Approfondimenti

Rinaldo Rui

ultima revisione:
21 maggio 2025

2 Primo Principio della Termodinamica

2.2 Lezione #6

2.2.1 Trasmissione del Calore: Conduzione

Iniziamo con due definizioni, che ci saranno utili anche in futuro: la **portata** ed il **flusso** di Energia (o di una qualsiasi quantità scalare come ad esempio una massa) E.

- **Portata** q: quantità (scalare) di Energia nell'unità di tempo che passa attraverso una superficie A;
- **Flusso** $\vec{h}$: quantità (vettoriale) di Energia A nell'unità di tempo e per unità di superficie.

Se facciamo l'analogia con l'acqua di un fiume, la **portata** è definita come la quantità d'acqua che passa attraverso l'intera sezione del fiume nell'unità di tempo. Il **Flusso**, detto anche **densità di corrente** (e impropriamente *corrente*), rappresenta invece la portata entro la sezione (unitaria) del fiume. Si tratta di un vettore in quanto ogni punto può avere una propria direzione ed un verso, ed un'intensità. Matematicamente possiamo esprimere il flusso come

$$\vec{h} = \frac{dE}{dA\ dt}\vec{u}$$

con $\vec{u}$ il versore parallelo alla direzione del flulsso. Integrando sulla superficie si ottiene

$$\int_A \vec{h} \cdot d\vec{A} = \int_A \frac{dE}{dA\ dt}\vec{u} \cdot \vec{n} dA = \frac{dE}{dt} = q$$

con $\vec{n}$ il versore perpendicolare al piano dA. Il prodotto scalare tra i due versori tiene conto della scelta della superficie sulla quale viene fatta l'integrazione.

Se definiamo con A la superficie che separa il sistema idrostatico di volume V dall'ambiente circostante [fig.1], possiamo definire l'Energia Interna U di

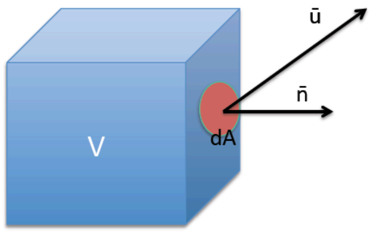

Figura 1: sistema definito dal volume V racchiuso dalla superficie A

questo sistema. Nell'ipotesi che il volume rimanga costante, il sistema non compie lavoro e pertanto il principio di conservazione dell'energia implica che la quantità di energia che esce dal sistema sia equivalente alla sua perdita di Energia Interna:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{dU}{dt}$$

La **Legge di Fourier** stabilisce che "il flusso di energia è opposto al gradiente della Temperatura"

$$\vec{h} = -k\vec{\nabla}T$$

dove k è la conducibilità termica ($Wm^{-1}K^{-1}$). Il gradiente è un operatore che trasforma una grandezza scalare in un vettore, le cui componenti sono le derivate parziali, rispetto alle variabili spaziali che descrivono la grandezza. Immaginiamo ora una superficie piana A perpendicolare all'asse x, per cui l'unico gradiente di temperatura è nella direzione dell'asse x; possiamo scrivere

$$h_x = \frac{dE}{dA\ dt} = -k\frac{dT}{dx}$$

In questa ipotesi la temperatura è costante lungo la superficie A perpendicolare a x e quindi possiamo facilmente integrare su A

$$\frac{dE}{dt} = \int_A \frac{dE}{dA\ dt}dA = -k\int_A \frac{dT}{dx}dA = -kA\frac{dT}{dx} = -\frac{dU}{dt}$$

Quest'equazione può essere applicata al caso di una parete di spessore D e di superficie A che separa il sistema a temperatura T_i dall'ambiente esterno a temperatura T_e. Nel caso di una parete in cui la variazione della temperatura in funzione dello spessore D sia costante ($dT/dx = \text{cost}$):

$$\frac{dT}{dx} = \frac{(T_e - T_i)}{D}$$

ed integrando nel tempo:

$$\Delta U = kA\frac{dT}{dx}\int_{\Delta t} dt = k\frac{A}{D}(T_e - T_i)\Delta t$$

Ma nel caso considerato non è stato fatto alcun lavoro in quanto la superficie A non si muove e quindi il volume V rimane costante. Per il Primo Principio della Termodinamica risulta $\Delta U = Q$, e posso scrivere alla fine l'equazione classica

$$Q = k\frac{A}{D}(T_e - T_i)\Delta t$$

Coerentemente con la definizione adottata, il calore scambiato risulta negativo quando la temperatura interna è superiore a quella esterna e quindi esce dal sistema verso l'ambiente, e viceversa.