9 Piano cartesiano – I parte

9.1 Traiamo da Food and Drug Administration, USA

Fotografia di

Guidance for Industry

Q8(R2) Pharmaceutical Development

a pagina 22:

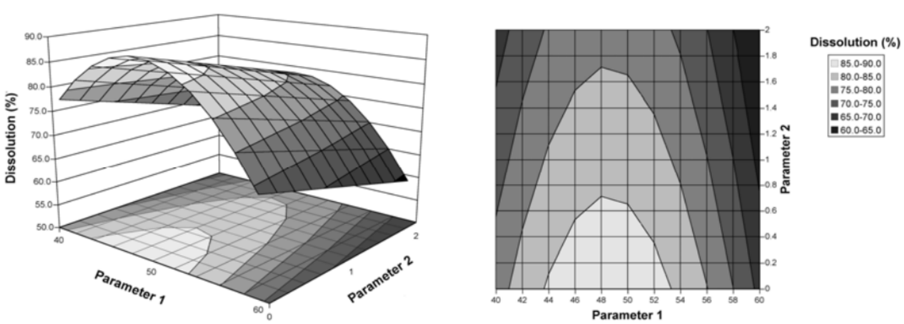


Figure 1a: Response surface plot of dissolution as a function of two parameters of a granulation operation. Dissolution above 80% is desired.

Figure 1b: Contour plot of dissolution from example 1a.

9.2 Introduzione, anche con riferimento alla Farmacia

Già sappiamo che i numeri reali sono identificabili coi punti di una retta orientata su cui sia fissato un punto origine e un punto unità, ciò che costituisce un *sistema di ascisse* in quello che possiamo anche chiamare spazio cartesiano a 1 dimensione.

In questa lezione estenderemo quello spazio unidimensionale a uno spazio bidimensionale, il piano cartesiano, in cui

i punti sono identificabili con le coppie ordinate di numeri reali.

Dei milioni di articoli scientifici nel campo biomedico, innumerevoli contengono rappresentazioni nel piano cartesiano. Si inizi apprezzando il ciclo pressione-volume del ventricolo murino sinistro.

9.3 Definiamo l'obesità di animaletti

Supponiamo che uno sperimentatore abbia 16 animaletti della stessa specie, e di ciascuno
1) misura la lunghezza
2) misura il peso
3) valuta se secondo lui è normopeso, sovrappeso o sottopeso.

Ottiene questi dati, senza qua riportare le unità di misura:

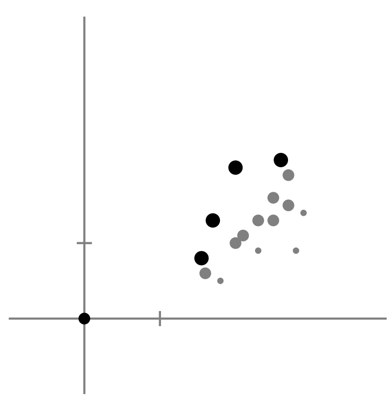
animaletto 1: lunghezza 2, peso 1, normopeso
animaletto 2: lunghezza 2.8, peso 0.9, sottopeso
animaletto 3: lunghezza 2.7, peso 1.9, normopeso
...
animaletto 16: lunghezza 2, peso 2, sovrappeso.

Ricerca interessante, anche costosa (il tempo è denaro), ma risultato oscuro e inconcludente.

L'università di Trieste (2023) alleva:
cavie, maiali, pulcini, pesci zebra;
altri animali da esperimento

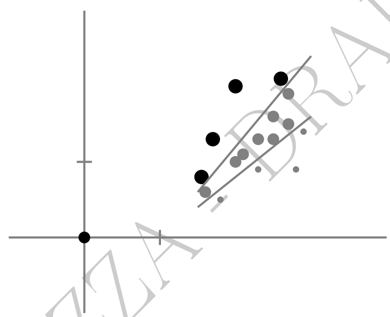
vengono comprati da aziende esterne.

Rappresentiamo le coppie ordinate (lunghezza, peso) di ciascun animaletto come punti del piano cartesiano – adesso considerato in senso intuitivo, e dopo lo definiremo meglio – con colori diversi a seconda della qualifica normopeso, sovrappeso e sottopeso.



Adesso la situazione è molto più chiara: ci sono sostanzialmente 3 regioni del piano in cui cadono i punti corrispondenti rispettivamente ai normopeso, sovrappeso e sottopeso.

A un livello superiore, il ricercatore stabilisce analiticamente dei possibili confini delle 3 regioni, dando di fatto le condizioni che poi – senza fare alcun disegno bensì un semplice calcolo con la calcolatrice – permettono in qualunque Ambulatorio Veterinario – o Laboratorio – di stabilire, dalla lunghezza e dal peso, se un dato animaletto va considerato normopeso o sovrappeso o sottopeso. Una cosa del genere si fa di fatto per gli esseri umani, in vari modi.



Standard proposto dal ricercatore:

- sottopeso se: $peso < (altezza - 1) \cdot 0.8$
- sovrappeso se: $peso > (altezza - 1) \cdot 1.2$
- altrimenti: normopeso.

Almeno, per $1.5 <$ altezza < 3.
Le formule delle Scienze Applicate hanno in generale un dominio di validità, spesso non esplicitato, con vaghi confini al di fuori dei quali perdono validità.
Non si possono applicare le formule del sovrappeso a un embrione.

Si noti che nell'esempio soprastante siamo entrati nella Scienza Moderna uscendo dalla medicina preistorica:

Mi sembra che uno con la forma di mio cugino (fa il gesto con le mani) si deve considerare troppo magro.

Adesso abbiamo formule matematiche. Con esse in certi casi si decidono terapie. (protocolli, *evidence based medicine*, ecc.).

9.4 Premessa definizionale

Faremo queste distinzioni – ma senza appassionarci troppo:

polinomio: $a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, p.es. $x^2 - 9$, ha ***radici*** ± 3;

equazione: $f(x) = g(x)$, p.es. $|x| = 3$ ha ***soluzione*** ± 3;
equazione polinomiale: $f(x) = g(x)$, p.es. $x^2 - 9 = 0$ ha ***soluzione*** ± 3;

funzione: $f(x)$, p.es. $f(x) := |x| - 3$, spesso scritta $y = |x| - 3$;
funzione polinomiale: p.es. $f(x) := x^2 - 9$, spesso scritta $y = x^2 - 9$;

disequazione in 1 variabile: $f(x) > g(x)$ (o $<$ o $\geq$ o $\leq$), p.es. $|x| > 3$, ha ***soluzione*** $x < -3 \vee x > 3$.

Per i matematici sono cose ben distinte ma nelle Scienze Applicate di solito non vanno molto per il sottile su queste questioni: spesso si sovrappongono i concetti di funzione ed equazione, e similmentei di soluzione e radice.

Aggiungiamo che le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ associata a una funzione f si chiamano zeri di f; con il che le radici di un polinomio sono gli zeri della funzione polinomiale associata.

Se abbiamo una funzione $f(x)$, possiamo denotarla (ed è il modo preferito dai matematici) anche solo con f, oppure con $f(\cdot)$, oppure (ma a rischio di confusione) con $f(\text{qualunque lettera})$.

9.5 Assi cartesiani

Gli assi cartesiani sono una retta orientata detta asse delle ascisse e una retta orientata perpendicolare alla precedente, detta asse delle ordinate, che si intersecano in un punto detto origine e denotato

con O. Su ciascuna è fissato un punto unità.
L'orientazione del piano e degli angoli con vertice nell'origine è antioraria. L'asse delle ascisse si sovrappone all'asse delle ordinate con una rotazione di +90°.

Spesso l'asse delle ascisse ha nome x, ma t se rappresenta un tempo, e quello delle ordinate y, ma p se rappresenta un peso, eccetera, qualsiasi nome.

Possiamo dire che su ciascun asse il punto unità fissa un'unità di misura, che determina l'ascissa e l'ordinata (distanze con segno dall'origine) dei loro punti. Tuttavia, si ricordi che in Matematica i numeri delle ascisse e ordinate sono numeri puri, ossia numeri, mentre nelle Scienze Applicate possono essere dotati di unità di misura, ed essere grandezze fisiche.

9.6 Punti del piano cartesiano

Equazione del punto[62]:

$$P = (x_0, y_0) \quad \textit{ovvero} \quad P(x_0, y_0) \quad \textit{ovvero} \quad (x_0, y_0)$$

Il numero reale x_0 è l'ascissa di P e y_0 l'ordinata.

Da adesso, le relazioni geometriche fra figure diventano relazioni algebriche fra numeri, con enorme vantaggio pratico e applicativo. In particolare, per i computer è normale operare su numeri.

Già il D'Oresme[63] (XIV secolo), iniziatore del metodo, arrivò fino a pro-

[62] Altri Autori scrivono col punto e virgola: $(x_0; y_0)$

[63] Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce Nicola d'Oresme: "matematico, fisico, astronomo ed economista, vescovo, filosofo, psicologo e musicologo francese (...) teologo appassionato, traduttore competente, influente consigliere di re Carlo V di Francia (...) ebbe l'idea di utilizzare ciò che dovremmo chiamare coordinate rettangolari nella terminologia moderna, una lunghezza proporzionale alla longitudo, l'ascissa di un dato punto e una perpendicolare a quel punto, proporzionale alla latitudo, l'ordinata (...) longitudo e latitudo possono variare o rimanere costanti."

durre – sostanzialmente – l'equazione della retta. Oggi noi seguiamo la teoria, più completa, di Descartes (Cartesius, Cartesio, XVII secolo).

9.7 Grafico di dispersione ovvero scatterplot

(Scritto sia scatterplot che scatter plot).

> "Il grafico di dispersione o grafico a dispersione o scatter plot o scatter graph è un tipo di grafico in cui due variabili di un set di dati sono riportate su uno spazio cartesiano.
>
> I dati sono visualizzati tramite una collezione di punti ciascuno con una posizione sull'asse orizzontale determinato da una variabile e sull'asse verticale determinato dall'altra.
> (...)
> solitamente la variabile più importante è sull'asse delle y"
> (Wikipedia, l'enciclopedia libera)

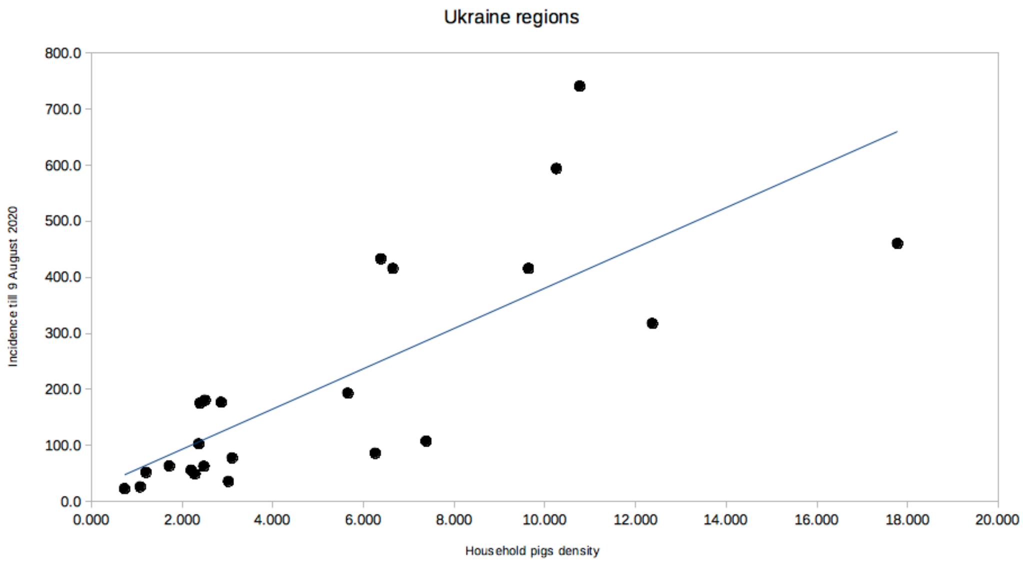


Figure 7: Esempio di scatterplot, che mette in relazione la densità di maiali d'allevamento domestico ed incidenza del covid-19, nelle regioni dell'Ucraina; tratto da: "In the first wave of the 2020 pandemic in several areas more sunlight less pandemic, more pigs more pandemic, and lower correlations with some other livestocks". (December 2020), A. Soranzo. DOI: 10.13140/RG.2.2.29852.31367 Allo scatterplot è aggiunta la *retta di regressione*.

Altri esempi in questo LINK->

Lo Studente, magari anche in dipendenza dei suoi interessi, troverà diagrammi interessantissimi cercando online per immagini con qualche motore di ricerca le parole

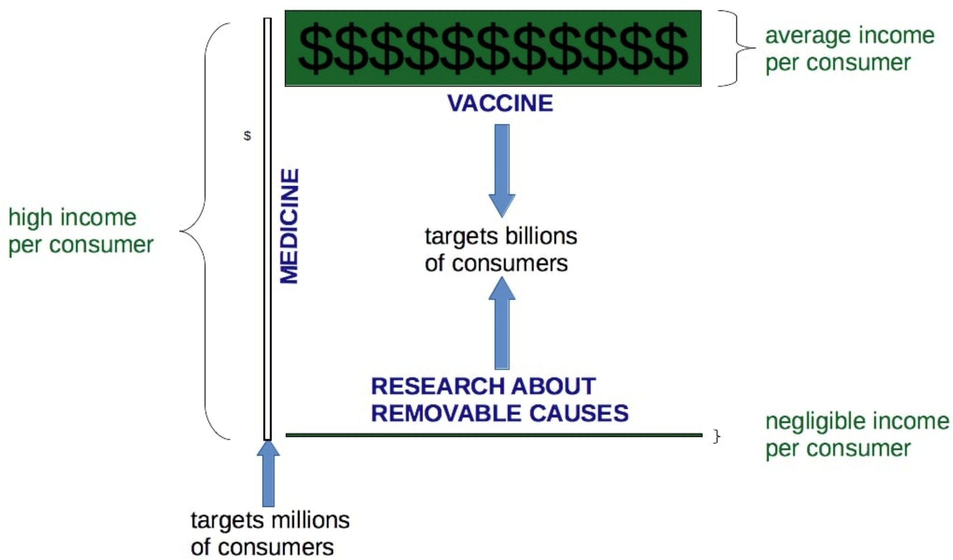
scatterplot qualche_nome_di_malattia_meglio_se_in_inglese

per esempio

scatterplot diabetes

9.8 I diagrammi, o grafici nelle Scienze Applicate

Ogni rappresentazione grafica di dati la diremo *diagramma*.



Esempio di diagramma. Con simili strumenti([64]) un'azienda farmaceutica puó decidere in quali ricerche scientifiche investire per ottimizzare i guadagni. Poi, in base alla dottrina economica corrente, *la mano invisibile del mercato* dovrebbe produrre benefici per molti.

Detto ultrasemplificatamente, con numeri riferibili all'Italia per agevole comprensione: il farmaco lo date magari a 50mila malati gravi, il vaccino a 50 milioni di sani: sono mille volte di più clienti. I più famosi farmaci (Remdesivir, Paxlovid, Molnupiravir) creati specificamente per il covid (inizialmente propagandati come semi-miracolosi e poi risultati molto meno efficaci) avevano costi dell'ordine dei 500-3000 euro, 1 dose di vaccino sui 4-20 euro: è vero che i farmaci costavano 100 volte più del vaccino, ma i destinatari del vaccino erano 1000 volte di più. Proporzionalmente c'è stato l'interesse delle case farmaceutiche per vaccini e farmaci. Sulla ricerca delle cause rimovibili c'è stato pochissima ricerca scientifica. Il diagramma fa capire chiaramente queste questioni.

[64]Detto icasticamente: il farmaco si darebbe magari a 50mila *casi severi* e il vaccino a 50 milioni di sani, un rapporto 1:1000. E' vero che il farmaco costa più del vaccino, ma non 1000 volte, diciamo circa 100 volte. (Per esempio il famoso Paxlovid, 1400 dollari per un trattamento di cinque giorni).

Fra i diagrammi ci sono i ben noti diagrammi a torte per le percentuali, i grafi usati per le mappe cognitive, gli istogrammi che vedremo, le carte statistiche, perfino interattive.

9.9 E i grafici in senso matematico

Grafico è un sottoinsieme G di $X \times Y$ tale che

$$(\forall x)\,(\exists!\, y)\,(x, y) \in G$$

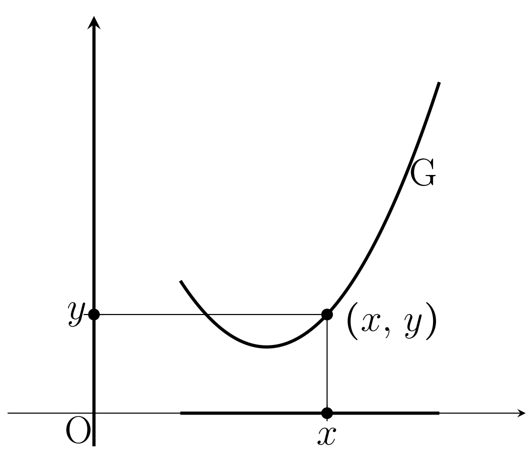
(È sottinteso che $x \in X$ e $y \in Y$, e fra la quarta e la quinta parentesi è implicito un "tale che").

Ma nelle Scienze Applicate spesso qualunque diagramma viene chiamato grafico.

Cioè:

> Per ogni x del dominio esiste ed è unico un y del codominio, tale che la coppia ordinata (x, y) appartiene a G, grafico.

Se X e Y sono insiemi di numeri reali (cioè sottoinsiemi di $\mathbb{R}$) allora G è un grafico cartesiano (bidimensionale ovvero 2-dimensionale).

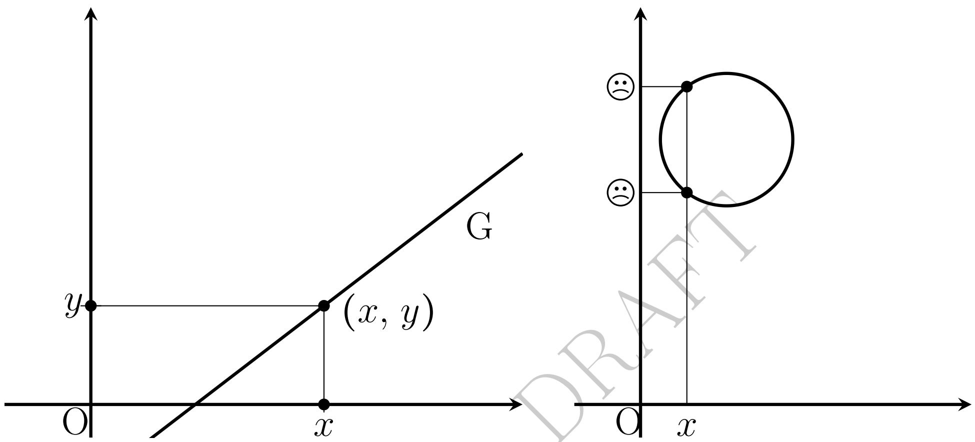


A ogni x del dominio X corrisponde un solo y del codominio y. Il fatto che a 2 valori x e x' corrisponda lo stesso y non è un problema: semplicemente, questo è il grafico di una funzione non iniettiva (le funzioni iniettive sono caratterizzate da "mai 2 in uno") ma è pur sempre un grafico.

Si noti che una retta è un grafico[65] in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ma un circolo no, al-

[65] Ovviamente una retta verticale è un grafico di una funzione della y, precisamente una

meno non nel senso matematico sopra detto – perché per uno stesso valore x ci sono più di un valore y tali che (x, y) apparterrebbe al grafico, che quindi non è un grafico – ma nelle Scienze Applicate chiameranno anche quello *grafico*; e comunque per i matematici il circolo è un *grafico polare*.



I matematici fanno la distinzione fra un *grafico*, oggetto astratto che spesso è un insieme illimitato del piano, e un *disegno di un grafico*, necessariamente limitato e quindi in generale incompleto ovvero parziale: nessuno può disegnare tutta una parabola, eppure sia nel linguaggio comune che nelle Scienze Applicate il disegno di una sua parte (quasi) tutti lo chiamano (grafico della) parabola.

Figure	su WolframAlpha `Link->`	su WolframAlpha `Link->`

Nella Scienze Applicate e nella divulgazione scientifica avviene spesso che anche i (disegni dei) grafici in senso matematico vengano arricchiti da notazioni e disegni, diventando diagrammi di vario tipo.

Si cerchi per esempio sul web dose response curve (oppure graph).

funzione costante del tipo $x = cost.$

9.10 Rette del piano cartesiano

Un'infinità di fenomeni delle Scienze Applicate viene modellizzata, più o meno esattamente ovvero più o meno approssimativamente, con equazioni

$$y = numero \cdot variabile + evantuale\, altro\, numero$$

i cui grafici nel piano cartesiano sono rette

Si cerchi per esempio sul web diabetes regression line

Esistono

- rette verticali, cioè parallele all'asse y: equazione $x = p$
- rette orizzontali, cioè parallele all'asse x: equazione $y = q$
- rette oblique, non parallele nè all'asse x nè all'asse y

Equazione esplicita della retta passante per l'origine e non verticale, ovvero

retta obliqua od orizzontale, per l'origine:

$$y = m\, x$$

e questa funzione è caratterizzata da
"al raddoppiare di x raddoppia y e viceversa."

La maggior parte delle funzioni di 1 variabile delle Scienze Applicate ha questa forma.
Per esempio la Prima Legge di Gay-Lussac ovvero Legge di Charles con la temperatura assoluta

$$V = V_0\, \alpha\, T \qquad T\, temperatura\, assoluta \qquad retta\, per\, l'origine\, nel\, piano\, (T, V)$$

Equazioni esplicita della retta non verticale, ovvero

retta obliqua od orizzontale:

$$y = m\, x + q$$

per esempio $giorni\_dal\_concepimento = 365.25\, anni + 273$ (Formula approssimativa).

q ci dice il punto di intersezione con l'asse y, precisamente $(0, q)$.
m: ***coefficiente angolare***, ci indica la pendenza della retta;
se è 0 la retta è orizzontale
se è > 0 la retta "sale"
se è < 0 la retta "scende".

A volte nelle Scienze Applicate l'equazione appare come

$$y = m\,(x + p)$$

che è esattamente come prima con $q = m\,p$ ovvero $p = q/m$.

Per esempio una ricerca scientifica[66] dà questo peso ideale

$$\text{weight\_children\_aged\_1-5\_years} = 2 \times (\text{age\_in\_years} + 5)$$

che nella forma $y = m\,x + q$ sarebbe $\text{weight\_children\_aged\_1-5\_years} = 2 \times \text{age\_in\_years} + 10$.
Addirittura può presentarsi scritta in una forma equivalente

$$y = a\,(b\,x + c)$$

per esempio la Prima Legge di Gay-Lussac ovvero Legge di Charles con i gradi Celsius

$$V = V_0\,(1 + \alpha\,t) \qquad t\; temperatura\;{}^\circ C \qquad retta\; obliqua\; nel\; piano\; (t, V)$$

Equazione implicita della retta: $a\,x + b\,y + c = 0$ con $(a, b) \neq (0, 0)$

per esempio $2\,x - y + 10 = 0$ che è quella appena vista salvo diverse variabili.

Ogni punto $P(x, y)$ le cui coordinate verificano l'equazione della retta appartengono alla retta, e questo sarà un fatto generale, estendibile a tutte le *curve*, in rappresentazione esplicita o implicita.

Per esempio $(1.7, 63.869)$ sta sulla curva del peso ideale maschile secondo Keys, che

[66] Make your Best Guess: an updated method for paediatric weight estimation in emergencies, by Tinning K, Acworth J., in Emerg Med Australas. 2007 Dec;19(6):528-34.

è la parabola (grafico di) $y = 22.1\,x^2$: altezza in metri 1.70 (ovvero 1.7, matematicamente), peso 63.869 in chilogrammi.

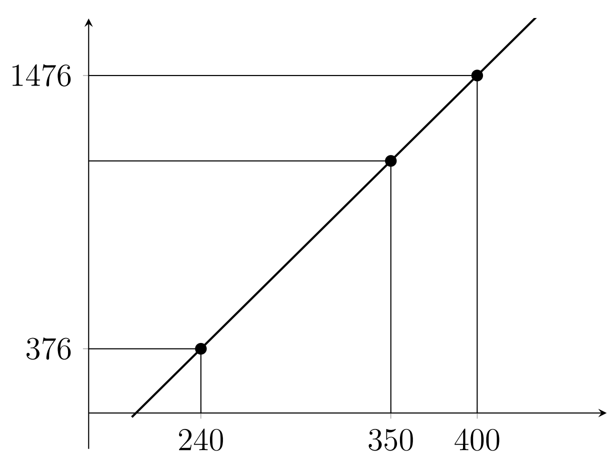
Equazione della retta per 2 punti:

$$\boxed{\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}} \tag{14}$$

Naturalmente con semplici passaggi algebrici la forma soprastante può essere ricondotta ad $a\,x + b\,y + c = 0$, e, se la retta non è verticale, a $y = m\,x + q$.

ESERCIZIO$_{\mu 2024}$ $\ast$ Supponiamo che un fenomeno cresca linearmente (e ci sono un'infinità di applicazioni vicine alla Farmacia) fra il tempo $t_1 = 240$ e il tempo $t_2 = 400$ dai valori 376 a 1976. Trovare l'equazione (di una retta) $y = m\,t + q$ modello del fenomeno (nell'intervallo temporale considerato) e con essa stimare il valore al tempo 350.

SVOLGIMENTO
Si può risolvere l'esercizio in modo abbastanza meccanico applicando la formula della retta per 2 punti, e poi semplici riduzioni algebriche; tuttavia per maggiore chiarezza facciamo anche un disegno.



Ai valori $t_1 = 240$ e $t_2 = 400$ corrispondono i valori $y_1 = 376$ e $y_2 = 1976$ rispettivamente, ovvero nel piano cartesiano abbiamo i 2 punti $(240, 376)$ e

$(400, 1976)$. Con l'equazione della retta per 2 punti, qua espressa per variabili t e y, piuttosto che con le più usuali x e y,

$$\frac{t-t_2}{t_1-t_2}=\frac{y-y_2}{y_1-y_2}$$

mettendo i valori numerici abbiamo

$$\frac{t-400}{240-400}=\frac{y-1976}{376-1976}$$

che è l'equazione della retta, e che ora con semplici manipolazioni algebriche porteremo alla richiesta forma $y=m\,t+q$:

$$\frac{t-400}{-160}=\frac{y-1976}{-1600} \qquad \Big/ \cdot(-1600)$$

$$10\,(t-400)=y-1976 \qquad \Big/ +1976$$

$$1976+10\,t-4000=y$$

e allora

$$y=10\,t-2024$$

in cui poniamo $t=350$ ottenendo

$$y=10\cdot 350-2024=$$

$$\boxed{1476}$$

Formula della distanza di 2 punti:

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

Il computer non mette un righello da un punto all'altro: usa questa e analoghe formule.
E se un modernissimo computer "vede" i punti con una telecamera, poi la distanza la calcolerà comunque con la formula soprastante, dopo aver trasformato i punti in coordinate numeriche.

2 rette di equazioni $y=m\,x+q$ e $y=m'\,x+q'$

$$\text{sono parallele} \iff m'=m$$

(e ovviamente 2 rette verticali $x = p$ e $x = p'$ sono parallele).

E si possono considerare molte altre formule.[67]

Grafico cartesiano G_f di una funzione $f(x)$ è (il disegno del)l'insieme

$$G_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$$

e spesso le funzioni hanno nome $y(x)$ denotato anche semplicemente y, e già abbiamo visto le rette orizzontali e oblique $y = m\,x + q$, che di fatto sono proprio grafici, mentre le rette verticali non sono grafici di funzioni di x. (Ma sono grafici di funzioni di y).

Fra le rette che sono grafici di funzioni di x si distinguono queste:
- $y = x$ bisettrice del I e III quadrante – funzione *identità*
- $y = -x$ bisettrice del II e IV quadrante – passaggio all'opposto
- $y = q$ con $q \in \mathbb{R}$ generica retta orizzontale, e se $q = 0$ si ha
- $y = 0$ asse x

e quelle che non sono grafici di funzioni di x sono precisamente queste:
- $x = x_0$ generica retta verticale, e se $x_0 = 0$ si ha
- $x = 0$ asse y.

9.11 Funzioni e dis/equazioni di primo grado

Per ogni m la funzione $f(x) := m\,x$ si chiama *funzione lineare*, e in questo contesto la scriveremo $y = m\,x$.

> Esempio: l'indice di massa corporea: $BMI := \frac{peso}{altezza^2}$, in cui l'altezza possiamo ragionevolmente considerarla costante – per un fissato individuo – mentre un peso x può variare più facilmente, in pratica abbiamo $y = \frac{1}{altezza^2} \cdot x$; si usino chilogrammi e metri).

[67] Per il lettore interessato, ecco alcune altre formule.
2 rette di equazioni $y = m\,x + q$ e $y = m'\,x + q'$

$$\text{sono perpendicolari} \;\Leftrightarrow\; m' = -\frac{1}{m}$$

Formula della distanza punto-retta:

$$d = \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

È una funzione crescente se $m > 0$, e *decrescente* se $m < 0$, *costantemente nulla* se $m = 0$.
Il grafico è una retta passante per l'origine.
Fissato $m \neq 0$, l'equazione $m\,x = 0$ ha soluzione $x = 0$ (basta dividere per $m \neq 0$), mentre la disequazione in 1 variabile

$$m\,x > 0$$

si risolve dividendo per m ciò che, se e solo se $m < 0$, inverte l'ordinamento. Analogamente si risolve se si aveva $\geq$, $<$ o $\leq$.

Per ogni $m, q \in I\!R$ la funzione $f(x) := m\,x + q$ si chiama funzione *affine*, deprecabilmente detta lineare, e in questo contesto la scriveremo $y = m\,x + q$.
È una funzione crescente se $m > 0$, e *decrescente* se $m < 0$, *costante* se $m = 0$.
Il grafico è una retta, che *intercetta* (interseca) l'asse y in $(0, q)$.
Fissati $m \neq 0$ e q, l'equazione

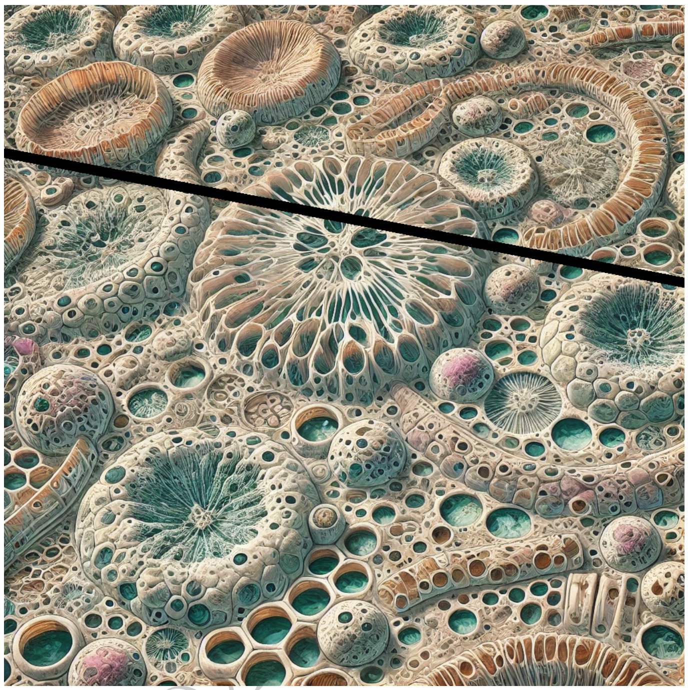
$$m\,x + q = 0$$

ha soluzione $x = -\frac{q}{m}$. (Si sommi $-q$ e si divida per $m \neq 0$).
Le 4 disequazioni con $>$, $\geq$, $<$, $\leq$ si risolvono sommando $-q$ e poi dividendo per m <u>invertendo l'ordinamento se $m < 0$</u>.
Fissati m e q, la disequazione in 2 variabili

$$y \geq m\,x + q$$

rappresenta il *semipiano chiuso* "sopra" la retta $y = m\,x + q$, compresi i punti della retta. Col $>$, il *semipiano aperto*, esclusi i punti della retta.
Con $\leq$, e con $<$, si va "sotto" la retta, compresa (semipiano chiuso) o rispettivamente esclusa (semipiano aperto).
Ciò vale anche per la $y > m\,x$ e le 3 analoghe, che hanno $q = 0$.

Elaborazione digitale di immagini (anche medicali). I computer, nelle elaborazioni digitali, non vedono con gli occhi se un puntolino bianco in una radiografia sta da una parte o dall'altra di una linea: fanno – ultrasemplificando – un calcolo numerico che si conclude con una verifica numerica del tipo maggiore o minore.



9.12 Esempio di rette: peso normale secondo Broca

La più nota e popolare formula per il peso ideale

peso uomini: altezza meno 100

(taluni modificano 100 in 104 per le sole donne) dà una retta del piano cartesiano dei punti $(altezza, peso)$.
E ammessa nel peso una tolleranza del 10%, si ottiene una regione del piano cartesiano, costituita da punti $(altezza, peso)$, delimitata da 2 rette.
(E 2 segmenti, a voler essere pignoli, e il segmento di destra non è ben definito: fino a quale altezza massima la formula è da ritenersi valida? Non vorremo mica definire il peso ideale di una persona ipoteticamente alta 3 metri, quindi caso unico gravemente malata?)

Con l'altezza h (in centimetri) e il peso p (in chilogrammi) la Formula di Broca definiva (oggi esistono vari altri standard)

peso normale $= (h - 100) \pm 10\%$ (secondo alcuni, $h \geq 130$)

ovvero, con la corretta interpretazione del $\pm 10\%$, in senso intervallare,

peso normale $\in$

$$[(h - 100) - (h - 100)10\%, (h - 100) + (h - 100)10\%]$$

e qua – a conti fatti – riconosciamo 2 rette e 3 regioni del piano Ohp:

sottopeso $p < 0.9\,h - 90$ (sotto la retta)

sovrappeso $p > 1.1\,h - 110$ (sotto la retta)

e la terza regione, dei normopeso, è quella fra le 2 rette. (Secondo certi Autori, $\pm 20\%$ invece che $\pm 10\%$).

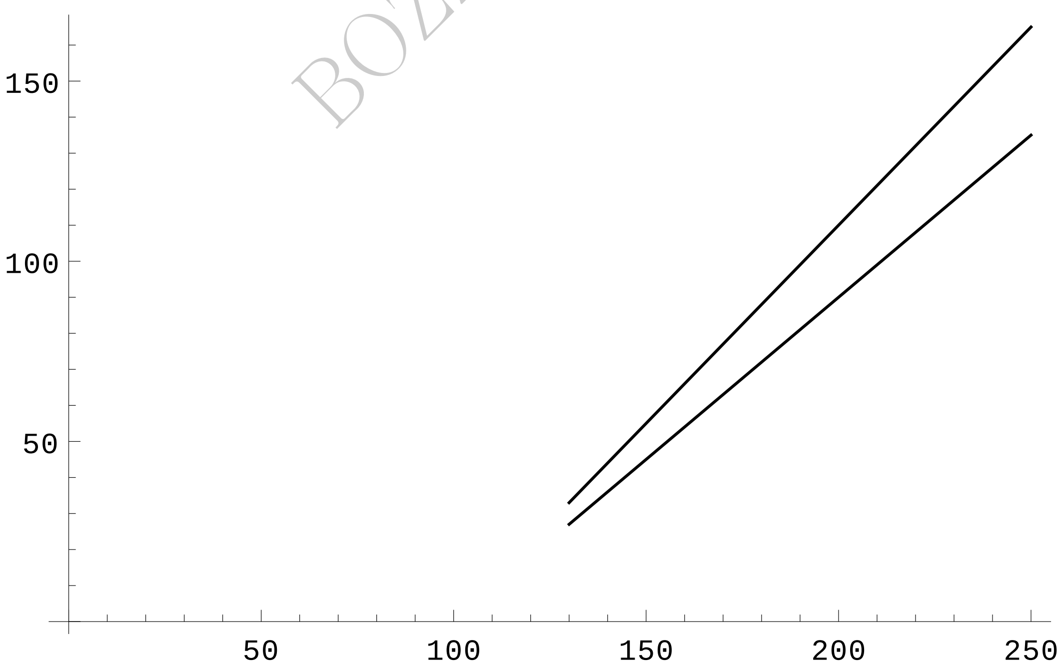


Figure 8: Le 2 rette estreme per i normopeso secondo la Formula di Broca con la tolleranza del 10%, limitatamente ad altezze fra 130 e 250 cm.

> Come sarebbe la situazione di 53 kg e 1.70 m? (Si converta in centimetri).

9.13 Nota finale sulle rette oblique

Le rette oblique con pendenza verso l'alto sono grafici di funzioni che "crescono sempre ugualmente".

Per esempio il volume V di liquido in una provetta al crescere del livello h oltre la parte "semisferica": $V = m\,h + q$, dove q è il volume della parte "semisferica" della provetta.

9.14 Nota sui modelli matematici

Il fatto che la formula di Broca per il peso ideale certamente smetta di avere senso in qualche punto imprecisato – non esiste alcun peso ideale per persone alte un chilometro e anzi è dubitabile già per 3 metri – è un caso specifico dell'osservazione generale seguente.

Molte formule delle Scienze Applicate hanno un qualche dominio di ragionevolezza in cui modellizzano bene la realtà sensibile, divenendo sempre meno sensate verso imprecisati estremi.

Leggiamo per esempio in un articolo scientifico (`https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/22211780/`)

> The Mosteller formula underestimates BSA in the paediatric population and must be used with precautions because of low precision, most pronounced in neonates and infants.

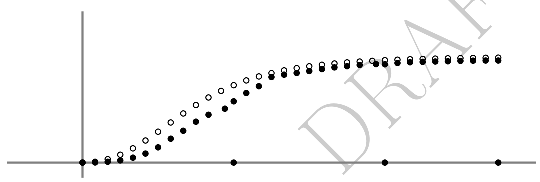
(E certo non calcolerà bene l'area della superficie corporea di un embrione di forma pressochè sferica).

9.15 I modelli per fare l'interpolazione, spesso bene

La semplice funzione (modello)

$$v(t) = \frac{14}{1 + t^{-2}\,\mathrm{e}^{-t}} \qquad 0 < t \leq 2.75$$

approssima per i 2.75 anni dal 1 dicembre 2020 (tempo 0) all'inizio del settembre 2023 (tempo 2.75, due anni e 9 mesi ovvero tre quarti d'anno) il numero totale di dosi di vaccino somministrate, a livello mondiale, in miliardi.
(Vedasi https://ourworldindata.org/covid-vaccinations con opzione `cumulative`).



Per esempio per $t = 2$ (cioè a 2 anni dall'inizio) si trova 13.5 (cioè 13 miliardi e mezzo; il valore vero era 13 miliardi al 1 dicembre 2022).

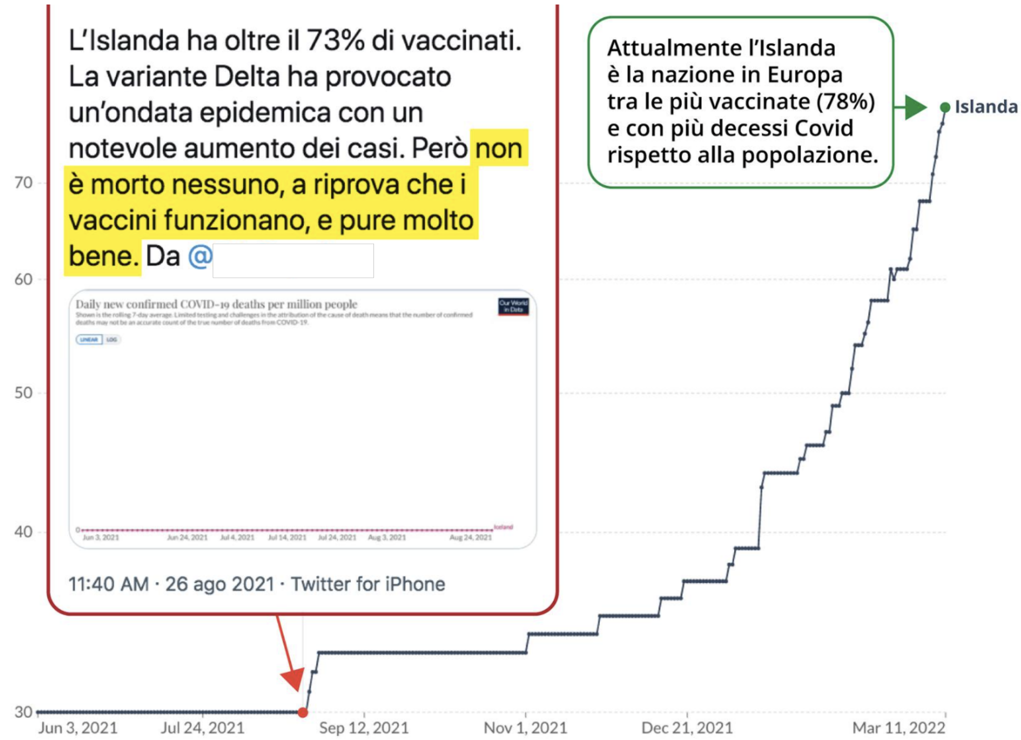
Con la formula data si può ottenere un valore per esempio per il, poniamo, 15 settembre 2022, che se non esatto sarà comunque verosimilmente vicino al vero: non avranno mica sospeso a livello mondiale le vaccinazioni dal 1 al 15 settembre per poi fare nella seconda metà di settembre quelle di tutto il mese, no?
L'interpolazione riesce *spesso* bene.

9.16 I modelli per fare l'estrapolazione, spesso male

Se un valore evolve nel tempo secondo una legge empirica (sperimentale) ci viene naturale azzardare una previsione per il futuro. Questo processo è molto meno garantito dell'interpolazione.
Se abbiamo di giorno in giorno, per un fenomeno, i valori

0 0 0 0 0 0 0 0 0

è ovvio che ci viene naturale – in assenza di altre informazioni – azzardare il valore 0 per il giorno successivo.


L'Islanda ha oltre il 73% di vaccinati. La variante Delta ha provocato un'ondata epidemica con un notevole aumento dei casi. Però non è morto nessuno, a riprova che i vaccini funzionano, e pure molto bene. Da @
Daily new confirmed COVID-19 deaths per million people
11:40 AM · 26 ago 2021 · Twitter for iPhone
Attualmente l'Islanda è la nazione in Europa tra le più vaccinate (78%) e con più decessi Covid rispetto alla popolazione.
Islanda
70
60
50
40
30
Jun 3, 2021
Jul 24, 2021
Sep 12, 2021
Nov 1, 2021
Dec 21, 2021
Mar 11, 2022

ESERCIZI SULLA LEZIONE 9

9.17 Esercizio risolto a – Retta e sangue

$_{\mu 2018}$ $\star$ Supponiamo che nel sangue di una persona una certa sostanza abbia alle 8:00 di mattina concentrazione 50 mg/dl e alle 6:00 di sera concentrazione 82 mg/dl. Esprimendo i tempi in ore, dallo 0 della mezzanotte, i valori dati individuano 2 punti nel piano cartesiano con i tempi t sull'asse delle ascisse e le concentrazioni y sull'asse delle ordinate (con o senza unità di misura).
Trovare la retta per i 2 punti espressa in forma esplicita, senza unità di misura. (Con essa si potrebbe ipotizzare la concentrazione in qualunque orario intermedio, supponendo una variazione lineare, che in assenza di altre indicazioni appare la più ragionevole approssimazione; ma qua non ne faremo nulla).

Svolgimento

Osservato che le 6:00 di sera sono le 18:00, cioè a 18 ore dal tempo 0, i valori dati individuano i 2 punti del piano cartesiano

$$(8\,h, 50\,mg/dl),\quad (18\,h, 82\,mg/dl)\quad \text{ovvero meglio}\quad (8,50),\quad (18,82)$$

e ricordando la formula della retta per 2 punti troviamo

$$\frac{t-t_2}{t_1-t_2} = \frac{y-y_2}{y_1-y_2}$$

$$\frac{t-18}{8-18} = \frac{y-82}{50-82}$$

$$\frac{t-18}{-10} = \frac{y-82}{-32} \quad \Big/ \cdot(-1)\cdot 10\cdot 32$$

$$32\,(t-18) = 10\,(y-82)$$

$$32\,t - 576 - 10\,y = -820$$

$$-10\,y = -32\,t - 244$$

$$\boxed{y = 3.2\,t + 24.4}$$

anche esprimibile con

$$\boxed{y = \tfrac{16}{5}\,t + \tfrac{122}{5}}$$

(Da cui p.es. a mezzogiorno, $t := 12$, la concentrazione ipotetica 62.8 mg/dl).

9.18 Esercizio risolto b – Retta e sangue

$_{\mu 2018}$ $\star$ Supponiamo che nel sangue di una persona una certa sostanza abbia alle 6:00 di mattina concentrazione 70 nmoli/L e alle 9:00 di sera 150 nmoli/L. Esprimendo i tempi in ore, dallo 0 della mezzanotte, i valori dati individuano 2 punti nel piano cartesiano con i tempi t sull'asse delle ascisse e le concentrazioni y sull'asse delle ordinate (con o senza unità di misura, h e poi nmoli/L).
Con la retta per i 2 punti si può ipotizzare la concentrazione in qualunque orario intermedio, supponendo una variazione lineare, che in assenza di altre indicazioni appare la più ragionevole approssimazione. Con l'equazione esplicita di quella retta, senza unità di misura, calcolare l'ora in cui la concentrazione è salita a ≥ 110 (nmoli/L, unità di misura che non esprimiamo per semplicità).

SVOLGIMENTO

Osservato che le 9:00 di sera sono le 21:00, cioè a 21 ore dal tempo 0, i valori dati individuano i 2 punti del piano cartesiano

$$(6\,h, 70\,nmoli/L), \quad (21\,h, 150\,nmoli/L) \qquad \text{ovvero meglio} \qquad (6, 70), \quad (21, 150)$$

e ricordando la formula della retta per 2 punti troviamo

$$\frac{t-t_2}{t_1-t_2} = \frac{y-y_2}{y_1-y_2}$$

$$\frac{t-21}{6-21} = \frac{y-150}{70-150}$$

$$\frac{t-21}{-15} = \frac{y-150}{-80} \qquad \Big/ \cdot (-1) \cdot 15 \cdot 80$$

$$80\,(t-21) = 15\,(y-150)$$

$$80\,t - 1680 - 15\,y = -2250$$

$$-15\,y = -80\,t - 570$$

e dividendo per -15

$$y = \frac{16}{3}\,t + 38$$

e ora risolviamo la disequazione della concentrazione $y \geq 110$

$$\frac{16}{3}\,t + 38 \geq 110$$

$$\frac{16}{3}\,t \geq 110 - 38$$

$$\frac{16}{3}\,t \geq 72$$

$$t \geq 72 \cdot \frac{3}{16} = 9 \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{2} = 13.5$$

cioè a 13.5 ore dalla mezzanotte, cioè 13 ore e mezza, cioè alle

$$\boxed{13{:}30}$$