7 Ripasso di Algebra – I parte

Nel suo progredire nel tempo e approfondirsi, in linea molto generale possiamo dire che ogni Scienza Applicata attraversa successivamente queste fasi:

qualitativa	"bollisci *un po'* di semi per *un po'*"
numeri	"bollisci 12 semi per 1 tazza d'acqua"
operazioni (numeriche)	"50 kg × 3 mg/kg/die = 150 mg/die"
funzioni (numeriche)	"height(cm)=age(yr)×6.5 + 76(cm)" (*)
analisi statistica dei dati	(che vedremo molto più avanti)

(*) La formula sull'altezza si riferisce a bambini cinesi di 2-10 anni in https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/19573410/).

Vogliamo qua occuparci delle operazioni sui numeri, per esempio a/b, che potrebbe dare la *densità* se a è una massa e b un volume, e che diventa una funzione $f_1(a)$ o $f_2(b)$ se a o rispettivamente b è considerato variabile. (E addirittura una funzione $f_3(a, b)$ di 2 variabili se sono considerati variabili sia a che b, caso di cui ora non ci occuperemo).

7.1 Operazioni unarie (interne) dell'algebra dei numeri

Nei numeri non considereremo operazioni unarie, considerandole funzioni, ma certi software lo fanno.

Le operazioni unarie dell'algebra dei numeri a un numero associano un numero e allora sono funzioni numeriche, e in questa trattazione verranno in generale considerate appunto funzioni e non operazioni unarie, però certi software alcune le considerano operazioni unarie. Le più tipiche sono il passaggio all'opposto, il passaggio al reciproco, il valore assoluto, la radice quadrata e il fattoriale:

$$-x \qquad \frac{1}{x} \qquad |x| \qquad \sqrt{x} \qquad n!$$

7.2 Operazioni binarie (interne) dell'algebra dei numeri

Le *operazioni binarie* da 2 *operandi* producono 1 *risultato*.
Adesso ne considereremo 5, massimamente classiche:
  addizione ovvero somma

sottrazione
moltiplicazione ovvero prodotto
divisione
elevamento a potenza.
Tutte hanno un'infinità di ricorrenze nelle Scienze Applicate. (Un solo esempio: la *densità*, definita con una divisione: massa/volume).

(1) $a+b$, somma, scritto col + e anche col simbolo di sommatoria $\sum$: dati dei numeri a_3, a_4, a_5, la somma

$$a_3 + a_4 + a_5 \quad \text{la scriveremo anche} \quad \sum_{k=3}^{5} a_k$$

e i numeri 3 e 5 possono essere sostituiti da qualsiasi altri, e così pure l'*indice di sommatoria* k e il nome a_k della *variabile indiciata*: una forma comoda per rappresentare somme di molte variabili indiciate: $\sum_{i=n}^{m} x_i$. Per esempio

`ricavoAnnuo=` $\sum_{n=1}^{365}$ `ricavoGiornaliero(n)`

(2) $a - b$, differenza. Che funziona come sommare l'opposto, in Matematica, ma nelle Scienze Applicate è meglio considerare la sottrazione come un'operaziona e sè stante.
Si faccia attenzione che in $a - b - c$ si deve calcolare prima $a - b$.

(3) $a\,b$ ovvero $a \cdot b$; sulle calcolatrici e nei linguaggi informatici anche `*` ; lo standard ISO ammette anche la scrittura $a \times b$, che però espone alla confusione con la variabile x. 😕

😕 **Ambiguità.** La notazione $a\,b$ purtroppo dà luogo ad un'ambiguità di scrittura: $y\,(x+1)$ denota sia una funzione y calcolata in $x+1$ che $y \cdot (x+1)$: perciò noi cercheremo di scrivere scrivere, nel caso del prodotto, $(x+1)\,y$ oppure $y \cdot (x+1)$. Inoltre la scrittura $a\,b$ può essere equivocata con una quantità di nome $a\,b$, di 2 lettere, cosa che in questa trattazione succederà raramente, ma nelle Scienze Applicate è normale usare nomi di più lettere. (Si pensi per esempio al pH della Chimica).

(4) $\frac{a}{b}$ ovvero a/b ovvero $a : b$ ovvero $\div$

(5) a^b, sulla calcolatrici a^b (in certa Informatica anche `a**b`).

😕 **Ambiguità.** In ambito medico e farmaceutico, talvolta per indicare la potenza
non essendo disponibile la scrittura a^b
non essendo disponibile il simbolo ^
non conoscendo il simbolo informatico $**$ per l'elevamento a potenza
si tralascia tutto (!) e si lascia all'intuito del lettore l'intelligenza delle formule.
Per esempio la formula (di Mosteller) che approssima l'area della superficie corporea (usata per il dosaggio dei chemioterapici) da peso W e altezza H

$$\frac{1}{6}(W \cdot H)^{0.5} \qquad \textit{ovvero } \tfrac{1}{6}\sqrt{W \cdot H}$$

si trova trascritta sul sito governativo statunitense PubMed, che riporta l'abstract di un articolo scientifico, in questo modo:

1/6(WH)0.5 `LINK->`

(e si noti anche l'(1/6) riportato senza parentesi, con seria ambiguità).
Altro esempio, con 2 esponenti, a questo `LINK->`

😕 **Ambiguità.** Un numero tipograficamente ad esponente non sempre indica una potenza.
Per esempio x^0 può denotare sia la variabile x elevata alla 0 sia una variabile di nome proprio x^0.
Così per esempio nel documento sul prezzo equo delle risme di carta (nelle strutture pubbliche, compresi gli ospedali) all'indirizzo `https://www.anticorruzione.it/portal/rest/jcr/repository/collaboration/Digital%20Assets/anacdocs/Attivita/Atti/Delibere/2019/2_Allegato_A_aggiornamento%20carta_2019.pdf` nella formula $P^{2019}_{ref} = P^{2018}_{ref} * 1.03448$ ovviamente 2018 e 2019 fanno parte dei nomi delle variabili, non indicano potenze.

7.3 Salto dell'uguale di tipo additivo

Icasticamente e come se fossimo a un teatro di burattini:

Qualunque funzione può fare il "salto dell'uguale" cambiando segno
e
da sommata a destra diventa sottratta a sinistra,
da sommata a sinistra diventa sottratta a destra,
da sottratta a destra diventa sommata a sinistra,
da sottratta a sinistra diventa sommata a destra.
Molto chiaramente indicheremo tutto ciò con la scrittura

$$\Big/ + \ldots$$

per esempio

$$x^2 + 6 = 5\,x \quad \Big/ + (-5\,x) \text{ o più sveltamente } -5\,x$$

$$x^2 - 5\,x + 6 = 0$$

Più tecnicamente: l'equazione, cioè uguaglianza comprendente un'incognita,

$$f(x) = g(x) \qquad \text{per esempio } x^2 + 6 = 5\,x$$

è equivalente (cioè ha le stesse soluzioni) a

$$f(x) + s(x) = g(x) + s(x) \qquad \text{per esempio } x^2 - 5\,x + 6 = 0$$

7.4 Salto dell'uguale di tipo moltiplicativo

Similmente al paragrafo precedente avviene con un moltiplicando, che facendo il "salto dell'uguale" diventa divisore, e viceversa, per esempio nella

$$7\,x = 14$$

il moltiplicando 7 a sinistra diventa divisore a destra

$$x = \frac{14}{7}$$

$$x = 2$$

ovvero con più completa scrittura

$$7\,x = 14 \quad \Big/ :7$$

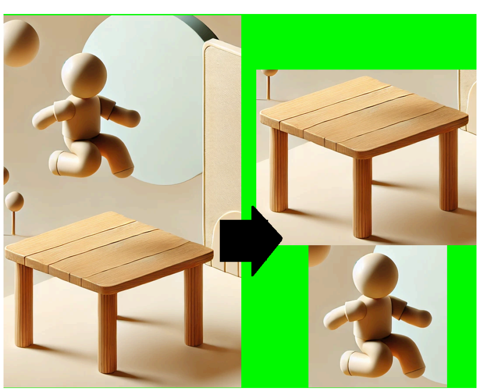
eccetera come sopra.
E nella

$$1 = \frac{3}{x}$$

il divisore x diventa moltiplicando (dell'1) trovandosi

$$x = 3$$

(cioè abbiamo fatto $\Big/ \cdot x$ richiedendo ovviamente $x \neq 0$).



7.5 Horribilia: frazioni miste

😕 Si faccia attenzione all'ambiguità della "frazione mista" o "numero misto" che si usa per esempio per i voti scolastici, come

$$7\frac{1}{2}$$

Il valore è $7 + \frac{1}{2}$ e cioè 7.5, non $7 \cdot \frac{1}{2}$ cioè 3.5. Cerchiamo di evitare come la peste tali frazioni miste. Ma potremo trovarle su questionari dove i pazienti valutano $7\frac{1}{2}$ il loro stato di salute (o la soddisfazione del servizio della farmacia), e allora nella raccolta dati trascriveremo sul computer `7.5`. (Non certo `7(1/2)` che manderebbe in errore molti software e da WolframAlpha verrebbe interpretato come `7*(1/2)` invece che `7+(1/2)`).

7.6 Horribilia: scrittura del marketing

😕 Si faccia attenzione alla scrittura *del marketing* 3×2 che non ha nulla a che vedere con la moltiplicazione e rappresenta uno *sconto*, precisamente $m \times n$ significa che di m prodotti non ne pagheremo $m - n$ e allora lo sconto percentuale è

$$sconto = 100 \cdot \frac{m - n}{m}\,\%$$

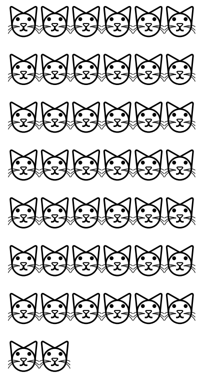
> **Esempio**$_{\mu}$ Una farmacia vende confezioni di filo interdentale in offerta 4×3: calcoliamo lo sconto.
> 1 su 4 confezioni non viene pagata e allora lo sconto è $\frac{1}{4}$ cioè 25%.

7.7 La divisione è variamente definita

La divisione presenta qualche problematica:
44 diviso 6
  fa $7.\overline{3} \approx 7.333$ in $\mathbb{R}$,
  fa $\frac{44}{6}$ ovvero meglio $\frac{22}{3}$ in $\mathbb{Q}$,
  fa *7 col resto di 2* in $\mathbb{Z}$, come ora approfondiremo.

7.8 Divisione euclidea in Z

Come ci ricorda la canzoncina *Quarantaquattro gatti*,



che si disponevano *in fila per 6*, ma *col resto di 2*, è $44 = 6 \cdot 7 + 2$.(47) Diremo a il *dividendo* e b il *divisore*. Scriviamo per massima chiarezza:

$$dividendo = divisore \times quoziente + resto \quad 0 \le resto < |divisore|.$$(48)

ESERCIZIO$_\mu$ Una scatola di pillole ha 4 blister di 6×4 pillole. Dopo averne consumate 7 al giorno, ad un certo punto non gliene restano più così tante: quante precisamente?

Le pillole sono in tutto $4 \cdot 6 \cdot 4 = 96$. Con la calcolatrice (o a mano) troviamo

$$96/7 = 13.7...$$

e allora la persona ha consumato 7 pillole al giorno per 13 giorni, in tutto $13 \cdot 7 = 91$. Allora restano alla fine $96 - 91$ cioè 5 pillole.
Con WolframAlpha `Remainder[4*6*4,7]`

---

47 Più in generale, come leggiamo in Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Divisione euclidea*

> Dati due numero interi a e b con $b \neq 0$ esiste un'unica coppia di interi q ed r detti *quoziente* e *resto* tali che
> $a = b \times q + r$
> $0 \le r < |b|$

48 Si noti che il resto è minore del divisore in valore assoluto, ma non necessariamente del quoziente in valore assoluto, per esempio $11 = 4 * 2 + 3$ (ed effettivamente il resto 3 è minore del divisore 4, ma non del quoziente 2), e stiamo dividendo 11 per 4, mentre se dividiamo 11 per 2 abbiamo $11 = 2 * 5 + 1$ (ed effettivamente il resto 1 è minore del divisore 2).
(Si noti ancora che tutto ciò vale anche con numeri negativi, per esempio -21 diviso 9 dà quoziente -3 e resto 6, cioè $-21 = 9 \cdot (-3) + 6$, come troviamo subito online con WolframAlpha con `Quotient[-21,9]` e `Remainder[-21,9]`).

7.9 Proprietà delle 4 operazioni

Con *le 4 operazioni* si intendono + − × /.

Il + e il · sono[49] commutativi e associativi:

$$x + y = y + x \qquad x\, y = y\, x$$

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \text{che scriveremo di solito } x + y + z$$

$$(x\, y)\, z = x\, (y\, z) \quad \text{che scriveremo di solito } x\, y\, z$$

(Come detto, le parentesi indicano precedenze nel calcolo).

Il − non è commutativo: per esempio 6-2 fa 4 ma 2-6 fa -4.
E non è neanche associativo; ovvio ma meglio dirlo:

$$11 - 6 - 2 \text{ si calcola nell'ordine } 5 - 2 \text{ e infine } 3 \text{ (il 5 è } 11 - 6)$$

$$\text{assolutamente non } 11 - 4 = 7 \text{ (computando prima } 6 - 2)$$

cioè

$$11 - 6 - 2 \quad \text{significa} \quad (11 - 6) - 2.$$

(Le parentesi indicano precedenze nel calcolo).

Il / ha esattamente le stesse problematiche dette per il −, non è commutativo, per esempio 6/3 fa 2 ma 3/6 fa 0.5 ovvero $\frac{1}{2}$, e non è neanche associativo:

$$(x/y)/z \neq x/(y/z).$$

La scrittura $x/y/z$ senza parentesi sarebbe meglio evitarla in Matematica ma è usata in Farmacia.
È da intendersi che quelle 2 operazioni si fanno nell'ordine scritto.
Per esempio l'*indice di massa corporea* si calcola con

$$IMC := BMI := peso(kg)/statura(m)/statura(m)$$

[49] in tutti gli insiemi numerici considerati in questo testo elementare, precisazione che in generale ometteremo.

E si consideri anche il classico della Farmacia

$$\text{mg/kg/die}$$ (50)

Valgono 4 proprietà distributive:

$$(x+y)\,z = x\,z + y\,z$$

$$(x-y)\,z = x\,z - y\,z$$

$$\forall z \neq 0 \qquad (x+y)/z = x/z + y/z \quad \textit{ossia} \quad \frac{x+y}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$$

$$\forall z \neq 0 \qquad (x-y)/z = x/z - y/z \quad \textit{ossia} \quad \frac{x-y}{z} = \frac{x}{z} - \frac{y}{z}$$

ma in generale $\frac{x}{y+z}$ è diverso da $\frac{x}{y}+\frac{x}{z}$, e similmente coi $-$.
Poi

$$-(-x) = x \qquad e\ \forall\, x \neq 0 \ \ \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \quad (\textit{involuzioni})$$

e più completamente le 2 “formule delle frazioni a 3 piani"

$$\frac{x}{\frac{z}{w}} = x \cdot \frac{w}{z} \qquad \forall\, z, w \neq 0\,.$$

$$\frac{\frac{x}{y}}{z} = \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{z} \qquad \forall\, y, z \neq 0\,.$$

e più completamente ancora la “formula della frazione a 4 piani"

$$\frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{w}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{w}{z} \qquad \forall\, y, z, w \neq 0\,.$$

[50] È da utilizzarsi in questo modo:

$$Y \ \text{mg/kg/die}$$

si calcola

$$Y \times \ (\text{ peso [del paziente, o della cavia...] in chilogrammi })$$

e il risultato è in
mg/die,
cioè milligrammi da assumere ogni giorno. (Da un punto di vista matematico, intendono cioè (mg/kg)/die, implicitamente, come per il $-$ si fanno le operazioni nell'ordine in cui sono scritte, il che è massimamente ragionevole).

E ancora

$$x + (-x) = x - x = 0 \qquad e\ \forall\ x \neq 0\ \ x \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

$$x + 0 = 0 + x = x \quad (0\ elemento\ neutro\ rispetto\ al\ +)$$

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \quad (1\ elemento\ neutro\ rispetto\ al\ \cdot)$$

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0 \quad (0\ elemento\ assorbente\ rispetto\ al\ \cdot)$$

$$\frac{0}{x} = 0\ \ \forall\ x \neq 0 \qquad ma\ \frac{x}{0}\ \textbf{non esiste mai, neppure}\ \frac{0}{0}.$$ 😎

⇑ **Si eviti come la peste "l'orribile fratto zero"** ⇑

Si dimostra subito

$$\frac{a\,b}{a\,c + a\,d} = \frac{b}{c+d} \quad \text{cioè qua } a \text{ si semplifica}$$

ma (errore comunissimo) 😎

da $\frac{a\,b}{a\,c+d}$ questa "semplificazione" $\frac{b}{c+d}$ è sbagliata.

Esempio economico.

Scontare di una certa percentuale il costo totale di 2 articoli, oppure

totalizzare i 2 costi scontati

dà *in teoria* lo stesso risultato, per esempio – per fissare le idee – con uno sconto del 20%

scontare la somma $(x+y) \cdot 0.8 = x \cdot 0.8 + y \cdot 0.8$ sommare gli scontati

Questo è vero se si fanno i calcoli con infiniti decimali. Facendoli con 2 decimali com'è usuale nel commercio in euro o dollari, possono verificarsi discrepanze, in genere piccole. 😎

7.10 Precedenze algebriche e parentesi

Precedenze implicite delle operazioni, da seguire in mancanza di parentesi che le modifichino, dalla precedenza più debole:

$+$ e $-$ $\leftarrow$ precedenza più debole
$/$ e $\cdot$ anche se non trascritto: in $x+3\,y$, prima calcolare $3\,y$.
^ anche se non trascritto: in $2\,x^3$, prima calcolare x^3.

Le parentesi possono modificare le precedenze:
$(x+3)\cdot y$ ci fa prima sommare x e 3. Invece senza parentesi in $x+3\cdot y$ prima si moltiplicano 3 e y, poi si fa la somma.

Sempre meglio scrivere parentesi che lasciare incertezze.

Si possono usare quante si vogliano coppie di parentesi "annidate" una dentro l'altra

$$(...(...(...)...)...)$$

ma spesso per chiarezza si usano anche parentesi quadre e graffe:

$$\{...[...(...)...]...\}$$

7.11 Diverse opinioni, 1 o 16, su quanto fa 8/2(2+2)

Leggiamo su sito della prestigiosa Università di Harvard

> The question 8/2(2+2) has different answers depending on the rule which is used. One can interpret it as $(8/(2(2+2))) = 1$ or $(8/2)(2+2) = 16$ depending on the rule. There is no universally accepted rule as there are several: PEMDAS, BEDMAS, PE(MD)AS. It is not possible to say what is correct and what is incorrect. There are different rules, leading to different results. The expression is not well defined. It appears that most humans naturally give the answer 1 and most computers and programming languages return the answer 16. In order to make the expression unambiguous, one has to put brackets.

Una buona idea: seguire lo standard ISO.
Lo standard ISO esclude le scritture $a/b/c$ e $a/b\cdot c$ senza parentesi.

Senza aspettarsi che l'umanità ci segua, anzi con la certezza che negli articoli scientifici di Farmacia purtroppo scrivono così, non si scrivano espressioni come

$a/b/c$ (si scelga $(a/b)/c$ oppure $a/(b/c)$ a seconda dei casi)
e $a/b \cdot c$ (si scelga $(a/b) \cdot c$ oppure $a/(b \cdot c)$ a seconda dei casi).
(Standard ISO 80000 - 1:2009(E), riportato in LINK->).
Nondimeno nessun matematico sano di mente dubiterà che

$9\,a^2 : 3\,a$

faccia $3\,a$. Intendendo (ma chi lo scrive?) $(9\,a^2) : (3\,a)$. Tristezza.

Si veda *I. Relating to the Order of Operations in Algebra.* By N.J Lennes. The American Mathematical Monthly: (1917) Vol. 24, No. 2, pp. 93-95.

La situazione è grave ma non è seria... ...detto col classico aforisma di Flaiano. Attualmente, terza decade del XXI secolo, della situazione con la scrittura delle 4 operazioni si può dire proprio così.

Si trova una calcolatrice

(fotografata per esempio in https://blogdimatematicaescienze.it/il-paradosso-del-pemdas-lavete-risolto/)

che per

$$6 : 2 \times (1 + 2) \quad \text{e} \quad 6 : 2\,(1 + 2)$$

dà risultati 9 e 1 rispettivamente.
E ci si preoccupi, se si pensa che la calcolatrice "non sbaglia mai".

Quella calcolatrice dà diverso livello di precedenza alla moltiplicazione se scritta × oppure indicata implicitamente.

Riprendendo qua a un livello matematico l'imperativo classico *conosci te stesso* diciamo:

CONOSCI LA TUA
CALCOLATRICE

Bottom line
Per ogni coppia di parentesi che mettete, un'ambiguità muore.

7.12 Excel sbaglia ovvero calcola modo suo

Rimarchiamo lo sconcertante fatto che il software Excel, di ampio uso nelle Scienze Applicate, contro le convenzioni

di tutta la comunità matematica, per `-3^2` dà `9` invece che `-9`, come se fosse da intendere $(-3)^2$.
Quindi attenzione se si copia in Excel una formula da un altro software, dove normalmente il risultato sarebbe `-9`, avendo l'elevazione a potenza la precedenza sul meno.
È un caso strano, questo di Excel; addirittura in rete si trova un simulatore di Excel, che dà il risultato opposto di Excel...
E attenzione ancora a questo:

per calcolare $\underbrace{-3^2}_{che\,fa\,-9}$ in Excel si deve scrivere `-(3^2)`

7.13 Le potenze

Riprendendo per un momento la questione delle ambiguità notazionali, si eviti come la peste la scrittura a^b^c, specificando con una coppia di parentesi quale potenza si deve calcolare per prima, e se non lo si fa non ci si aspetti unanimità di risultati fra i vari software (e umani).

In questa trattazione elementare delle potenze supponiamo nota una conoscenza di base delle radici. Sarebbe possibile fare prima una trattazione elementare delle radici, presupponendo note le potenze. Evitare del tutto queste problematiche è possibile ma al prezzo di complicazioni che qua vogliamo evitare.

1. Esponente intero positivo. Scriviamo
x^2 per $x \cdot x$
x^3 per $x \cdot x \cdot x$
x^4 per $x \cdot x \cdot x \cdot x$
e più in generale definiamo $a \in I\!R$ *elevato alla* $n \in I\!N$, $n > 0$, il numero

$$a^n = a \cdot \ldots \cdot a \ \ (n\,volte)$$

2. Esponente razionale positivo. Si definisce $a \in I\!R$ *elevato alla* $q = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, $m, n > 0$, il numero

$$a^{\frac{n}{m}} := \sqrt[m]{a^n}$$

che esiste se $a \geq 0$ *vel* m è dispari. Per esempio $x^{1.5} = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$.

3. Esponente reale positivo. Per la potenza con esponente $q \in \mathbb{R}$ si richiede $a \geq 0$, e se q è razionale vale quanto sopra, e se è irrazionale si dà una definizione complessa che si può quasi immaginare sostituendo q con una sua *"straordinariamente buona"* approssimazione razionale: $a^{\sqrt{2}}$ sarà *"circa"* $a^{1.41}$ a sua volta uguale a $\sqrt[100]{a^{141}}$. Ancor meglio $\sqrt[1000]{a^{1414}}$.

4. Esponente negativo. Ponendo per $a \neq 0$

$$a^{-t} := \frac{1}{a^t}$$

la potenza è definita per tutti gli esponenti non nulli; e per l'esponente 0 si pone se $a \neq 0$ (rimanendo non definito 0^0)

$$a^0 := 1 \,.$$

Grafici delle funzioni potenza per base positiva. Ecco su WolframAlpha i grafici di alcune funzioni potenza: Link->

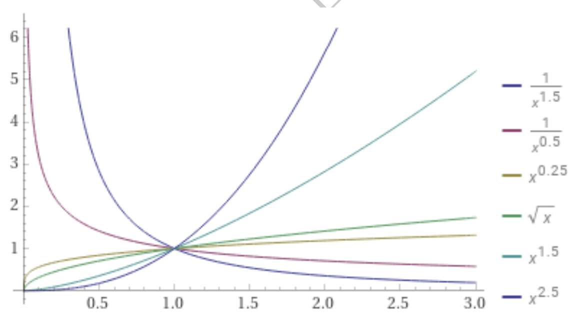


Figure 6: Esponenti −1.5, −0.5, 0.25, 0.5, 1.5. Screenshot da WolframAlpha

Proprietà delle potenze. L'elevamento a potenza non è nè commutativo, per esempio $2^3 = 8 \neq 9 = 3^2$, nè associativo. Valgono invece queste 12 proprietà, di cui la 0-esima già detta:

(0) $x^{-y} := \frac{1}{x^y}$

(1) $x^{y+z} = x^y \cdot x^z$

(1 bis) $x^{y-z} = \frac{x^y}{x^z}$

(2) $x^{y \cdot z} = (x^y)^z$

(2 bis) $x^{\frac{y}{z}} = \sqrt[z]{x^y}$ se $z = 2, 3, 4...$

(3) $(x \cdot y)\hat{\ }z = (x\hat{\ }z) \cdot (y\hat{\ }z)$ $\quad ossia\ (x\,y)^z = x^z y^z$ $(distributiva)$

(4) $(x/y)\hat{\ }z = (x\hat{\ }z)/(y\hat{\ }z)$ $\quad ossia \left(\frac{x}{y}\right)^z = \frac{x^z}{y^z}$ $(distributiva)$

(4 bis) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-z} = \left(\frac{y}{x}\right)^z$

(5) $1^x = 1$

(6) $x^1 = x$

(7) $x^0 = 1 \quad \forall\, x \neq 0$

(8) $0^x = 0 \quad \forall\, x \neq 0$

e attenzione poi che

0^0 **non esiste.**

Si noti la notazione, ovvero convenzione sulla notazione:

$$_{usualmente\ scritto \rightarrow}\ x^{y^z} := x^{(y^z)}\ _{\leftarrow raramente\ scritto}$$

per esempio 2^{2^3} è 2^8 cioè 256, non è 4^3 cioè 64, che è $(2^2)^3$.

Esempio sulla proprietà (2).
Volume di un cubo di lato $10^{-10}\,m$. Essendo $volume_{cubo} = lato^3$, si ha $(10^{-10})^3$ cioè $10^{-30}\,m^3$.

Esempio sulle proprietà (2), (4), (5).

Modellizziamo la diluizione omeopatica in acqua con
1 CH : $\frac{1}{100}$ cioè 1 parte di sostanza su 100 totali, e 99 sono acqua
2 CH : $\frac{1}{100}\frac{1}{100}$
e così via, sempreché si riuscissero ad evitare contaminazioni:

$$\text{n CH} : \left(\frac{1}{100}\right)^n$$

(Abbiamo modellizzato solo la questione della diluizione, non l'inevitabile effetto placebo nè l'ipotetica "memoria dell'acqua" affermata dagli omeopati).
A cosa corrisponde 10 CH?

Con le proprietà delle potenze

$$\begin{aligned} \text{10 CH} : \left(\frac{1}{100}\right)^{10} &= \\ = \frac{1^{10}}{100^{10}} = \frac{1}{100^{10}} &= \\ = \frac{1}{(10^2)^{10}} &= \\ = \frac{1}{10^{20}} & \end{aligned}$$

cioè 1 parte su 10^{20} che è

$$100\,000\,000\,000\,000\,000\,000$$

cioè 1 parte su cento miliardi di miliardi. (Ogni 9 zeri c'è un miliardo).

7.14 Proporzioni

Si dice *proporzione* la *relazione quaternaria* (cioè fra 4 numeri)

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{w} \qquad \text{classicamente scritta} \quad \mathrm{x : y = z : w}$$

ma talvolta si trova anche :: invece del segno =.
Non sottolineeremo qua la corrispondenza del concetto con la realtà sensibile, dovuta essenzialmente alla natura del prodotto e della divisione, supponendola nota dagli studi elementari.

Osserviamo invece che per l'operazione di divisione, oltre alle 4 notazioni già viste,

$$\frac{x}{y} \qquad x/y \qquad x : y \qquad x \div y$$

in ambito farmaceutico se ne usa anche una quinta, la parola (latina) **per**, che noi sempre trascriveremo come frazione.

$$\text{Per esempio:} \quad 12\text{ mg per ml} \quad \text{scriveremo} \quad \frac{12\text{ mg}}{1\text{ ml}}$$

ESERCIZIO Si abbia una boccetta di 10 ml di un farmaco X etichettata “15 mg per ml”. Quanti millilitri (ml) bisognerà iniettare per somministrare una dose di 75 mg?

Svolgimento. Riscriviamo l'indicazione in etichetta nella forma

$$\frac{15\text{ mg}}{1\text{ ml}}$$

e produciamo la proporzione

$$\frac{15\text{ mg}}{1\text{ ml}} = \frac{75\text{ mg}}{x\text{ ml}} \qquad / \cdot \frac{1\text{ ml} \cdot x\text{ ml}}{15\text{ mg}}$$

$$x\text{ ml} = \frac{75\text{ mg} \cdot 1\text{ ml}}{15\text{ mg}} =$$

$= 5$ ml (e li abbiamo: la boccetta ne contiene 10).

$$\boxed{5\text{ ml}}$$

Sul web si ritrovano diffusamente scritte col “per", come “5 mg per 40 ml", e il “per" chiaramente significa / ma a quanto pare in Italia una tale scrittura non si usa, risulta praticamente sconosciuta.

NOTA 1. È ben evidente l'importanza di **calcolare esattamente i dosaggi** in Farmacia. Ci sono stati errori fatali. (Plausibilmente sono numerosissimi e solo in minima parte vengono scoperti).
Ecco cosa consiglia il Royal College of Nursing inglese online:

When you have completed your calculation, remember to check your work. Here's a reminder of the ways you might do this:

• repeat the calculation

• ask a colleague to check your answer

• try to calculate the answer again using a different method

• check against the recommended dose range (e.g. using the British National Formulary)

• look for unusually big or small answers.

NOTA 2. Sebbene esuli dagli obiettivi di questo testo elementare di matematica, si noti che il millilitro (corrispondente al centimetro cubo) può trovarsi indicato **online di fatto** (nei cataloghi di farmaci) sia con ml che mL ma qualcuno scrive anche *diversamente*, in un modo che potrebbe in via ipotetica confondersi con altro multiplo del litro. E si faccia anche ben attenzione a distinguere la l minuscola dal numero 1...

ESERCIZIO$_\mu$
Una pillola contiene una polvere costituita da $2.5\,mg$ di principio attivo e $300\,mg$ di eccipiente. Quanto principio attivo contiene $1\,kg$ della polvere?

SVOLGIMENTO
Una pillola contiene $(300+2.5)mg$ di polvere e allora si ha subito la proporzione

$$2.5\,mg : 302.5\,mg = x\,mg : 1\,kg$$

ovvero con scrittura più moderna

$$\frac{2.5\,mg}{302.5\,mg} = \frac{x\,mg}{1\,kg} \qquad \Big/ \cdot \frac{1\,kg}{1\,mg}$$

trovandosi

$$x = \frac{2.5}{302.5} \cdot \frac{1\,mg}{1\,mg} \cdot \frac{1\,kg}{1\,mg} =$$

essendo ovviamente $1\,kg = 1\,000\,g = 1\,000\,000\,mg$

$$= \frac{2.5}{302.5} \cdot 10^6 =$$

$$\boxed{8\,264.46\,mg}$$

(Circa 8 grammi e un quarto).

7.15 ESERCIZI SULLA LEZIONE 7

7.15.1 Esercizio risolto a – Equazione lineare

ESERCIZIO$_\mu$ ≈ Risolvere

$$\sqrt{2}\,x - 9 = \frac{7}{5}\,x$$

SVOLGIMENTO

$$\sqrt{2}\,x - 9 = \frac{7}{5}\,x \quad \Big/ + \left(9 - \frac{7}{5}\,x\right)$$

$$\sqrt{2}\,x - \frac{7}{5}\,x = 9$$

$$\left(\sqrt{2} - \frac{7}{5}\right)x = 9 \quad \Big/ : \left(\sqrt{2} - \frac{7}{5}\right) \neq 0$$

$$x = \frac{9}{\sqrt{2} - \frac{7}{5}}$$

che è la soluzione esatta, che adesso approssimiamo numericamente:

$$\approx \frac{9}{1.414214 - 1.4} =$$

$$= \frac{9}{0.014\,214} \approx$$

$$\boxed{633.2}$$

Su WolframAlpha LINK->

7.15.2 Esercizio tanto carino quanto capriccioso

ESERCIZIO$_\mu$ ∗ Calcolare

$$2^{3^4}$$

SVOLGIMENTO Si calcola prima $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

$$2^{3^4} =$$

$$= 2^{81} =$$

cioè

$$2 \cdot 2 \cdot \ldots (\text{c'è in tutto 81 volte il 2}) \ldots \cdot 2 =$$

si fa `2^81` con WolframAlpha (oppure si calcola a mano 😐)

$$\boxed{2\,417\,851\,639\,229\,258\,349\,412\,352}$$