1n} & 0 & x_{1n}\cdot 0 \end{bmatrix}$$



$\hat{y}_i = (\alpha + \gamma) + (\beta_1 + \beta_2)x_{1i}$

$\hat{y}_i = \alpha + \beta_1 x_{1i}$

Caso 3: due gruppi, stessa media ma diversa inclinazione



MODELLO:

$\hat{y}_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{1i} D_{1i}$

$(\gamma = 0)$

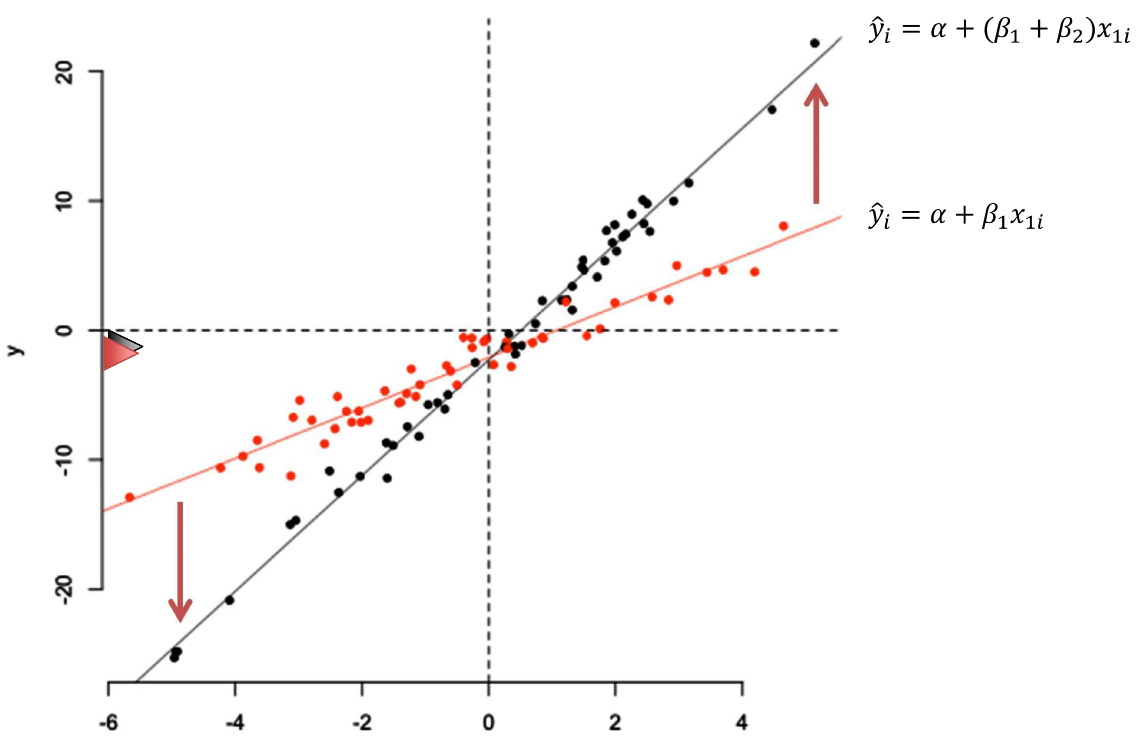
codifica dummy:

se y_i = MASCHIO, allora $D_{1i} = 0$

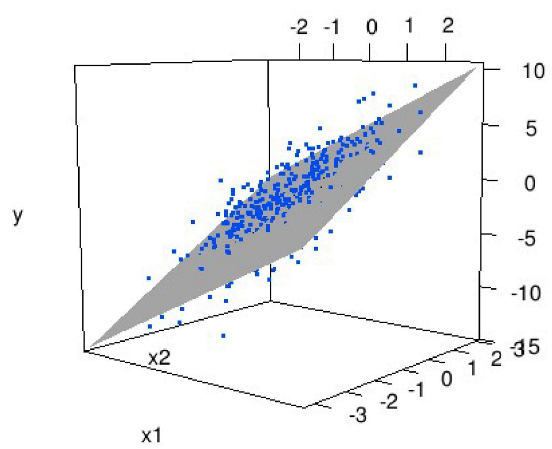
se y_i = FEMMINA, allora $D_{1i} = 1$

Matrice del modello:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{11} \cdot 1 \\ 1 & x_{12} & x_{12} \cdot 1 \\ 1 & x_{13} & x_{13} \cdot 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1n} & x_{1n} \cdot 0 \end{bmatrix}$$



Caso 4: piano con coefficienti β equivalenti



MODELLO:

$\hat{y}_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i};$

ipotizzando che i due effetti marginali siano uguali $(\beta_1 = \beta_2 = \beta)$, avremo:

$\hat{y}_i = \alpha + \beta x_{1i} + \beta x_{2i};$

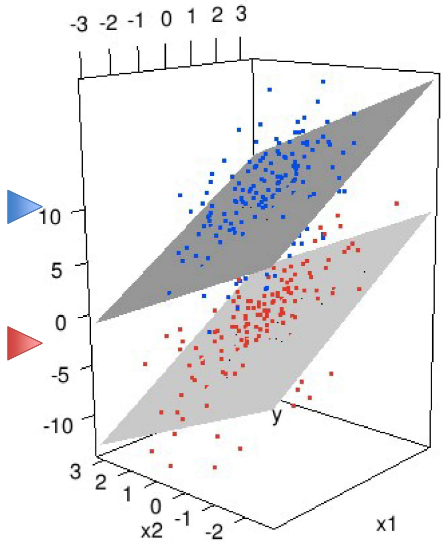
$\hat{y}_i = \alpha + \beta(x_{1i} + x_{2i});$

e la matrice del modello diventa:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} + x_{21} \\ 1 & x_{12} + x_{22} \\ 1 & x_{13} + x_{23} \\ \dots & \dots \\ 1 & x_{1n} + x_{2n} \end{bmatrix}$$

come nella regressione bivariata.

Caso 5: regressione lineare multipla, due gruppi, differente media



$\hat{y}_i = (\alpha + \gamma) + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i}$

$\hat{y}_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i}$

MODELLO :

$\hat{y}_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \gamma D_{1i}$

codifica dummy:

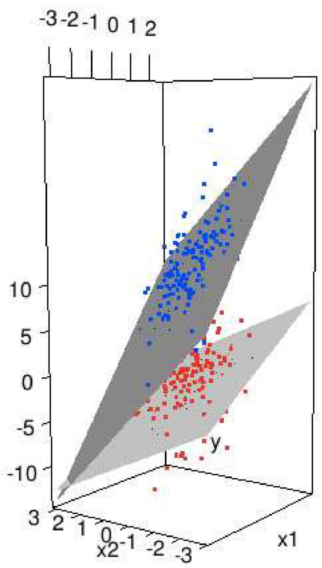
se y_i = MASCHIO, allora $D_{1i} = 0$

se y_i = FEMMINA, allora $D_{1i} = 1$

Matrice del modello:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & 1 \\ 1 & x_{12} & x_{22} & 1 \\ 1 & x_{13} & x_{23} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & 0 \end{bmatrix}$$

Caso 6: regressione lineare multipla, due gruppi, differente media e diversa inclinazione



$\hat{y}_i = (\alpha + \gamma) + (\beta_1 + \beta_3) x_{1i} + (\beta_2 + \beta_4) x_{2i}$

$\hat{y}_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i}$

MODELLO :

$\hat{y}_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \gamma D_{1i} + \beta_3 D_{1i} x_{1i} + \beta_4 D_{1i} x_{2i}$

codifica dummy:

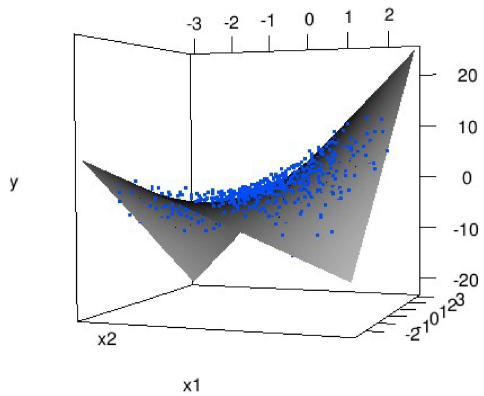
se y_i = MASCHIO, allora $D_{1i} = 0$

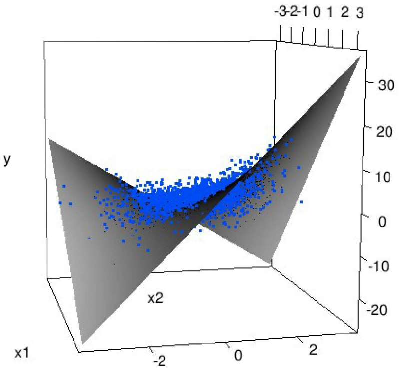
se y_i = FEMMINA, allora $D_{1i} = 1$

Matrice del modello:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & 1 & x_{11} \cdot 1 & x_{21} \cdot 1 \\ 1 & x_{12} & x_{22} & 1 & x_{12} \cdot 1 & x_{22} \cdot 1 \\ 1 & x_{13} & x_{23} & 0 & x_{13} \cdot 0 & x_{23} \cdot 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & 0 & x_{1n} \cdot 0 & x_{2n} \cdot 0 \end{bmatrix}$$

Caso 7: regressione lineare multipla, interazione tra variabili continue





MODELLO:

$\hat{y}_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{1i} x_{2i}$;

raggruppando

$\hat{y}_i = \alpha + (\beta_1 + \beta_3 x_{2i}) x_{1i} + \beta_2 x_{2i}$,

$\hat{y}_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + (\beta_2 + \beta_3 x_{1i}) x_{2i}$.

– Al variare di x_2 l'inclinazione del piano determinata da x_1 diventa: $(\beta_1 + \beta_3 x_2)$.

– Al variare di x_1 l'inclinazione del piano determinata da x_2 diventa: $(\beta_2 + \beta_3 x_1)$.

La matrice del modello diventa:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & x_{11} \cdot x_{21} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & x_{12} \cdot x_{22} \\ 1 & x_{13} & x_{23} & x_{13} \cdot x_{23} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & x_{1n} \cdot x_{2n} \end{bmatrix}$$

Compito 2

- Ripassare (studiare) la regola per calcolare le seguenti derivate (prime):

- $\frac{\Delta \exp(a)}{\Delta a} = ?$, $\frac{\Delta \ln(a)}{\Delta a} = ?$
- $\frac{\Delta ln(2b^3)}{\Delta b} = ?$ (Chain Rule)
- $\frac{\Delta \{ln(2b^3) \cdot \exp(b)\}}{\Delta b} = ?$ (Product Rule)