SISTEMI MECCANICI UNIDIMENSIONALI (1 grado di libertà)

- $m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$
- ci concentriamo su sistemi con $F = F(x)$

$\rightsquigarrow$ si conserva l'ENERGIA

$$E(x,v) = \underbrace{T(v)}_{\text{en. cinetica}} + \underbrace{V(x)}_{\text{en. potenziale}}$$

è una cost. del moto

$$\rightarrow \quad E(x(t), v(t)) = \underbrace{E}_{\text{costante}}$$

- Le traiettorie sul piano di fase giacciono sulle curve di livello date dall'eq.

$$E(x,v) = E$$

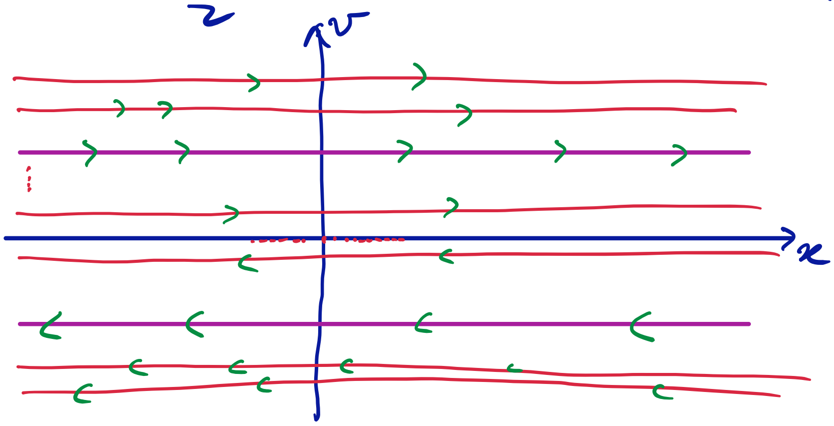
ES 1) PARTICELLA LIBERA

$\bar{f} = \begin{pmatrix} v \\ f(x) \end{pmatrix}$

$\ddot{x} = 0 \qquad E(x,v) = \frac{mv^2}{2}$

Curve di livello sono date da eq.

$$\frac{mv^2}{2} = E \rightarrow v = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}}$$



$v = \dot{x}$

$v > 0 \Rightarrow \dot{x} > 0$

$\Rightarrow x$ cresce cont

2) OSC. ARM.

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2, \quad E(x,v) = \frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

Curve di livello:

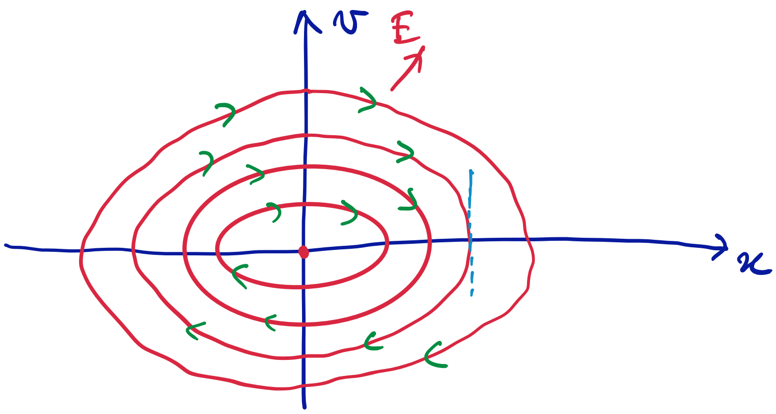
$$\frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = E$$

$E \neq 0$

$$\frac{v^2}{2E/m} + \frac{x^2}{2E/m\omega^2} = 1 \quad \leftarrow \text{ELLISSE}$$

$E = 0$

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = 0 \rightsquigarrow (x,v) = (0,0) \to \text{curva di liv. degenere (1 pto)}$$



Traiettorie giacciono sulle curve di livello

- nel semipiano superiore le frecce vanno verso DESTRA,
  " " inferiore " " " " SINISTRA;
- traiettorie attraversano l'asse delle ascisse VERTICALMENTE (se il pto di intersez. NON è di equil.):

[Tang. a una curva $y = f(x)$ nel piano (x,y) in un pto x_0 è la retta $y = \alpha x + q$ con $\alpha = f'(x_0)$; una retta verticale ha pendenza ∞ infinita]

La curva nel piano (x,v) avrà eq.

$$v = v(x)$$

$$\alpha = \frac{dv(x_0)}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1} = \dot{v} \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \frac{f(x_0)}{v(x_0)} \qquad (*)$$

x_0 è il pto di attraversam. dell'asse delle ascisse
→ se x_0 non è di equil. (cioè $f(x_0) \neq 0$),
allora $\alpha \to \infty$ (poiché $v(x_0) \to 0$). //

(*) $\alpha = \left. \dfrac{dv(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$ $\qquad v(x) = v(t(x))$

$v(t)$; è l'inversa di $x(t)$

Analisi qualitativa

$$E(x, v) = T(v) + V(x)$$

le curve di livello: $T(v) + V(x) = E$ ← cost.

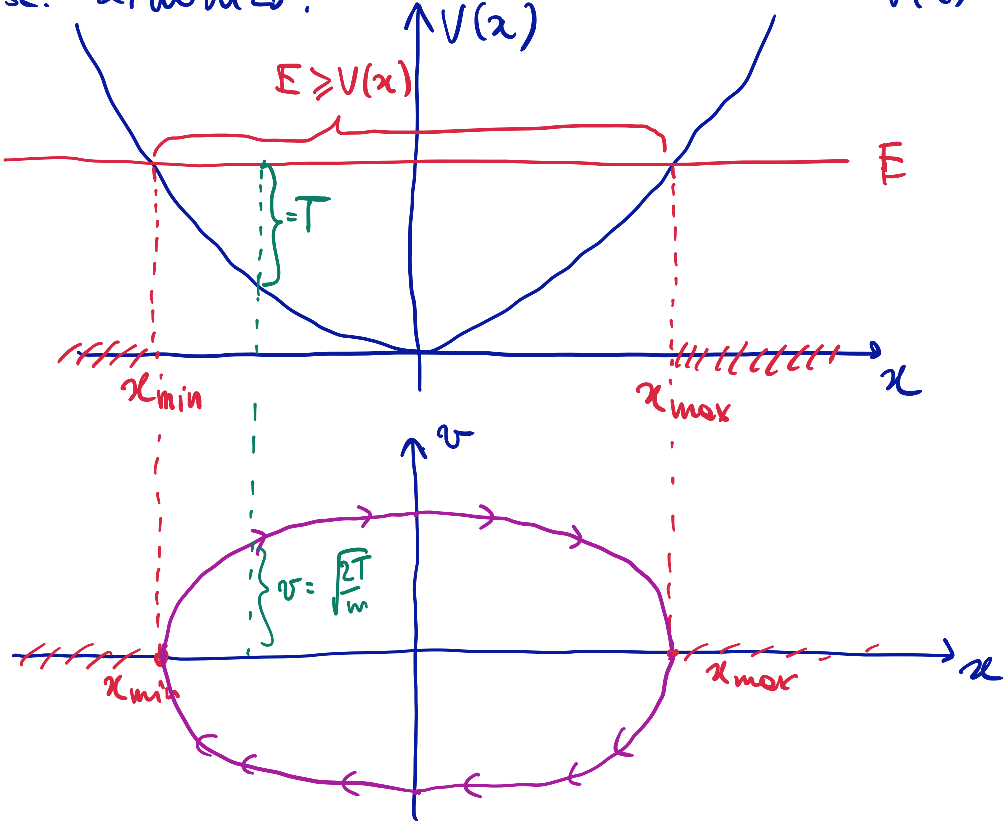
- $T(v) = \dfrac{mv^2}{2} \geq 0$

$$\Downarrow$$

$$E - V(x) \geq 0 \qquad (\cdot)$$

→ un pto x può stare su una curva di livello (e quindi essere un pto permesso, cioè un pto attraverso cui può passare una traiettoria) se soddisfa $(\cdot)$, cioè $V(x) \leq E$

ES. Osc. armonico: $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$



Differenza tra E e V mi dà T. Dato $T = \frac{mv^2}{2}$ ho $v = \pm\sqrt{\frac{2T}{m}}$

- $x(t) \in \{ x \in \mathbb{R} \mid V(x) \leq E \}$

  p. osc. armonico $\frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \leq E \rightarrow x^2 \leq \frac{2E}{m\omega^2}$

  $\hookrightarrow x(t) \in \left[\underbrace{-\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}_{x_{min}}, \underbrace{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}_{x_{max}} \right]$

- Nei pti dove $V(x) = E$ (x_{min} e x_{max} p. osc. arm.)

  $\hookrightarrow T = 0 \Rightarrow v = 0$

  Tali pti sono chiamati PUNTI D'INVERSIONE.

$$\ddot{x} = f(x) = -\frac{1}{m} V'(x)$$

pti invers. $V'(x) \neq 0$

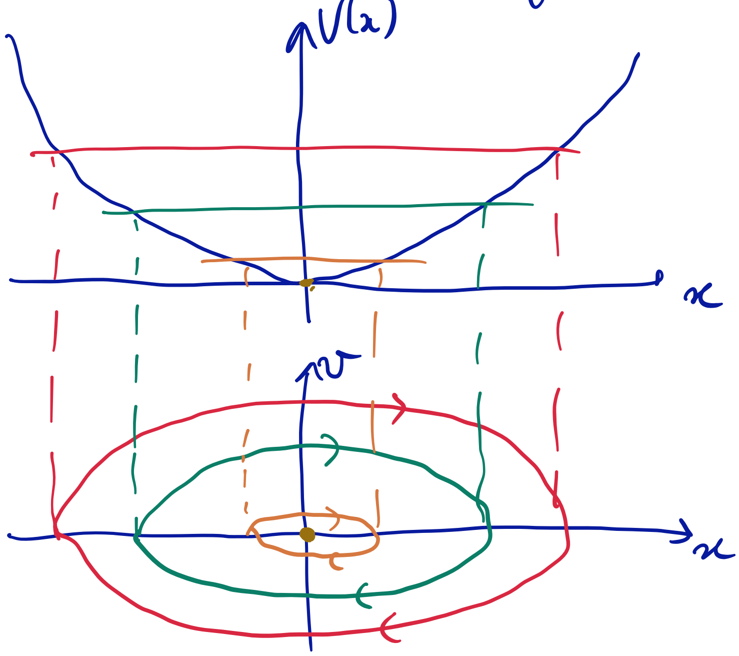
$\Rightarrow$ anche se $v = 0$ la traiettoria transita p. questi pti (forza non-nulla)

- Per osc. arm.

$E>0$: il moto è dato da una curva CHIUSA

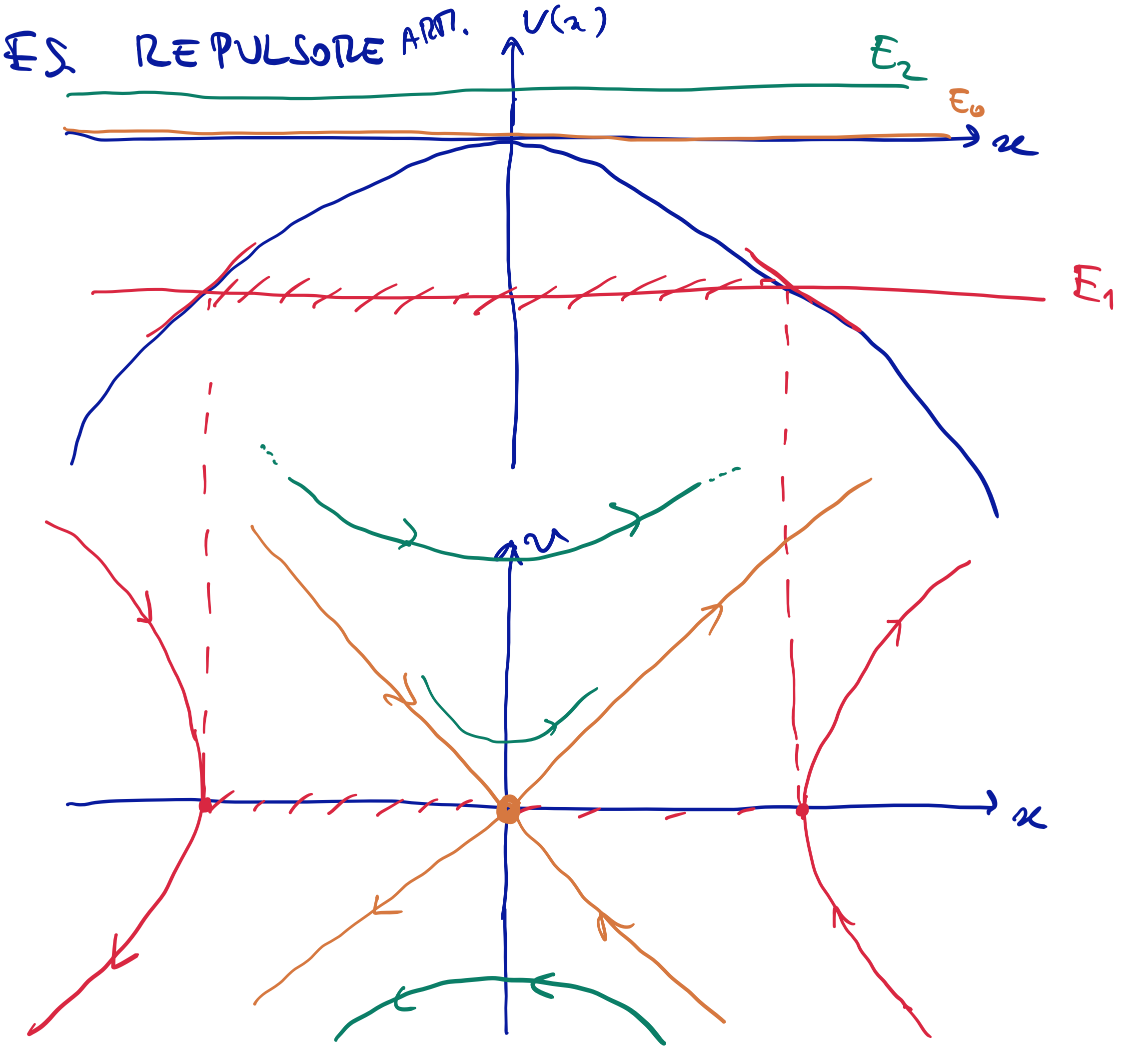
→ il moto $x(t)$ è una funz. PERIODICA

→ Traiettorie si possono ottenere (qualitativam.) semplicemente dal grafico di $V(x)$



$E=0$) l'unico pto per cui $V(x) \leq E$ è $x=0$ → il pto equil.

ES. REPULSORE ARM.



$V(x) = -\frac{1}{2} m \omega^2 x^2$

$(x, v) = (0,0)$ è pto di equil.

Notiamo delle traiettorie in $\mathbb{R}^2$ che si intersecano (non ce le aspettiamo perché il sist. è autonomo)
→ questo può avvenire solo per $t \to \pm\infty$

Vediamo se effettivamente le curve di livello sono qlle ricavate con l'analisi qualitativa:

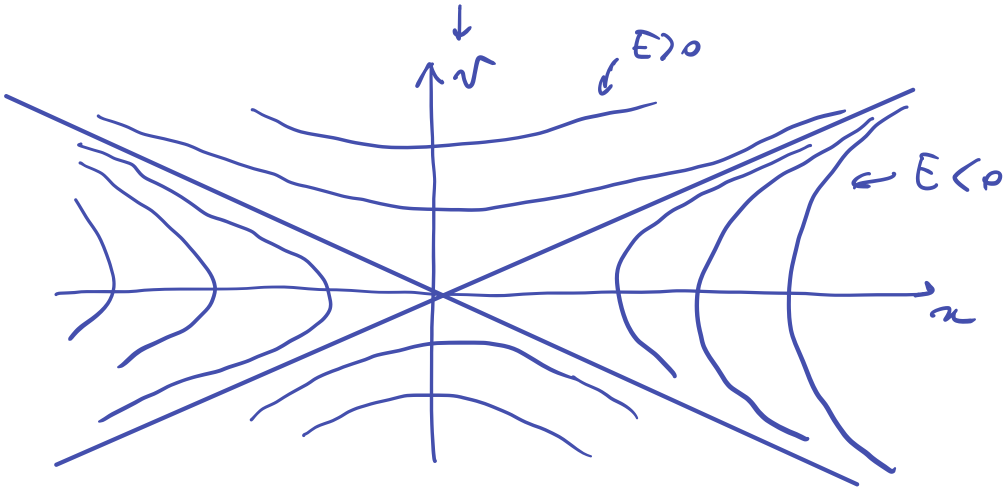
Rep. arm. $\qquad \ddot{x} = \omega^2 x \qquad E(x,v) = \frac{m v^2}{2} - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$

Curve di livello : $\qquad E(x,v) = E^{\leftarrow \text{cost.}}$

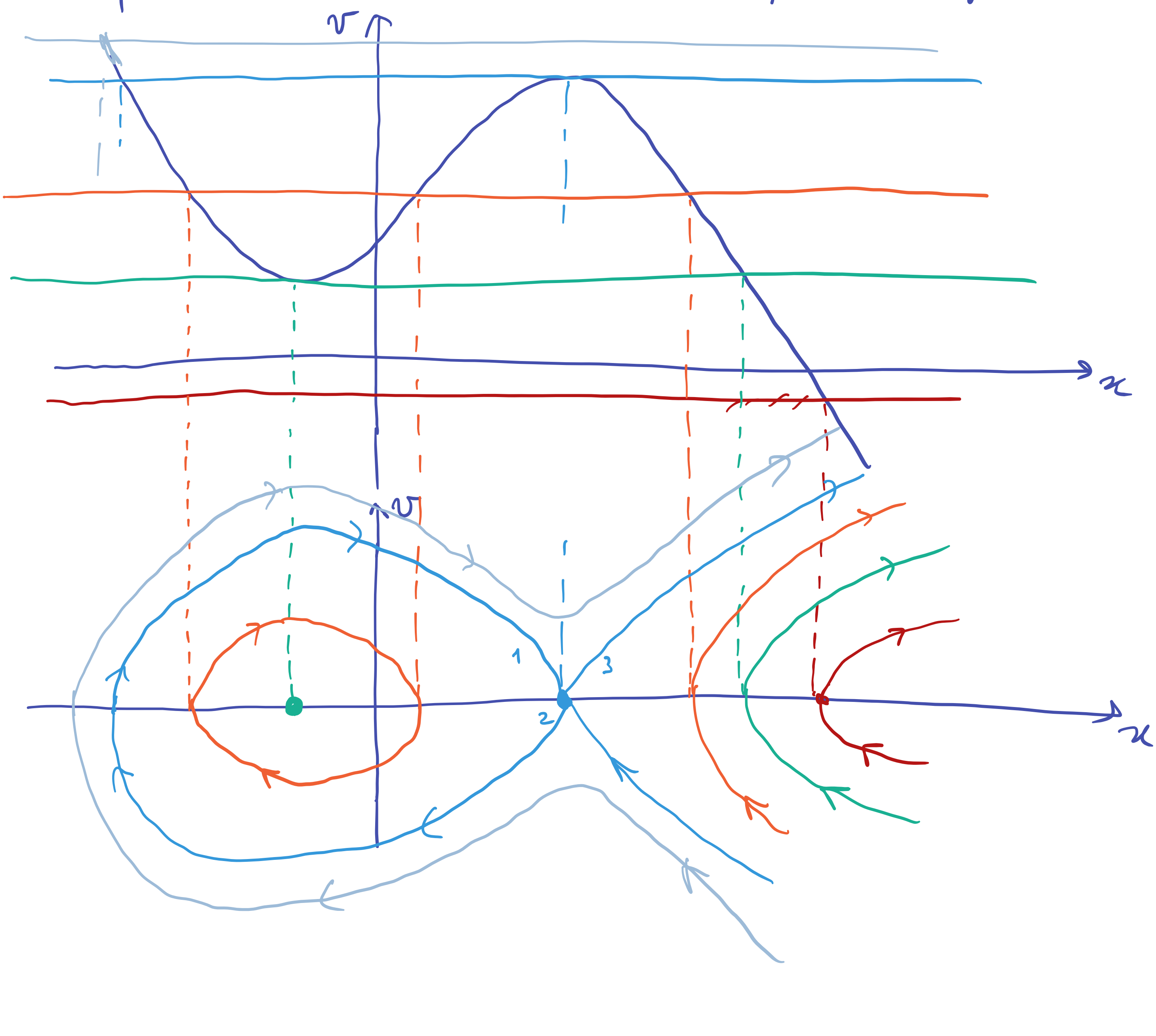
$E \neq 0 \qquad \dfrac{v^2}{2E/m} - \dfrac{x^2}{2E/m\omega^2} = 1 \qquad$ IPERBOLE

$E = 0 \qquad v^2 - \omega^2 x^2 = 0$

$(v - \omega x)(v + \omega x) = 0 \rightarrow$ UNIONE di due RETTE



ES) Dato l'andam. qualitativo di $U(x)$, determinare qualitativam. le traiettorie nel piano di fase (x, v).



ANALISI QUANTITATIVA – PRELIMINARE

Consideriamo un sistema meccanico unidimensionale.

- Sia $I(x,v)$ una costante del moto.
- Prendiamo l'eq. $I(x,v) = I_0$ ← moto sta su una tale ipersuperf. e la consideriamo come un'eq. in v. Risolvendola otteniamo

$$v = g(x, I_0) \qquad \text{(una soluz.)}$$

- Sappiamo che $v = \dot{x}$ ⇒ l'eq. sopra diventa

$$\dot{x} = g(x, I_0)$$

- Integro qta equazione

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{g(x', I_0)}}_{\equiv\, G(x, I_0)} = \underbrace{\int_{t_0}^{t} dt'}_{= t - t_0}$$

- Ottengo $t = t_0 + G(x, I_0)$

- Inverto e ottengo $x(t)$.

Esempio. $I(x,v) = mv$ (quantità di moto)

$$I = I_0 \Rightarrow v = \frac{I_0}{m} \Rightarrow \dot{x} = \frac{I_0}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{m\, dx'}{I_0} = \int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow (x(t) - x_0)\frac{m}{I_0} = t - t_0 \Rightarrow x(t) = \frac{I_0}{m} t + \text{const.}$$

ANALISI QUANTITATIVA

Siamo partiti considerando un'eq. diff. del 2° ord $\ddot{x} = -V'(x)$; vediamo come semplificarla a una 1° ord. usando una COST. del MOTO!

$$E(x,v) \equiv T(v) + V(x) \quad \text{cost. del moto}$$

traiettorie giacciono sulle curve di livello

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \underset{\text{cost.}}{E}$$

(cioè se $x(t)$ è una traiettoria, allora

$$\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + V(x(t)) = E \quad)$$

Questo da relazione tra le funzioni $v(t)$ e $x(t)$

possiamo invertirla:

$$v = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

← deve valere per ogni traiettoria

segno dip. dal verso di percorrenza (scegliamo +)

$$\Rightarrow \quad \dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x(t)))}$$

cost. (E)

← Eq. diff. 1° ordine in $x(t)$ (sue soluzioni soddisfano eq. del moto $\ddot{x} = -\frac{V'}{m}(x)$)

Famiglia a un parametro (E) di eq. diff. del 1° ordine.

Questa equazione implica la seguente equazione diff. per la funzione $t(x)$, che è l'inversa di $x(t)$

$$\frac{dt}{dx}(x) \overset{(*)}{=} \frac{1}{\dot{x}(t(x))} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

(*) $\left[\begin{array}{c} x(t(x)) = x \\ \downarrow \\ \dot{x}(t(x))\,\frac{dt}{dx}(x) = 1 \end{array} \right]$

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

$\xrightarrow[\text{integrazione}]{}$ $$t(x) - t(x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(\tilde{x})\right)}}$$ $x_0 = x(t_0)$

$\xrightarrow[\text{inversione}]{}$ $x(t)$

"Risolvere l'eq. diff. originaria per QUADRATURE"

Es. OSC. ARMONICO $\quad V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$

$$t(x) - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}E - \omega^2 \tilde{x}^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{m}}} \int_{x_0}^{x} \frac{d\hat{x}}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2}{2E}\tilde{x}^2}}$$

$y = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}\,\tilde{x}$

$$= \frac{1}{\omega} \int_{\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}x_0}^{\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}x} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}\,x\right) - \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}\,x_0\right)$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\,\text{sen}\left(\omega t - \varphi_0\right)$$

$$\text{con } \varphi_0 = \omega t_0 - \arcsin\left(\underbrace{\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}}_{\equiv A^{-1}}\,x_0\right)$$

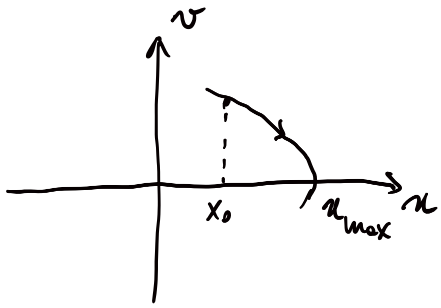
Cioè ritroviamo solut. dell'oscillatore armonico.

$x(t) = A\,\text{sen}(\omega t - \varphi_0)$ $\rightarrow$ A qui è determinato in funzione dell'ENERGIA. Questo si può sempre fare a posteriori, mettendo $x(t)$ in $E(x(t), \dot{x}(t)) = E$:

$$\rightarrow \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - \varphi_0) + \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t - \varphi_0) = E$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 = E \Rightarrow A^2 = \frac{2E}{m\omega^2} .$$

- Nei pti di inversione $V(x) = E$, l'integrando diverge
  $\rightsquigarrow$ cosa succede all'integrale ?



$$t(x_{max}) = t_0 + \int_{x_0}^{x_{max}} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\tilde{x}))}}$$

Mi concentro sul caso $|x_{max} - x_0| \ll 1 \rightarrow$

$\rightarrow$ posso espandere $V(\tilde{x})$ attorno a x_{max}

$$V(\tilde{x}) = \underset{\overset{\shortparallel}{E}}{V(x_{max})} + V'(x_{max})(\tilde{x} - x_{max}) + O(|\tilde{x} - x_{max}|^2)$$

- denom : $\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\tilde{x}))} = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{V'(x_{max})} \sqrt{x_{max} - \tilde{x}}$

- cambiamo variabile d'integraz. $\xi = x_{max} - \tilde{x}$

$$t(x_{max}) = t_0 + \int_{0}^{x_{max} - x_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2V'(x_{max})}{m}} \, \xi^{1/2}}$$

$\frac{1}{\xi^{1/2}}$ è integrabile in $\xi \sim 0$

$\Rightarrow$ il pto arriva in x_{max} (pto di inversione) in un tempo FINITO.

- Nei pti $x=c$ di massimo di $V(x)$ con $E=V(c)$

$$t(c) = t_0 + \int_{x_0}^{c} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-V(\tilde{x})\right)}} \qquad |c-x_0| \ll 1$$

$$\rightarrow V(\tilde{x}) = \underset{\overset{\|}{E}}{V(c)} + \underset{\overset{\|}{0}}{V'(c)}(\tilde{x}-c) + \frac{1}{2}V''(c)(\tilde{x}-c)^2 + \dots$$

$V''(c) < 0$

$$t(c) = t_0 + \int_{x_0}^{c} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{1}{m}\left(-V''(c)\right)(\tilde{x}-c)^2}} = t_0 + \frac{1}{\sqrt{-\frac{V''(c)}{m}}} \int_{x_0}^{c} \frac{d\tilde{x}}{c-\tilde{x}} =$$

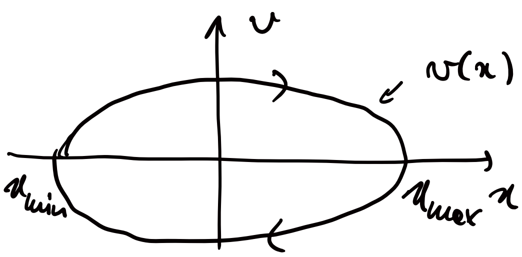
$$\underset{\xi \equiv c-\tilde{x}}{=} t_0 + \frac{1}{\sqrt{-\frac{V''(c)}{m}}} \int_{0}^{c-x_0} \frac{d\xi}{\xi}$$

$\frac{1}{\xi}$ non è integrabile a $\xi \sim 0$

$\Rightarrow$ INTEGRALE DIVERGE

$\Rightarrow$ il pto materiale arriva al pto di equilibrio (instabile) in un TEMPO INFINITO.

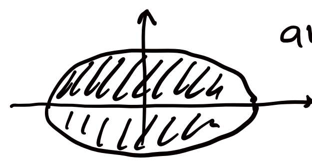
- Moti periodici:



Periodo T_E è il tempo impiegato per andare da x_{min} a x_{max} e ritorno:

$$T_E = 2 \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-V(\tilde{x})\right)}}$$

Def. $S_E = 2\int_{x_{min}}^{x_{max}} \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\tilde{x}))}\, d\tilde{x} = 2\int_{x_{min}(E)}^{x_{max}(E)} v(\tilde{x}; E)\, d\tilde{x}$



area dentro la curva

E appare sia in integrando che in estremi d'integrazione

$\hookrightarrow$ S_E è funzione del tipo $S_E = F(E, x_{max}(E), x_{min}(E))$

Ora vogliamo vedere cosa otteniamo se deriviamo S_E rispetto ad E

$$\frac{dS_E}{dE} = \frac{\partial F}{\partial E} + \frac{\partial F}{\partial x_{max}}\frac{dx_{max}}{dE} + \frac{\partial F}{\partial x_{min}}\frac{dx_{min}}{dE}$$

$$m\frac{dS_E}{dE} = m\, 2\, \frac{d}{dE}\int_{x_{min}}^{x_{max}} \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}\, dx +$$

$$+ 2\sqrt{\frac{2}{m}\underbrace{(E - V(x_{max}))}_{=0}}\,\frac{dx_{max}}{dE} - 2\sqrt{\frac{2}{m}\underbrace{(E - V(x_{min}))}_{=0}}\,\frac{dx_{min}}{dE}$$

$$= 2\cancel{m}\int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{1 \cdot \cancel{2}/\cancel{m}}{\cancel{2}\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}\, dx = T_E$$

$T_E = m\frac{dS_E}{dE}$ dove S_E è l'area dentro la curva chiusa nel piano di fase.

ES.) Osc. arm.

$S_E = \underset{\text{ellisse}}{\text{Area}} = \pi\,\frac{2E}{m\omega}$

$x_{max} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ $\curvearrowright$ $E = \frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$

$v_{max} = \sqrt{\frac{2E}{m}}$

$T_E = m\frac{dS_E}{dE} = \frac{2\pi}{\omega}$