

SOLUZIONI DI EQUILIBRIO

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \quad (*) \quad \leftarrow \quad \dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t)) \quad \text{vero } \forall t$$

Ci sono delle soluzioni particolari che sono funz. costanti, cioè $\bar{x}(t) = \bar{c}$ con $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ con \bar{c} t.c. $\bar{f}(\bar{c}) = 0$
 \uparrow cost. indep. da t

Tali soluzioni particolari sono dette "punti di EQUILIBRIO":
 le loro traiettorie sono pti (curve degenera).

Prop. I PUNTI DI EQUIL. dell'eq. (*) sono tutti e soli i pti dove $\bar{f}(\bar{x})$ si azzera ("Punti singolari" del campo vett.)

Corollario. Nel sistema meccanico $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$, $\bar{f} = \begin{pmatrix} v \\ f(x, v) \end{pmatrix}$
 i pti singolari o di equilibrio sono del tipo $\bar{c} = (c, 0)$ con $f(c, 0) = 0$
 $\begin{matrix} \nearrow \\ x \end{matrix}$ $\begin{matrix} \nearrow \\ v \end{matrix}$ \leftarrow Nel piano di fase i pti di equil. giacciono sull'asse delle ascisse

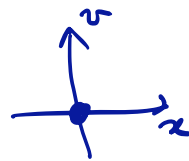
Dim. Pti equil. sono gli zeri di $\bar{f}(x, v)$, cioè soluz. di equaz. $\begin{cases} f_1(x, v) = 0 \\ f_2(x, v) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} v = 0 \\ f(x, 0) = 0 \end{cases}$

(Nei pti di equil. $(c, 0)$ la risultante delle forze si annulla.)

ES. PARTICELLA LIBERA $\ddot{x} = 0$ f è ident. con. nulla
 e quindi i pti di equil. sono $(c, 0) \forall c \in \mathbb{R}$

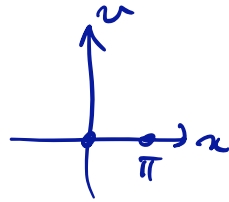
ES. OSCILL. ARN. $f(x,v) = -\omega^2 x$

→ pt' equil. $c=0$



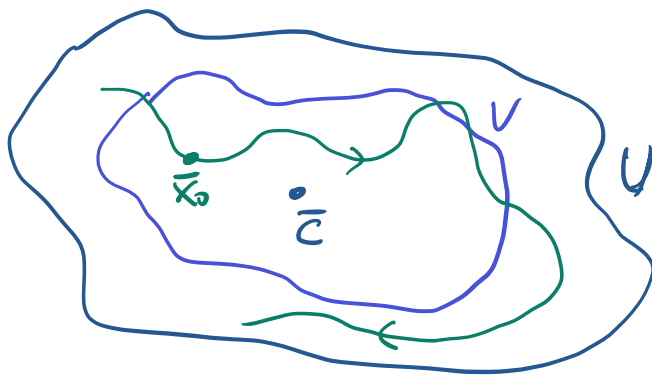
ES. PENDOLO $f(x,v) = -\sin x$ ($\omega=1$)

→ pt' equil. $c=0, \pi$



Attorno ai pt' di equilibrio possiamo avere informazioni APPROSSIMATE sulle solut., anche in sistemi complicati.

Def. Un pto di equil. \bar{c} di $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ ($\bar{f}(\bar{c}) = 0$) si dice STABILE (o stab. nel futuro, o stab. nel passato) se \forall intorno U di \bar{c} , \exists intorno V di \bar{c} , t.c. ogni movimento $\bar{x}(t; \bar{x}_0)$ con $\bar{x}_0 \in V$ resta in U $\forall t$ ($t > 0$, $t < 0$)



($c=0$ è stab. nel futuro;
 $c=\pi$ non è stab.)

Def. \bar{c} è INSTABILE se non è stabile.

Def. \bar{c} è ASINTOTICAMENTE STAB. in tempi positivi (negativi) quando

a) \bar{c} è stab. per $t \geq 0$ ($t \leq 0$) e

b) $\exists B$ intorno di \bar{c} (BACINO DI ATTRAZIONE) t.c.

$\forall \bar{x}_0 \in B$ $\bar{x}(t; \bar{x}_0) \rightarrow \bar{c}$ in $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$)



TEOREMA DI LJAPUNOV

Se conosciamo la soluzione di $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ (*), possiamo dire se un pto di equilibrio \bar{c} è STABILE o INSTABILE.

Ma se non siamo in grado di risolvere (*)? C'è seguente teor.:

Prop. Sia \bar{c} un pto di equilibrio per (*) in \mathbb{R}^l (cioè $\bar{f}(\bar{c})=0$).

Se in un intorno U_c di \bar{c} \exists una variabile dinamica

$W: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ ("funzione di Ljapunov") t.c.

a) W ha un MINIMO STRETTO in \bar{c} , cioè

$$W(\bar{x}) > W(\bar{c}) \quad \text{in } U_c \setminus \{\bar{c}\}$$

b) $\dot{W} \leq 0$ in U_c (cioè W è ^{non-decrecente, costante} non-crescente lungo ogni moto in U_c per t crescente)

(\Rightarrow) (=)

$\Rightarrow \bar{c}$ è un punto di EQUILIBRIO STABILE per tempi positivi (negativi) (per tutti i tempi).

[Il teorema di Ljapunov permette di avere informazioni sulla stabilità del pto di equilibrio in modo rapido, senza dover risolvere (*).]

Dim. Dobbiamo dimostrare che \forall intorno U di \bar{c} , esiste un intorno V di \bar{c} t.c. $\forall \bar{x}_0 \in V$ la traiettoria sta interamente in U per tempi positivi.

Dato W come nelle ipotesi, possiamo sempre costruire l'intorno V nel seguente modo:

- prendiamo una palla B contenuta in $U \cap U_c$ e centrata in \bar{c} ;
- la sfera ∂B è chiusa e compatta \Rightarrow
 $\Rightarrow W(\bar{x})$ ha un minimo assoluto su un pto $\bar{b} \in \partial B$
 cioè $W(\bar{x}) \geq W(\bar{b}) \equiv l \quad \forall \bar{x} \in \partial B$
- definiamo $V = \{ \bar{x} \in B \mid W(\bar{x}) < l \}$
- V è un intorno di \bar{c} , perché sicuramente $\bar{c} \in V$ per a)
- prendiamo $\bar{x}_0 \in V$; il moto con tale dato iniziale $\bar{x}(t; \bar{x}_0)$ soddisfa per b):

$$W(\bar{x}(t; \bar{x}_0)) \leq W(\bar{x}_0) \quad \text{per } t > 0 \quad (*)$$
 perché $\dot{W}(\bar{x}(t; \bar{x}_0)) = L_f W(\bar{x}(t; \bar{x}_0)) \leq 0$
- $(*) \Rightarrow \bar{x}(t; \bar{x}_0)$ non può intersecare ∂B per $t > 0$
 (il che implica che non può uscire da U)
 perché un tale pto \bar{x}_{int} di intersezione avrebbe

$$W(\bar{x}_{int}) \geq l > W(\bar{x}_0)$$

\uparrow
 perché $\bar{x}_{int} \in \partial B$

\uparrow
 visto che $\bar{x}_0 \in V$

//

Corollario. Si consideri un sistema meccanico con forze
puramente posizionali:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x) \end{cases} \quad f(x) = - \frac{V'(x)}{m}$$

Se l'energia potenziale $V(x)$ ha un MINIMO ISOLATO in $x^* \in \mathbb{R}$
allora $\bar{c} = (x^*, 0) \in \mathbb{R}^2$ è un PTO DI EQUIL. STABILE.

Dim. Se $V(x)$ ha min. stretto in x^* , allora

$$f(x^*) = - \frac{V'(x^*)}{m} = 0;$$

inoltre $E(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$ ha anch'essa un
min. isolato, e si trova in $\bar{c} = (x^*, 0) \Rightarrow$ a) del teorema
di Lyapunov

Inoltre E è una cost. del moto $\Rightarrow \int_{\bar{c}} E = 0 \Rightarrow$ b) //

Il risultato del corollario si esclude a tutti i sistemi
meccanici a più gradi di libertà per i quali si può scrivere
l'energia totale come somma di EN. CINETICA (def. positiva)
ed EN. POTENZIALE.

Stabilità nel futuro persiste anche se aggiungiamo alla forza un termine dissipativo.

$$\text{ES. } \ddot{x} = -\omega^2 x - 2\mu \dot{x}$$

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} v \\ -\omega^2 x - 2\mu v \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow f_1 \\ \leftarrow f_2 \end{matrix}$$

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\bar{f}} E &= \frac{\partial E}{\partial x} f_1 + \frac{\partial E}{\partial v} f_2 = m\omega^2 x \cdot v + m v \cdot (-\omega^2 x - 2\mu v) \\ &= -2\mu m v^2 \leq 0. \end{aligned}$$

STUDIO ATTORNO AI PUNTI DI EQUILIBRIO

Linearizzazione: studio locale attorno al pto di equilibrio, nel quale si APPROSSIMA il sistema non-lineare ("difficile") con un sistema lineare ("facile")

Sistema lineare in \mathbb{R}^l è un sistema di equazioni differenziali lineari del tipo

$$\dot{\bar{x}} = A \bar{x} \quad \bar{x} \text{ a valori in } \mathbb{R}^l \text{ e} \\ A \text{ una matrice } l \times l$$

Partiamo da un sistema autonomo

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^l \quad \bar{f}: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$$

t.c. \bar{f} ha un punto singolare (pto equil.) in \bar{c}
(cioè $\bar{f}(\bar{c}) = 0$).

Siccome vogliamo studiare le soluzioni $\bar{x}(t)$, quando passano per pti vicini a \bar{c} , ci interessa il comportamento di \bar{f} attorno a \bar{c} , cioè per $\|\bar{x} - \bar{c}\| \ll 1$.

→ facciamo espansione di Taylor attorno a \bar{c}

$$f_i(\bar{x}) = \underbrace{f_i(\bar{c})}_{=0} + \sum_{j=1}^l \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{c}) (x_j - c_j) + O(\|\bar{x} - \bar{c}\|^2)$$

$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{c}) \equiv A_{ij}$

Attorno a \bar{c} la funzione \bar{f} è ben approssimata da

$$\bar{f}(\bar{x}) \approx A \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + \dots \quad \text{con} \quad A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{c})$$

Definiamo $\bar{\xi} = \bar{x} - \bar{c} \Rightarrow \bar{\xi}(t) = \bar{x}(t) - \bar{c}$ soddisfa

$$\dot{\bar{\xi}} = \dot{\bar{x}} = A(\bar{x} - \bar{c}) + \dots = A\bar{\xi} + \dots \sim \mathcal{O}(\|\bar{\xi}\|^2)$$

\rightarrow l'eq. è approssimata, per $\|\bar{\xi}\| = \|\bar{x} - \bar{c}\| \ll 1$, da

$$\dot{\bar{\xi}} = A \cdot \bar{\xi}$$

\hookrightarrow risolta qta eq. otteniamo $\bar{\xi}(t)$, da cui
uno si trova $\bar{x}(t) = \bar{\xi}(t) + \bar{c}$.

Se il sistema autonomo viene da

$$\ddot{x} = f(x) \quad \rightsquigarrow \quad \bar{f} = \begin{pmatrix} v \\ f(x) \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(c) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\bar{\xi}} = A \bar{\xi} \quad (*)$$

\leftarrow sist. di eq. LINEARI OMOGENEE
del 1° ordine

\Rightarrow soluz. generale sarà combinazione
lineare di l soluzioni particolari indep.

Cerchiamo soluzioni particolari della forma

$$\bar{\xi}(t) = p(t) \bar{u} \quad (*) \quad \bar{u} \in \mathbb{R}^l \text{ vett. cost.}$$

Siccome ci interessano soluzioni non banali, $\bar{\xi}(t)$ non si annulla mai
($\exists!$ soluz. $\bar{\xi}(t)$ t.c. $\bar{\xi}(t_0) = 0$, ed è $\bar{\xi}(t) = 0 \forall t$. Altre transitorie non le interessano)

Sostituiamo (*) in (**) :

$$\dot{\bar{u}} = P A \bar{u} \quad \leftarrow \text{l'uguaglianza \u00e8 possibile solo se}$$

\bar{u} e $A\bar{u}$ sono paralleli, cioè $\exists \alpha t.c.$

$$\leftarrow \underline{A\bar{u} = \alpha \bar{u}}$$

$$\dot{\bar{u}} = \alpha P \bar{u}$$

\Rightarrow • \bar{u} deve essere autovettore di A
con autovalore α .

• $\dot{\rho} = \alpha \rho \Rightarrow \rho(t) = C e^{\alpha t} \quad (C = \rho(0))$

Per risolvere (**) uno deve diagonalizzare A .

Se esiste una base di autovettori (A diagonalizzabile)

\Rightarrow posso scrivere la soluzione generale come

$$\bar{x}(t) = \sum_{j=1}^k C_j e^{\alpha_j t} \bar{u}_j$$

con α_j autovalori di A e \bar{u}_j i relativi autovettori.

ASIDE: tornera' dopo aver studiato Sist. Lagrangiana

Sist. Lagrangiana $L = \frac{1}{2} \dot{\bar{x}} \cdot A \dot{\bar{x}} - \frac{1}{2} \bar{x} \cdot B \bar{x}$

eq: $A \ddot{\bar{x}} = -B \bar{x}$

$$\begin{cases} A \dot{\bar{v}} = -B \bar{x} \\ \dot{\bar{x}} = \bar{v} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{v} \\ -A^{-1}B \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -A^{-1}B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{v} \end{pmatrix}$$

Soluz. generale:

• autovalori $0 = \det \begin{pmatrix} \lambda \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ A^{-1}B & \lambda \mathbb{1} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ A^{-1}B + \lambda^2 \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$

$$= \det A^{-1} \det (B + \lambda^2 A)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -A^{-1}B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \lambda \bar{u} \\ -A^{-1}B \bar{u} &= \lambda \bar{w} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} B \bar{u} = -\lambda^2 A \bar{u} \\ \bar{w} = \lambda \bar{u} \end{cases}$$

Inoltre se A e B sono def. pos. l'eq. $\det(B + \lambda^2 A) = 0$ ha

soluz. sol se $\lambda^2 < 0$ cioè λ immaginario $\lambda = \pm i\omega \leftarrow$ in coppia
 (due soluzioni reali)

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^m \left[C_j e^{i\omega_j t} \begin{pmatrix} \bar{u}_j \\ i\omega_j \bar{u}_j \end{pmatrix} + \overset{\substack{\uparrow \\ \text{soluz.} \\ \text{reale}}}{C_j^*} e^{-i\omega_j t} \begin{pmatrix} \bar{u}_j \\ -i\omega_j \bar{u}_j \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{pmatrix} u_j \\ i\omega_j u_j \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} u_j \\ -i\omega_j u_j \end{pmatrix}$$

due soluz. indep. relative a un λ^2

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^m C_j e^{i\omega_j t} \bar{u}_j + \sum_j C_j^* e^{-i\omega_j t} \bar{u}_j$$

$$\bar{v} = \sum_{j=1}^m C_j i\omega_j e^{i\omega_j t} \bar{u}_j + \sum_j C_j^* (-i\omega_j) e^{-i\omega_j t} \bar{u}_j$$