10 Piano cartesiano – II parte

10.1 Iperbole equilatera riferita agli asintoti

Il grafico della funzione *passaggio al reciproco*, già vista,

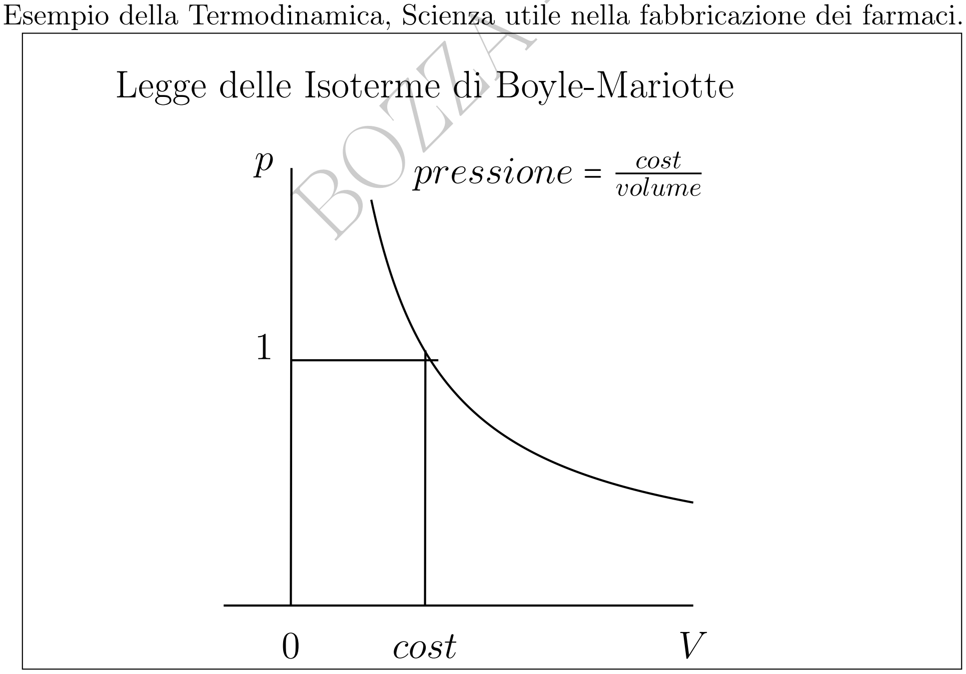
$$y = \frac{1}{x}$$

è una ***curva***([68]) e più in generale

$$y = \frac{cost}{x} \qquad cost \neq 0$$

ha grafico una curva detta ***iperbole equilatera (riferita agli asintoti)*** e questa è una delle formule di più ampia ricorrenza nelle Scienze Applicate.

Esempio della Termodinamica, Scienza utile nella fabbricazione dei farmaci.



Queste funzioni $y(x) = \frac{cost}{x}$ sono caratterizzate da
"al raddoppiare di x dimezza y e viceversa"

[68]Una definizione rigorosa di *curva* è alquanto complessa, e in questa trattazione elementare supporremo noto il concetto. Le curve più semplici sono le rette.

10.2 Circolo e cerchio

Tutti i grafici sono *curve*,
e hanno un'equazione *esplicita* $y = f(x)$,
ma esistono curve che non sono grafici,
e hanno un'equazione *implicita* $f(x, y) = 0$.

In particolare il ***circolo*** di raggio r e centro (x_0, y_0):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Altri Autori lo chiamano *cerchio* ma in questo testo il ***cerchio*** sarà la regione "dentro" un circolo.
Questa *disequazione*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$$

se verificata rappresenta lo *stare dentro il circolo* ovvero *appartenere* al corrispondente *cerchio*.
Ricordiamo
la lunghezza del circolo $2\pi r$
l'area del cerchio πr^2.

10.3 Diagramma bolle e sua ambiguità

L'area del cerchio può essere usata per rappresentare un valore numerico: i ***diagrammi a bolle*** possono rappresentare 1 o 2 o 3 liste di valori corrispondenti, come vedremo.

Esempio 1 – unidimensionale. Ecco un esempio semplicissimo, in cui 1 lista di 6 numeri viene rappresentata con 6 cerchi, variamente colorati per identificarli. Il cerchio rosso, il più grande, rappresenta i morti di covid-19 in Italia nella prima ondata del 2020.

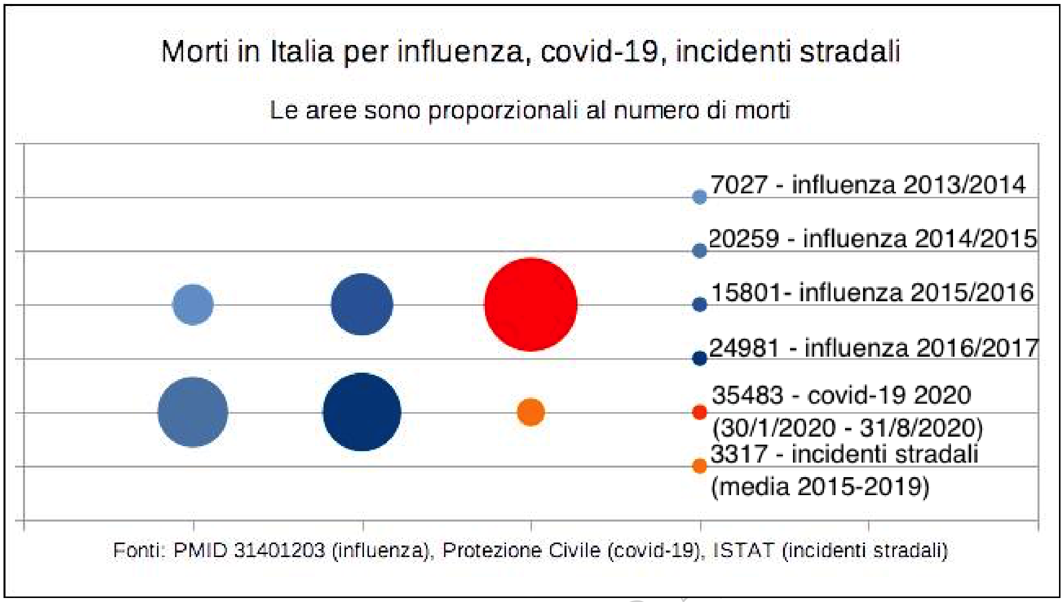


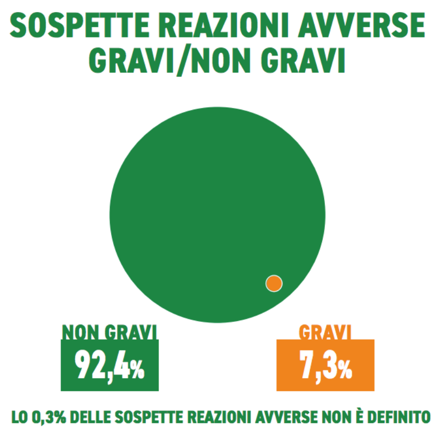
Figure 9: Esempio di rappresentazione grafica di 6 dati numerici

(Si rassicuri l'automunito lettore: nonostante la ciclopica perdita di anni di vita umana causata dai veicoli, con incidenti causati magari da 1 che uccide 2 o 3, anche bambini o giovani con aspettativa di vita residua di 50 anni, nulla di simile alle limitazioni generate dal covid sta per avvenire contro i veicoli, che muovono un mercato mondiale smisurato, con un numero di veicoli a 4 ruote dell'ordine di 10^9 che consumano carburante dell'ordine di 10^{12} litri all'anno).

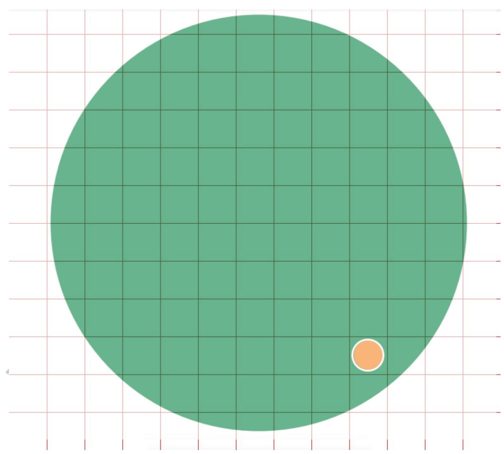
Purtroppo secondo altri Autori non l'area dei cerchi bensì il diametro rappresenta il terzo valore di ogni terna di valori, per cui i diagrammi a bolle di fatto possono essere molto fuorvianti guardandoli, e facendoli bisogna specificare lo standard usato.
E ancor peggio coi diagrammi a bolle tridimensionali.

Esempio 2 – unidimensionale problematico. Con il covid-19 c'è stato un fiorire di fake news sui vaccini, spesso di antivaccinisti, e questo si sa. Ma vediamo in questo esempio la mostruosa sproporzione fra l'area del cerchio arancio e quello verde: mentre si

afferma che l'arancio rappresenta il 7,3% la sua area è meno dell'1%. Guardando bene, è possibile che abbiano usato lo standard di rappresentare il dato con il diametro invece che con l'area, ma allora avrebbero dovuto accostare i cerchi e non sovrapporli perchè sovrapponendoli qualunque persona ragionevole riterrà che il dato sia rappresentato dall'area.
È ovvio che falsi di questo genere generano diffidenza verso i vaccini.



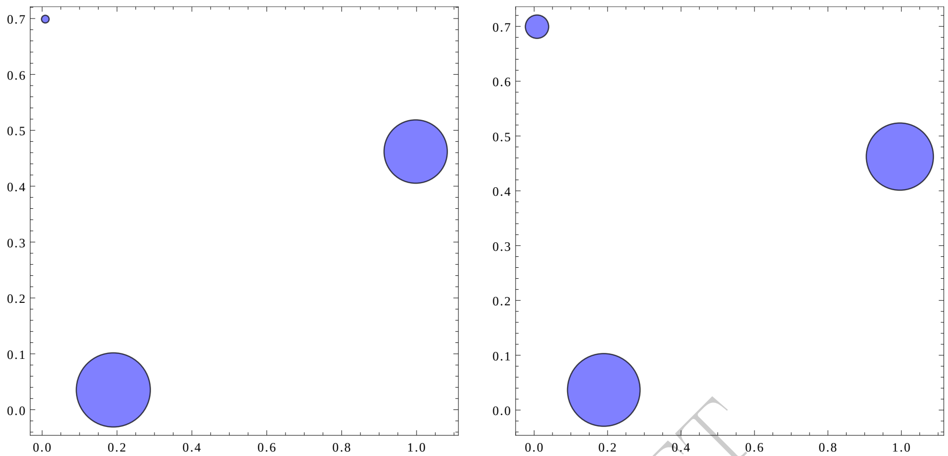
Fonte: AIFA, p. 5 in: Link



Con quadrettatura sovrapposta

Edit. Una serie di inchieste ha poi rivelato che era una cosa deliberata: nelle indicazioni che furono mandate ai grafici, l'AIFA scrive che l'area del cerchio delle manifestazioni gravi non sia proporzionale, "potrebbe essere più piccolo".

Esempio 3 – problematico.



Esempio di 2 rappresentazioni delle stesse 3 terne di numeri coi diagrammi a bolle, a sinistra con le aree e a destra coi diametri.

Problematicità ulteriore del caso tridimensionale. Ovviamente il diagramma a bolle non funziona bene se 2 o più bolle si sovrappongono esattamente (o quasi esattamente se le bolle vengono rappresentate piene), e in quel caso il diagramma ottenuto è **fuorviante**.

Esercizio$_\mu$ Si verifichi se il punto $(2, 2)$ sta nel circolo

$$x^2 + y^2 + 2\,x - 10\,y + 1 = 0$$

Esercizio$_\mu$ Esplicitare i 2 semicircoli costituenti il circolo.
(Si troverà $y = 5 \pm \sqrt{-x^2 - 2x + 24}$).

10.4 La parabola

La parabola è una curva del piano euclideo (e poi cartesiano) con la forma più o meno della lettera

U

ovvero del simbolo ⊂, che si estende indefinitamente, allungandosi molto più che allargandosi (comunque si allarga indefinitamente).
Nel piano cartesiano viene di solito orientata con asse di simmetria verticale, più o meno così: ∪ oppure ∩.
Nelle varie applicazioni scientifiche, può interessarne una parte piuttosto che un'altra (raramente tutta: è un'astrazione matematica, come la retta).

Nel piano euclideo tutte le parabole sono *simili*, cioè sovrapponibili salvo ingrandimento, come i circoli ma è molto meno evidente.

Esempio, duplice. Si hanno – oggi si usa di meglio – le Formule di Keys per il peso ideale y dell'uomo e della donna, data l'altezza x:

$$y = 22.1\,x^2$$
$$y = 20.6\,x^2$$

(ragionevolmente considerabili per $x \geq 1.30$, e fino a un x_{max} ragionevolmente fissabile; si usano i metri e i chilogrammi).

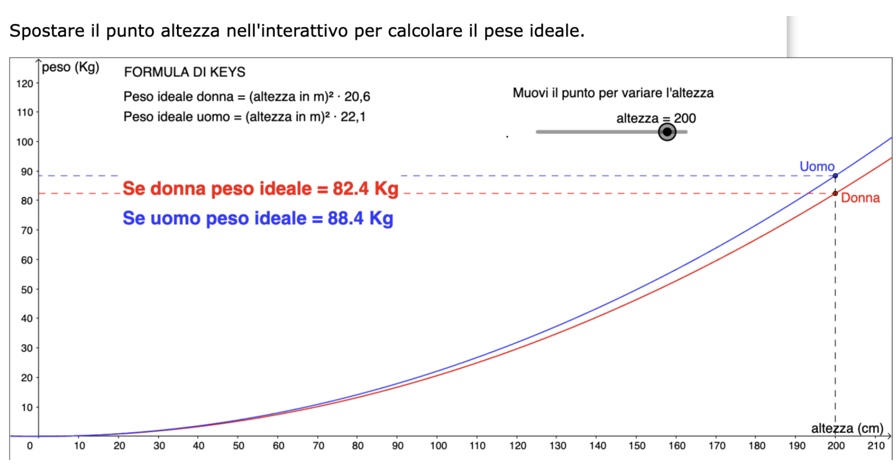


Figure 10: Screenshot da https://www.isissvalleseriana.it/Matematica/matecomeprezzemolo/peso_ideale_formula_di_keys.html

10.5 Equazione della parabola con asse verticale

La generica **parabola** con asse verticale ha equazione

$$y = a\,x^2 + b\,x + c \qquad a \neq 0$$

La disequazione

$$y \geq a\,x^2 + b\,x + c$$

rappresenta lo stare *sopra* la parabola (in *senso debole*, per avere il *senso forte* si ponga >, e questo è un fatto generale).

E ovviamente

$$x = a\,y^2 + b\,y + c \qquad a \neq 0$$

rappresenta la generica parabola con asse orizzontale.

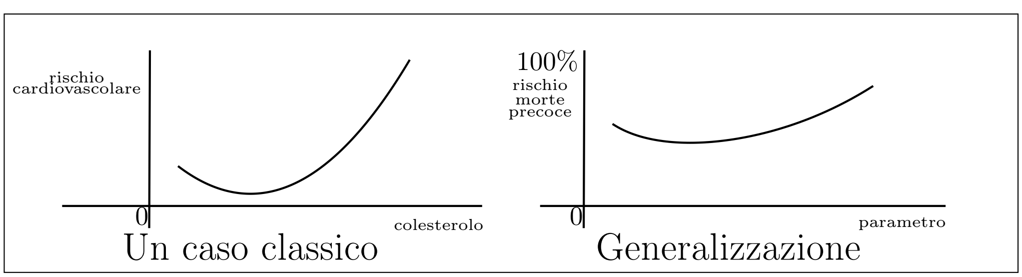
La parabola è simmetrica rispetto ad una retta detta *asse* che interseca la parabola in un punto detto *vertice* della parabola.

Esempio. in uno studio scientifico si è stabilito

$$weight \leq -3{,}767 + 89.11 * length + 1.237 * length^2 \qquad 40 \leq lenght \leq 55$$

(con la lunghezza in centimetri e il peso in chilogrammi) rappresenta bene una soglia per il 90% dei neonati (Hospital Israelita Albert Einstein, San Paolo, Brasile, 1995-1998). (Con 50 cm dà 3781 grammi). (Si noti che usano il punto decimale, e la virgola come separatore delle migliaia), e lo capiamo dal numero in 89.11).

10.6 Le curve a forma di J



Un caso classico Generalizzazione

La parabola ci offre un semplice modello del concetto, più generale, di *curva a forma di J*. Traiamo da Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *J curve*:

> In medicine, the 'J curve' refers to a graph in which the x-axis measures either of two treatable symptoms (blood pressure or blood cholesterol level) while the y-axis measures the chance that a patient will develop cardiovascular disease (CVD). It is well known that high blood pressure or high cholesterol levels increase a patient's risk. What is less well known is that plots of large populations against CVD mortality often take the shape of a J curve which indicates that patients with very low blood pressure and/or low cholesterol levels are also at increased risk.

È nozione comune che il colesterolo troppo alto possa aumentare fare male, ma poco considerato è il caso del colesterolo troppo basso, e similmente per la pressione.
Senza voler qua fare Medicina, citiamo comunque da un articolo(69) scientifico:

> Both low and high HDL-C were associated with increased mortality risk. We recommended 50–79 mg/dL as the optimal range of HDL-C among Chinese adults.

È ben possibile che tali curve a forma di J siano tanto diffuse quanto poco considerate

[69] https://www.thelancet.com/journals/lanwpc/article/PIIS2666-6065(23)00192-X/fulltext

10.7 Area del segmento parabolico, ed epidemie

Mentre l'area del triangolo è notoriamente $\frac{1}{2}\,b\,h$, l'area del segmento parabolico – la cui definizione lasciamo all'intuitivo lettore – è

$$A = \frac{2}{3}\,b\,h$$

Questo ci permette di stimare a colpo d'occhio il numero totale di morti di un'ondata epidemica disponendo di un istogramma a barre (bar chart) dei morti giornalieri, se – come spesso succede – esso disegna più o meno un segmento parabolico:

$$\boxed{\text{morti di un'ondata epidemica} = \frac{2}{3}\,durata \times picco} \qquad (15)$$

Ovviamente la durata va intesa in giorni e sarà bene non prendere il valore di picco effettivo ma mediarlo coi valori dei giorni vicini, anche a occhio, o ancor meglio usare, se disponibile, il massimo della *media mobile a 7 giorni*.

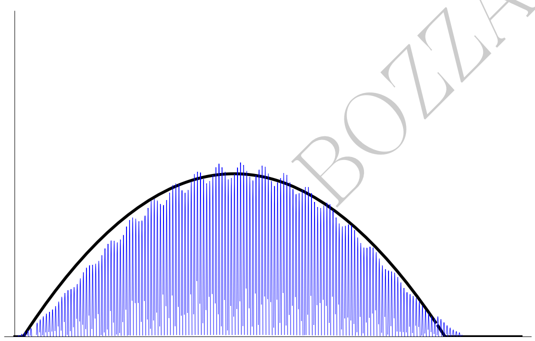


Figure 11: Modellizzazione del numero giornaliero di morti di un'epidemia con una parabola

Per esempio per un'ondata epidemica di 2 mesi con picco di 1000 morti al giorno si ottengono 40'000 morti, e questi 3 numeri sono grossolana approssimazione della prima ondata del covid in Italia nel 2020.

Nei Complementi si mostra migliore modellizzazione delle epidemie, con curve vagamente a campana asimmetriche, con *coda destra*, pure *pesante*.

Complementi

10.8 Complementi – Modellizzare epidemie: Gompertz

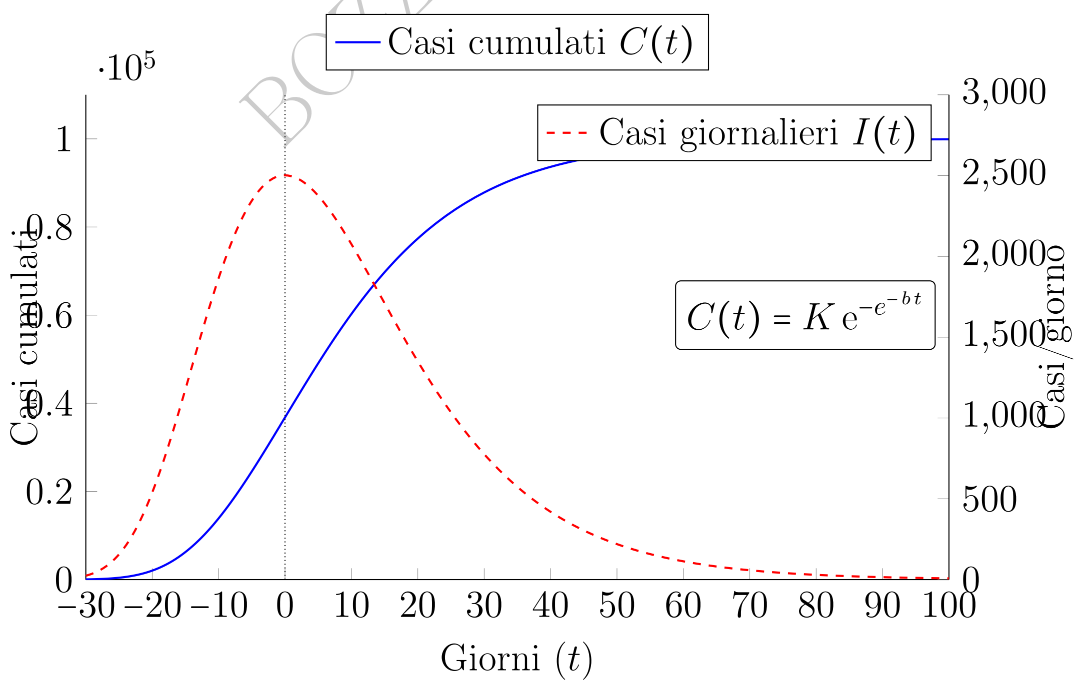
L'andamento reale tipico di un'ondata epidemica – cumulativo di morti o casi – viene modellizzato da funzioni di Gompertz:

$$K\,\mathrm{e}^{-e^{-b\,t}}$$

Per esempio, nella figura sottostante

$K = 100\,000$

$b = 0.068$



Si noti che $I(t)$ è $C'(t)$, la derivata, concetto che verrà illustrato in seguito.

10.9 Complementi – Coniche date implicitamente

Altre *coniche* in equazione implicita sono queste, con $a, b > 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{un'}\textit{iperbole}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad \text{un'altra } \textit{iperbole}$$

e le rette $y = \pm\frac{b}{a}x$ si chiamano *asintoti* dell'iperbole;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \textit{ellisse} \text{ (in } \textit{forma canonica}^{(70)}\text{)}$$

e la disequazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

se verificata rappresenta lo *stare dentro l'ellisse*. Se $a > b$ l'ellisse appare "ribassata" e se $b > a$ l'ellisse appare "allungata verso l'alto".

Esercizio$_\mu$ Con $a := 3$ e $b := 4$ si scrivano, esplicitino (per archi) e disegnino le 2 iperboli e l'ellisse.

10.10 Complementi – Note finali sulle coniche

L'ellisse – in generale, anche se spostata in qualunque punto del piano, e allora con equazione diversa – è il *luogo*[71] dei punti del piano che ha costante la somma delle distanze da 2 punti detti *fuochi*.
Un'analoga proprietà, con la differenza, vale per le iperboli.
La parabola è luogo dei punti per i quali è costante la distanza da un punto – detto *fuoco* – e da una retta – detta *direttrice*. nel *vertice*.
Parabole, ellissi e iperboli – disposte in qualunque modo nel piano – si chiamano **coniche**, e comprendono i circoli (che sono ellissi con $a = b$, se il centro è O).

Sono intersezione del piano cartesiano con un *cono completo*.

[70] *Canonico* significa, con parola internazionale di uso più moderno, *standard*.
[71] Insieme. Termine usato in geometria.

10.11 Complementi – Risolvere equazioni con disegni?

Il piano cartesiano permette molte volte di risolvere graficamente equazioni e sistemi di equazioni.

Come norma generale bisogna risolvere analiticamente le equazioni e i sistemi di equazioni ed eventualmente disequazioni, cioè coi calcoli, per quanto possibile, perchè esistono casi in cui il disegno inganna, perfino se fatto col computer.

Tuttavia fare i disegni è comunque utilissimo:

(a) per verificare la correttezza dei risultati trovati;

(b) per una comprensione complessiva della situazione;

(c) per presentare divulgativamente i risultati, o per presentarli in modo chiaro in relazioni tecniche;

(d) per un tentativo seppure incerto di soluzione almeno approssimata quando il calcolo analitico è impossibile o proibitivamente difficile.

Esempio. Con rifermento al punto (d) sopradetto, si consideri questo *sistema di 2 equazioni in 2 incognite di* 6° *grado*, molto difficile da risolvere analiticamente:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 3\,x\,y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Dal disegno (sperabilmente, e, in effetti, in questo caso non ingannevole) vediamo che ci sono 4 soluzioni, e abbiamo anche loro approssimazioni, tanto migliori quanto più grande e preciso è il disegno.

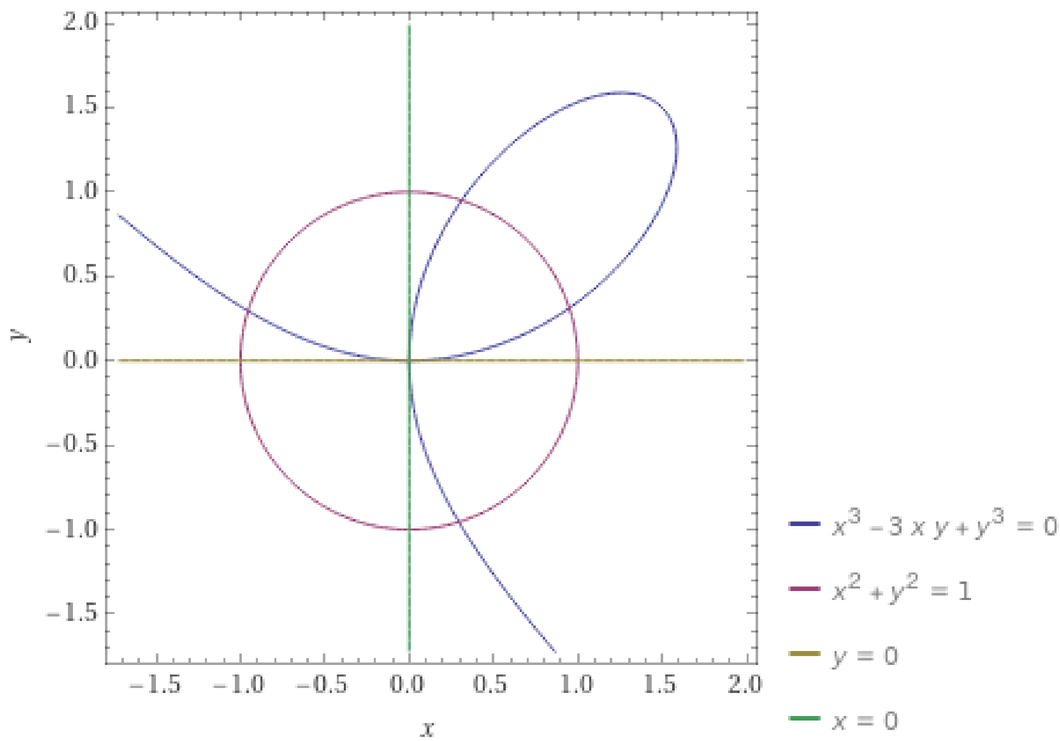


Figure 12: Intersezioni del folium di Cartesio col circolo unitario di centro l'origine

La soprastante figura è stata ottenuta con la più potente intelligenza artificiale matematica attualmente online gratuitamente, WolframAlpha, (qua utilizzata per ben piccola cosa) con cui il futuro professionista farà bene a familiarizzare. Si segua questo LINK.
Si noti che WolframAlpha dice che non ci sono soluzioni, ma questo è dovuto al fatto che per fare un disegno chiaro sono state aggiunte alle 2 equazioni date le 2 equazioni degli assi cartesiani, e togliendo queste ultime dà le 4 soluzioni cercate, approssimate con parecchi decimali: LINK.

10.12 Complementi – Altre curve nel piano cartesiano

Con le rette (non verticali) e le coniche, e i grafici di $\operatorname{sgn}(x)$ e $|x|$, abbiamo visto grafici che ricorrono un'infinità di volte nelle Scienze Applicate, e ce ne sono infiniti altri, per esempio (quello della funzione)

$$y = \sqrt[3]{x}$$

e, oltre alle rette verticali, infinite altre curve in rappresentazione implicita, per esempio il *folium di Cartesio*

$$x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y = 0 \qquad a > 0$$

la cui esplicitazione è proibitivamente difficile al livello di questo testo elementare; ma si verifichi la potenza e l'utilità di WolframAlpha scrivendovi

`x^3+y^3-3xy=0`

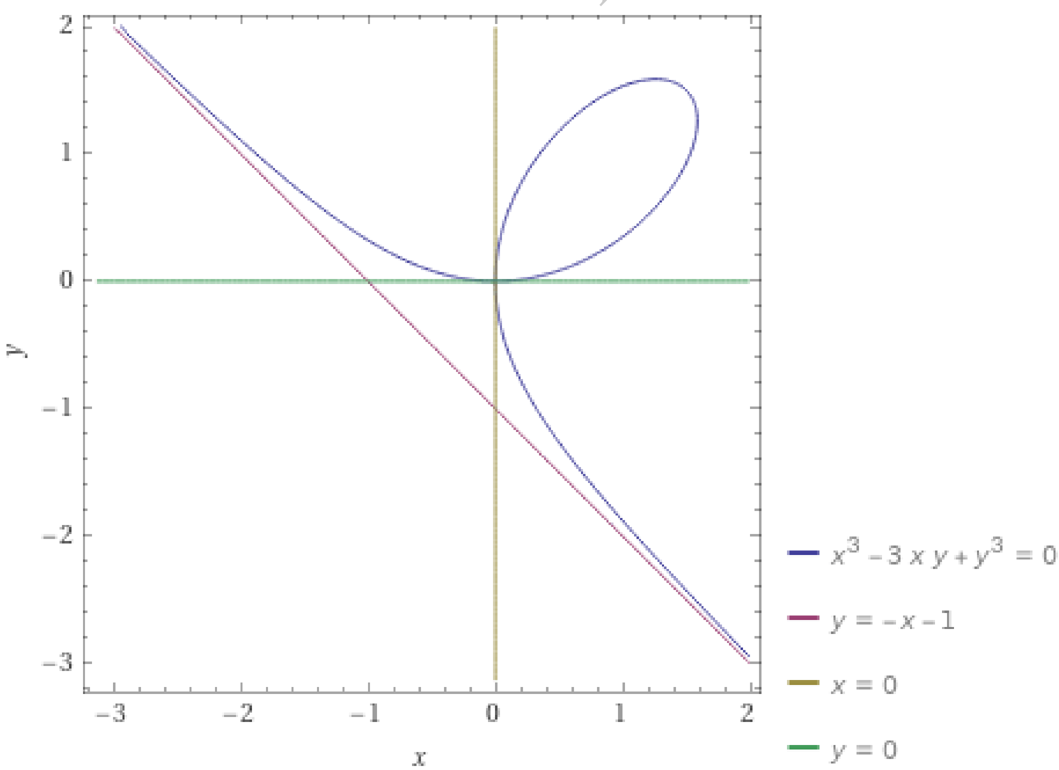


Figure 13: Folium di Cartesio e suo asintoto $y = -x - 1$

(avendo scelto $a := 1$ per fare un esempio concreto).

10.13 Complementi – Esempio farmaceutico.

In questo documento[link->]della Food and Drug Administration (FDA), ente statunitense internazionalmente considerato autorevolissimo, ci si impegni a capire le ultime 2 righe a pagina 22 e le prime 6 a pagina 23, guardando attentamente le figure, riguardanti la produzione dei farmaci.
Si apprezzino poi le figure a pagina 24.

10.14 Complementi – Le famiglie di curve

Un esempio di ***famiglia*** (insieme) di curve in rappresentazione implicita ci viene dalla Termodinamica, con la Legge di van der Waals

$$\left(p + a\,\frac{n^2}{V^2}\right)(V - n\,b) = n\,R\,T$$

nel piano (V, p), con R, n, a, b costanti, al variare di T.

Si consideri come ulteriore esempio di *famiglia* (insieme) di curve in rappresentazione implicita il *folium di Cartesio*

$$x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y = 0 \qquad a > 0$$

la cui esplicitazione è proibitivamente difficile al livello di questo testo elementare; ma si verifichi la potenza e l'utilità di WolframAlpha scrivendovi

`x^3+y^3-3x y=0`

(avendo scelto $a := 1$ per fare un esempio concreto).