6 Funzioni

Una legge che ad ogni elemento di un insieme D detto *dominio* associa 1 elemento di un insieme C detto *codominio* si chiama *funzione* definita in D a valori in C:

$$f : D \to C$$

Ad ogni funzione daremo un nome, di solito di 1 lettera([42]), per esempio f oppure y oppure a, e la *variabile indipendente*, che varia nel dominio, la indicheremo con un nome qualsiasi, di solito di 1 lettera, per esempio scriveremo

$$f(x) := x^2$$

e poi sarà per esempio $f(2y) = 4y^2$, e $f(\alpha + 1) = \alpha^2 + 2\alpha + 1$ con variabili y e poi α, mentre la f è la funzione di prima.

Al di fuori della Matematica, per esempio in Chimica e soprattutto in Informatica, è normale dare alle funzioni nomi di più lettere, per esempio pH, `STIPENDIO`, `IVA_2024`.

Esempi di funzioni non da numeri a numeri:

$$f : \text{ essere umano } \mapsto \text{ suo codice fiscale (quello italiano)}$$

$$g : \text{codice fiscale} \mapsto \text{numero di acquisti eseguiti nella farmacia}$$

$$h : \text{codice fiscale} \mapsto \text{volume degli acquisti eseguiti nella farmacia}$$

6.1 Funzioni Numeriche

Le funzioni numeriche – in questa trattazione elementare – sono funzioni con dominio e codominio numerico: cioè a certi numeri associano certi numeri.

6.2 Passaggio a opposto, reciproco, e valore assoluto

6.2.1 Passaggio all'opposto

$a(x) := -x$ *passaggio all'opposto*, $x \mapsto -x$. (Definita da $\mathbb{Z}$ in poi). Questo meno non indica affatto negatività ma passaggio all'opposto, per esempio l'opposto di -3 è il positivo 3. (Si noti allora che $-x$ può essere positivo).
Da un punto di vista fisico, il tempo $-2\,h$ significa 2 ore *prima* del tempo 0 dell'inizio di un esperimento.

[42] Una funzione con nome di più lettere, anche con la variabile di più lettere, potrebbe per esempio essere $area(lato) = lato^2$, che dà l'area del quadrato in funzione del lato.

6.2.2 Passaggio al reciproco

$b(x) := \frac{1}{x}$ *passaggio al reciproco*, $x \mapsto \frac{1}{x}$. Notazione deprecabile: x^{-1}. Definita per i numeri diversi da 0 da $\mathbb{Q}$ in poi.

Figure	su WolframAlpha `Link->`	su WolframAlpha `Link->`

6.2.3 Valore assoluto

absolute value

`|x|` oppure `abs(x)` su WolframAlpha

in $\mathbb{R}$ si definisce la funzione

$$|x| := \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$

(Definibile in vari modi([43]) equivalenti. Si noti che potrebbe essere definita già in Z e Q).

6.2.4 Parte intera di un numero non negativo

floor function

La parte intera $\lfloor x \rfloor$ di $x \geq 0$ si ottiene da x togliendogli tutte le cifre decimali diverse da 0 se ne ha.
Un esempio chiarificatore di tutti i casi:

$$\lfloor \pi \rfloor = 3$$

`floor(Pi)` su WolframAlpha

[43] Ecco 4 modi in cui può essere definito il valore assoluto in $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{R}$:

$$|x| := \sqrt{x^2}$$

$$|x| := x\,\mathrm{sgn}(x)$$

$$|x| := \max\{x, -x\}$$

Definizione consigliabile:

$$|x| := \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$

La soprastante parentesi graffa (grande) è *"selettiva dei casi"*, ma quel simbolo ha anche altri usi affini.
In $I\!R$ il valore assoluto è una *funzione elementare*, mentre nell'algebra dei numeri può considerarsi *operazione unaria*.

(Abbiamo tolto le cifre decimali 1,4...).
Questa funzione viene applicata per esempio troncando le età agli “anni compiuti", per cui a 17 anni e 9 mesi ovvero 17.75 anni uno viene classificato come avente 17 *anni compiuti* (non 18, che sarebbe l’arrotondamento).
Una definizione analitica di $\lfloor x \rfloor$ esiste ma non è semplicissima.
Per i numeri negativi la parte intera è fonte di ambiguità fra i vari Autori e non ce ne occuperemo: la parte intera di $-\pi$ sarà -3 o -4?

6.2.5 Segno di un numero

Da $\mathbb{Z}$ in poi si può definire la funzione segno

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & se\ x < 0 \\ 0 & se\ x = 0 \\ 1 & se\ x > 0 \end{cases}$$

che normalmente però viene definita(44) in $\mathbb{R}$; per esempio è $\operatorname{sgn}(3-\pi) = -1$.

Valore assoluto e segno sono correlate dall’identità $x \equiv |x| \cdot \operatorname{sgn}(x)$.

Figure	su WolframAlpha Link->	su WolframAlpha Link->

6.3 Altri esempi di funzioni numeriche

Ecco alcuni esempi di funzioni definite in $\mathbb{R}$, o, volendo, suoi sottoinsiemi, e a valori in $\mathbb{R}$, definite con le 4 operazioni e altre:

$a(x) := (1-20\%)\,x = 0.8\,x$ scontare del 20% un prezzo x

$b(x) := (1+20\%)\,x = 1.2\,x$ aumentare del 20% un prezzo x

$f(x) := 3\,x$ triplicare, per esempio il dosaggio, o un prezzo

[44] Con qualche ambiguità: per alcuni non è definita in 0. In questa trattazione è definita in 0 e vi vale 0, che è lo standard ISO.

$g(x) := \frac{2}{3}x$ ridurre di un terzo ovvero del $33.\overline{3}\%$, $\approx 33.3\%$, per esempio un dosaggio, ovvero scontare un prezzo del 33% (circa)

$h(x) := \frac{x}{3}$ ridurre a un terzo ovvero al $33.\overline{3}\%$, $\approx 33.3\%$

$k(x) := \frac{4}{3}x$ aumentre di un terzo ovvero del $33.\overline{3}\%$, $\approx 33.3\%$

$m(x) := 2.4\,x$ portare al 240% del valore iniziale ovvero aumentare del 140%

$r(x) := x^3$ elevare alla terza ovvero al cubo

$s(x) :=\sqrt[3]{x}$ estrarre la radice terza ovvero cubica, che vedremo

$u(x) := \sqrt{x}$ estrarre la radice quadrata, dom$u$: $x \geq 0$

> Vedendo la difficoltà che hanno alcuni nel distinguere espressioni come *ridurre di un terzo* e *ridurre a un terzo* ci vorrebbe forse molta cautela nell'usarle per descrivere una variazione di posologia farmacologica (N.d.S.)

Ma pensateci bene: preferireste
che una multa venga ridotta *di* un decimo, o
che venga ridotta *a* un decimo?

6.4 Immagine, controimmagine, composta

In questo paragrafo consideriamo sia funzioni numeriche che funzioni non numeriche.

Si definiscono 2 insiemi e 1 funzione:

- $\mathrm{im}f := \{f(x) \in \mathrm{codom}f | x \in \mathrm{dom}f\}$ immagine di f

- $f^{-1}(E) := \{x \in \mathrm{dom}f | f(x) \in E\}$ controimmagine di un sottoinsieme E di $\mathrm{codom}f$ (ma attenzione alla simbologia del $^{-1}$)

- $f(g(x))$ la funzione composta: si "f-izza" la "g-izzazione" degli elementi, per esempio con $a(t) := t^2$ e $b(t) := t + 1$ si ha

$$a(b(t)) = (t+1)^2 \qquad b(a(t)) = t^2 + 1$$

6.5 Funzione iniettiva, suriettiva, biiettiva, inversa

In questo paragrafo consideriamo sia funzioni numeriche che funzioni non numeriche.

Funzione **iniettiva**: "mai 2 vanno in 1". Per esempio il codice fiscale, o il codice cliente della tessera di fidelizzazione di una farmacia.
Tornando a funzioni numeriche, per esempio x^3 e 2^x ma non x^2 intesa come funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (che è il modo naturale di considerarla).

Figure	su WolframAlpha `Link->`	su WolframAlpha `Link->`

Funzione **suriettiva**: "riempie il codominio". Per esempio x^3 ma non x^2 nè 2^x intese come funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (che è il modo naturale di considerarle).

Figure	su WolframAlpha `Link->`	su WolframAlpha `Link->`

Funzione ***biiettiva***: iniettiva *et* suriettiva. Per esempio x^3 ma non x^2 nè 2^x intese come funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (che è il modo naturale di considerarle).

Figure	su WolframAlpha Link->	su WolframAlpha Link->

La funzione biiettiva dà luogo in modo ovvio alla *funzione inversa*. Per esempio $\sqrt[3]{x}$ è la funzione inversa di x^3. E viceversa.

Figure	su WolframAlpha Link->

Una funzione

$$f : D \to C$$

biunivoca si può vedere anche come *relazione* fra dominio e codominio e in quel senso si chiama ***corrispondenza biunivoca***

$$D \xleftrightarrow{f} C$$

Due insiemi in corrispondenza biunivoca fra loro possono venire identificati a livello astratto.
Esempi:

una la retta orientata $\leftrightarrow$ i numeri reali cioè $\mathbb{R}$
il piano cartesiano $\leftrightarrow$ le coppie di numeri reali ovvero $\mathbb{R}^2$
i 5034 clienti di una certa farmacia $\leftrightarrow$ i numeri di $\{1, 2, 3, ..., 5034\}$
i 26 532 prodotti in vendita $\leftrightarrow$ le stringhe COD00001,...,COD26532

6.6 Crescenza e decrescenza delle funzioni numeriche

Crescenza (globale) e decrescenza (globale) su intervalli, eventualmente sull'intero dominio di una funzione.
Ci sono 4 casi di cui più importanti il 1° e il 3°.

1) se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ allora f si dice crescente.
Esempi: x^3, arctan, lg, ln, exp, $\sqrt{x}$. Anche x^2 per $x \geq 0$.
"A valore minore fa corrispondere valore minore"

Il grafico non può avere tratti orizzontali: solo sale.

2) se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ allora f si dice non decrescente, o crescente in senso debole (ma alcuni Autori la dicono crescente).
"A valore minore fa corrispondere valore minore o uguale"
Il grafico può avere tratti orizzontali.
Esempio epidemiologico: il numero cumulativo ovvero totale di morti di un'epidemia: di giorno in giorno (si tratta di una successione x_1, x_2... essendo x_1 il numero di morti nel primo giorno dell'epidemia) cresce oppure rimane uguale al giorno precedente, non può decrescere. (Può decrescere il numero di morti giornaliero, ma non il numero di morti cumulativo).
Esempio matematico: $\lfloor x \rfloor$, parte intera di x.

3) se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ allora f si dice decrescente.

Esempio: e^{-x}. Anche $\frac{1}{x}$ per $x > 0$. Anche x^2 per $x \leq 0$.
"A valore minore fa corrispondere valore maggiore"
Il grafico non può avere tratti orizzontali: solo scende.

4) se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ allora f si dice non crescente, o decrescente in senso debole (ma alcuni Autori la dicono decrescente).
Esempio: $-\lfloor x \rfloor$
"A valore minore fa corrispondere valore maggiore o uguale"
Il grafico può avere tratti orizzontali.

Nota 1. x^2, $\sin x$ e $\cos x$ non ricadono in alcuna delle 4 categorie.

Teoremi (ovvi)

Crescente su intervallo $\Rightarrow$ iniettiva.

Decrescente su intervallo $\Rightarrow$ iniettiva.

Nota 2. Esiste anche un'altro tipo di crescenza e decrescenza: quella puntuale (invece che sugli intervalli). Essa corrisponde alla crescenza o decrescenza (della funzione rappresentativa) della retta tangente al grafico, questione che vedremo in seguito.

6.7 Ambiguità notazionale dell'esponente -1

😕

Una delle pù gravi ambiguità notazionali è quella dell'esponente -1***, che ha sostanzialmente 3 significati: reciproco, inversa, controimmagine. Attenzione!***

Certamente

$$a^{-1}$$

indica inequivocabilmente il reciproco $\frac{1}{a}$ di a se a è un numero, ma se è una funzione – e può ben esserlo – cominciano problemi:

$$f^{-1}(x)$$

in questa trattazione significherà sempre l'inversa di $f(x)$ mentre la reciproca la denoteremo $\frac{1}{f(x)}$ e casomai, volendoci del male, $(f(x))^{-1}$. Il problema maggiore si ha quando – e concretamente ciò viene fatto spesso – in lunghi calcoli per brevità di scrittura si omette di indicare la variabile indipendente, e si scrive f intendendo $f(x)$, lasciando nell'incertezza riguardo la scrittura f^{-1}. Così all'atto pratico ci si ritrova sempre con qualcuno che pensa che l'arcotangente sia il reciproco della tangente, o il logaritmo il reciproco dell'esponenziale (invece è l'inversa).
Resta il fatto che in un testo diverso da questo, la scrittura

$$\ln^{-1}(x)$$

è ambigua, e può indicare sia $\exp(x)$ che $\frac{1}{\ln(x)}$. In questo testo solo $\exp(x)$, che è l'inversa del logaritmo.

Inoltre, l'esponente -1 è usato per indicare anche tutta un'altra cosa, la controimmagine, che non è un elemento ma un insieme.

6.8 Ambiguità notazionali della parentesi graffa grande

La parentesi graffa grande viene usata con almeno 3 diversi significati.

Li illustreremo con 3 esempi.
Sempre c'è un *et* "retrostante", ma non in modo immediato.

Parentesi graffa (grande) *dei sistemi*, con significato puro e semplice di *et*:

$$\begin{cases} x^2 > 9 \\ x + 1 < 0 \end{cases}$$

Parentesi graffa (grande) *"selettiva dei casi"*:

$$|x| := \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$

Parentesi graffa (grande) *"onnicomprensiva dei casi"*:

$$\cos(2x) = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 2\cos^2 x - 1 \\ 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$$

(Nell'esempio sono affermate con scrittura compatta 3 uguaglianze).

6.9 Funzioni definite per numeri naturali: le successioni

Per la variabile indipendente spesso useremo i nomi n, m, h, k se il dominio è un insieme di numeri interi, per esempio $\mathbb{N}$. In questo caso potremmo dare a tali funzioni nomi $y(n)$ o $a(n)$ ma più spesso useremo le notazioni y_n, a_n e in ogni caso le funzioni definite su $\mathbb{N}$ (o anche su una sua semiretta e cioè per $n \geq n_0$) le chiameremo ***successioni***.

Una successione (definita[45] *analiticamente*) già vista (in 5.5) è quella dei fattoriali:

$$1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040\ldots$$

[45] Per ogni $n \in I\!N$, si dice *fattoriale* di n e si indica con $n!$ il numero $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ se $n > 0$ e 1 se $n = 0$.

Figura | su WolframAlpha Link->

e si noterà che

si passa da 1 a 2 moltiplicando per 2

si passa da 2 a 6 moltiplicando per 3

si passa da 6 a 24 moltiplicando per 4

e così via:

$$n! := \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n & se \quad n > 0 \\ 1 & se \quad n = 0 \end{cases}$$

ovvero, per ricorrenza, $a_0 := 1$, $a_n := n\, a_{n-1}$ per $n > 0$.

Un'infinità di dati epidemiologici si possono inquadrare come successioni (definite *empiricamente)*, con l'indice che è l'anno, per esempio da 1862 in poi e teoricamente estendibile all'infinito almeno nell'immaginazione, e i valori a rappresentare il numero di nati, di morti, la mortalità infantile, e quant'altro:

$x_{1862} = \ldots$

$x_{1863} = \ldots$

$\ldots$

Esempio 1. Morti in Italia:

Per esempio $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$; e $11! = 39^{\cdot}916^{\cdot}800$.

Esistono estensioni della definizione ai numeri reali e perfino ai numeri complessi mediante la funzione Gamma:

$$z! := \Gamma(z-1)\,, \quad z \neq -1, -2, -3, \ldots$$

Valgono le approssimazioni di Stirling

$$x! \sim \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

e con maggiore precisione

$$x! \sim \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(1 + \frac{1}{12x}\right)$$

per i numeri interi o reali, purché sufficientemente grandi – diciamo maggiori di 8 per avere un'approssimazione all'1% per la prima e maggiori di 1 per avere un'approssimazione all'1 per mille per la seconda.

Si è usato il simbolo $\sim$ invece di $\approx$ perché sono approssimazioni asintotiche – questione sottile.

2011	609 000
2012	625 000
2013	611 000
2014	609 000
2015	656 000
2016	627 000
2017	660 000
2018	641 000
2019	645 000
2020	746 000
2021	709 000

Esempio 2. Morti di morbillo in Inghilterra e Galles:

https://www.gov.uk/government/publications/measles-deaths-by-age-gro measles-notifications-and-deaths-in-england-and-wales-1940-to-2013

Oltre alla successione x_{2011}, x_{2014},... (di fatto inevitabilmente troncata) del numero di morti, molto interessante sarebbe rappresentare anche la successione derivata degli incrementi – eventualmente negativi e cioè di fatto diminuzioni – annuali:

$$z_n := x_n - x_{n-1}$$

Spesso in Medicina una tale differenza viene denotata con Δ, per esempio nell'andamento di un qualche parametro di un'epidemia. Δ 24h può indicare l'incremento (eventualmente negativo)

$x_{oggi} - x_{ieri}$.

Spesso sia a livello di rappresentazione grafica che a livello teorico, la successione viene sostituita con una (funzione) interpolante: detto semplificatamente, si "congiungono i puntini" ottenendo una funzione definita su una semiretta di $\mathbb{R}$ invece che su una semiretta di $\mathbb{N}$. (O su un intervallo di $\mathbb{R}$ invece che di $\mathbb{N}$).

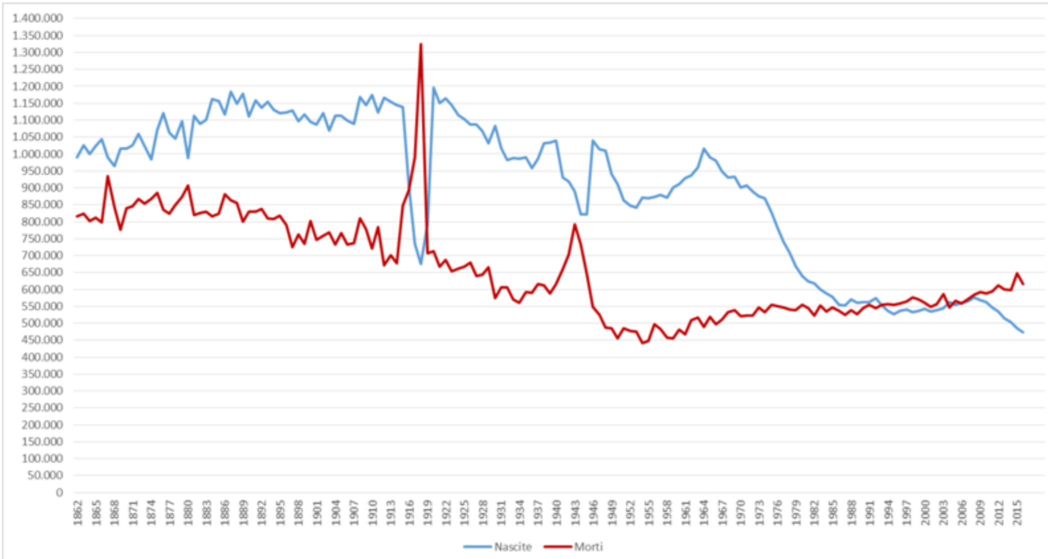


Figure 4: Nascite (blu) e morti (rosso) in Italia tra il 1862 e il 2016. Da https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Nascite_e_morti_in_Italia,_1862_-_2016.png

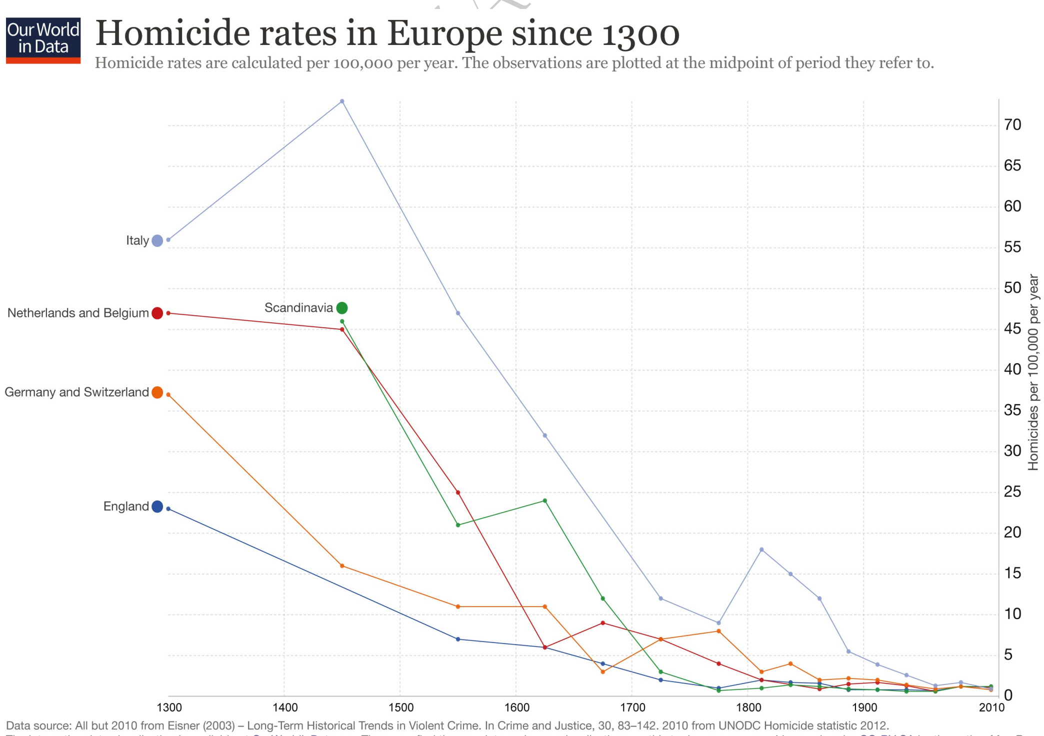


Figure 5: Congetturato tasso di omicidi negli ultimi 7 secoli.

6.10 La successione di Fibonacci

La successione di Fibonacci inizia con 0, 1... oppure con 1, 1... e poi ogni termine è somma dei 2 precedenti:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55... \text{ oppure} \tag{11}$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55... \tag{12}$$

Essa è in qualche modo correlata al tipo di ampliamento di una popolazione di organismi – fu studiata da Fibonacci nel medioevo per modellizzare l'accrescimento di una popolazione di conigli – ovvero anche all'espansione di un'epidemia nella fase iniziale.

Figura | su WolframAlpha `Link->`

È di solito definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 := 0 \\ a_1 := 1 \\ a_n := a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n = 2, 3, ... \end{cases}$$

Poco nota e meno rilevante questa sua definizione in forma chiusa, non ricorrente:

$$\begin{cases} a_n := \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}} \\ n = 0, 1, 2... \end{cases}$$

con la sezione aurea $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

Sia che la si faccia iniziare con 0 come in (11) sia con 1 come in (12) il primo termine può avere indice 0, oppure 1.

WolframAlpha considera la successione iniziante da 0 e al primo termine dà indice 0, e dà:

0 per `Fibonacci[0]` e lo chiama F_0
1 per `Fibonacci[1]` e lo chiama F_1
1 per `Fibonacci[2]` e lo chiama F_2
2 per `Fibonacci[3]` e lo chiama F_3

6.11 Complementi – Fibonacci e Legge di Stigler

Leggiamo (19 settembre 2023) in
https://it.wikipedia.org/wiki/Legge_dell%27eponimia_di_Stigler:

> La legge dell'eponimia di Stigler descrive alcuni aspetti del processo di scoperta scientifica e, in forma estremamente concisa e semplificata, afferma:

«A una scoperta scientifica non si dà mai il nome del suo autore»

> (...) La stessa legge di Stigler è un esempio della propria tesi: la sua scoperta è infatti attribuita da Stigler a Robert Merton.

La successione di Fibonacci fu descritta (iniziando da 1 e 2) dall'Italiano Fibonacci nel 1202 e da lui prende il nome, però era stata descritta mezzo secolo prima dall'indiano d'India Hemachandra e in effetti, nella sostanza, circa un millennio e mezzo prima (con enorme incertezza sui tempi) da un altro indiano d'India, Pingala (che sostanzialmente fu l'inventore anche del sistema di numerazione binario).

> Hemachandra also comments (...) 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 and in this way, afterwards([46])
>
> (LINK ->)

La successione era comparsa nell'ambito del calcolo combinatorio applicato alla poesia (!) e precisamente alla metrica, nell'alternarsi delle sillabe lunghe e brevi, in sanscrito: tutt'altro che la demografia dei conigli di Fibonacci. D'altra parte, questa interessante successione ricorre in vari altri ambiti.

[46] Parmanand Singh, The so-called fibonacci numbers in ancient and medieval India, Historia Mathematica, Volume 12, Issue 3, 1985, Pages 229-244, ISSN 0315-0860, https://doi.org/10.1016/0315-0860(85)90021-7. (https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0315086085900217)

6.12 ESERCIZI SULLA LEZIONE 6

6.12.1 Esercizio risolto – Successione di Fibonacci

$_{\mu 2024}$ $*$ Si scrivano i primi termini della successione di Fibonacci, da $a_0 = 1$ ad $a_{11} = 144$:

1 1 2 ... 144

Calcolare

$$\frac{a_{11}}{a_{10}}$$

A quale notissima costante matematica si avvicina molto?

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard del punto decimale, a scelta).

I primi 12 termini della successione di Fibonacci, da $a_0 = 1$ ad $a_{11} = 144$, sono, e li scriviamo come richiesto nel quesito,

<u>1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144</u>

allora $a_{10} = 89$ e allora

$$\frac{a_{11}}{a_{10}} = \frac{144}{89} \approx 1{,}617\,98$$

vicinissima a questa notissima costante matematica:

$$\boxed{\text{sezione aurea}}$$

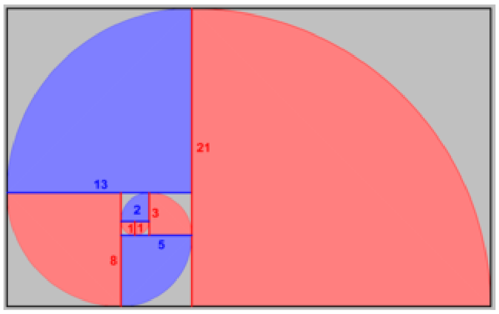
che notoriamente vale circa 1,618 e più precisamente

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618\,03$$

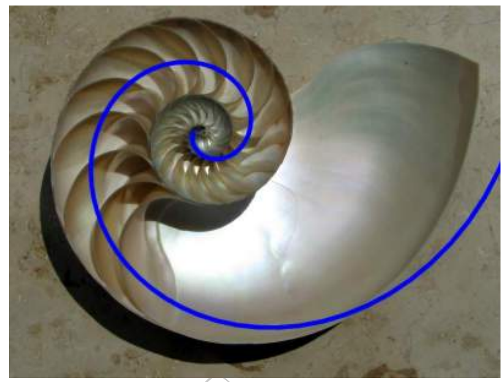
Nota. Il rapporto fra un termine della successione di Fibonacci e il precedente tende, nel senso del limite, esattamente alla sezione aurea φ.

Già $\frac{a_{11}}{a_{10}}$ è molto vicino, come abbiamo sopra visto.

6.12.2 Aneddoti spiraleggianti



Approssimazione di spirale logaritmica,
che è connessa alla successione
di Fibonacci e alla sezione aurea.
By Mabit1 in Wikimedia Commons.



Un vero nautilus con un
vera spirale logaritmica.
NautilusCutawayLogarithmicSpiral.jpg:
Chris 73derivative work: Akkana Peck,
CC BY-SA 3.0 via Wikimedia Commons

La successione di Fibonacci compare per esempio nella *spirale logaritmica*,

> indagata estesamente da Jakob Bernoulli, che la definì spira mirabilis,
> “la spirale meravigliosa", e ne volle una incisa sulla sua lapide

Ma sulla sua pietra tombale fu malamente incisa una banale spirale archimedea, la spirale “infantile" degli scarabocchi.

Lapide di Bernoulli con spirale archimedea, con motto
CAMBIATA RISORGO LA STESSA
riferito però alla spirale logaritmica,
errore *post mortem.*