Lezione 4 marzo 2026

mercoledì 4 marzo 2026 09:08

Tutore: dott. TRONCARELLI

giovedì 5/3 9:15 – 10:45

~ . ~ . ~ . ~

Visto: $b(s) := T(s) \wedge n(s)$

s par. per lunghezza d'arco.

PRODOTTO VETTORIALE in $\mathbb{R}^3$

Notaz. Base canonica di $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

Def.: Dati $u, v \in \mathbb{R}^3$

$$u = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}u_1 & v_1\\u_2 & v_2\\u_3 & v_3\end{pmatrix}$$

$$u \wedge v := \begin{pmatrix}u_2v_3 - u_3v_2\\u_3v_1 - u_1v_3\\u_1v_2 - u_2v_1\end{pmatrix}$$

, regola "mnemonica"

$$u \wedge v = \text{"}\det\begin{pmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\u_1 & u_2 & u_3\\v_1 & v_2 & v_3\end{pmatrix}\text{"}$$

$$\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

PROPR. ALG. di $\wedge$:

① $\wedge$ è bilineare

② $\wedge$ è ANTISIMMETRICO

③ $$\underbrace{(u \wedge v) \cdot w}_{\text{prodotto misto}} = \det\begin{pmatrix}u_1 & v_1 & w_1\\u_2 & v_2 & w_2\\u_2 & v_3 & w_3\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow (u \wedge v) \cdot u = 0 = (u \wedge v) \cdot v$$

$$\Longrightarrow u \perp (u \wedge v), \quad v \perp (u \wedge v)$$

④ $u \wedge v = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Longleftrightarrow$ u e v linearmente dipendenti

$$\left(\Longleftrightarrow \operatorname{rg}\begin{pmatrix}u_1 & v_1\\u_2 & v_2\\u_3 & v_3\end{pmatrix} \leq 1 \right)$$

⑤ $\|u \wedge v\| = \|u\| \, \|v\| \cdot \sin\alpha$, $u \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $v \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

(α angolo convesso tra u e v

= area del parallelogramma individuato da u, v

ORIENTAZIONE DELLO SPAZIO

Def.: Date due basi ordinate di $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ e $\{g_1, \dots, g_n\} = \mathcal{G}$

diciamo che hanno la STESSA ORIENTAZIONE

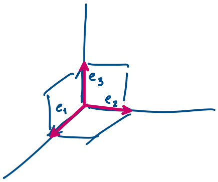
se la matrice di cambio di base da $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$

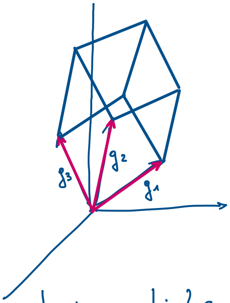
$$\det M^{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}}(Id_{\mathbb{R}^n}) > 0$$

Es.: in $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{E}$ canonica, $\mathcal{G}$ altra base

$$M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{E}}(Id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} \text{coord. dei vettori di } \mathcal{G} \text{ nella } \mathcal{E} \end{pmatrix}, \quad \det M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{E}}(Id_{\mathbb{R}^3}) > 0$$

$$\Rightarrow \det \quad Id_{\mathbb{R}^3}) = \frac{1}{\det M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{E}}(Id_{\mathbb{R}^3})} > 0$$





Se $\{g_1, g_2, g_3\}$ ha la stessa orientazione di $\{e_1, e_2, e_3\}$, il $\det(g_1 \ g_2 \ g_3)$ è uguale al volume del parallelepipedo individuato da g_1, g_2, g_3.

OSS.: "Avere la stessa orientazione" è una relazione di equivalenza nell'insieme delle basi ordinate di $\mathbb{R}^n$; infatti:

- $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}$; $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^n}) = \mathbb{I}_n$
- $\mathcal{B} \sim \mathcal{G}$, $\det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{G}}(Id_{\mathbb{R}^n}) > 0$

  $\Rightarrow \det M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^n}) > 0$
- $\mathcal{B} \sim \mathcal{G}$, $\mathcal{G} \sim \mathcal{F}$

$\det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{G}}(Id) > 0$, $\det M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}(Id) > 0$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{F}}(Id) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{G}}(Id) \cdot M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}(Id)$$

$$\det(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{F}}(Id)) = \underset{>}{\det(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{G}}(Id))} \cdot \underset{>0}{\det(M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}(Id))}$$

OSS.: Abbiamo esattamente 2 classi di equivalenza

$[\mathcal{E}]$; supp. $\mathcal{F} \notin [\mathcal{E}]$, $\mathcal{G} \notin [\mathcal{E}]$

$\det M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}(Id) < 0$ $\det M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}}(Id_{\mathbb{R}^n}) < 0$

$$\det M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}(Id_{\mathbb{R}^n}) = \underset{<0}{\overset{\det}{M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{E}}}(Id_{\mathbb{R}^n})} \cdot \underset{<0}{\overset{\det}{M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}}(Id_{\mathbb{R}^n})} > 0$$

$$\Downarrow$$

$\mathcal{F} \sim \mathcal{G} \quad \Longrightarrow \quad [\mathcal{F}]$

ci sono tutte le basi non eq. ad $\mathcal{E}$

OSS.: Possiamo identificare le 2 classi di eq. con le 2 componenti connesse di $GL(n)$.

Def.: Un' ORIENTAZIONE di $\mathbb{R}^n$ è una scelta di una classe di equivalenza.

OSS.: Siano $u, v \in \mathbb{R}^3$ vett. lin INDIP.

$\Rightarrow$ $\mathcal{B} = \{u, v, u \wedge v\}$ è una base ed ha la stessa orientazione della base $\mathcal{E}$.

Dim.: u, v indip $\Longrightarrow u \wedge v \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\perp u \;, \; \perp v$

$$\det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(Id_{\mathbb{R}^3}) \overset{\det}{=} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & (u \wedge v)_1 \\ u_2 & v_2 & (u \wedge v)_2 \\ u_3 & v_3 & (u \wedge v)_3 \end{pmatrix}$$

per ③, $\quad = (u \wedge v) \cdot (u \wedge v) = \| u \wedge v \|^2 > 0$

$\Longrightarrow \{T(s), n(s), b(s)\}$ stessa orient. di $\mathcal{E}$

$b(s) := T(s) \wedge n(s)$

OSS. $\|b(s)\| = 1$; $\quad \|b(s)\| = \|T(s)\| \cdot \|n(s)\| \sin\alpha = 1$

α angolo tra $T(s)$ e $n(s)$

$\alpha = \underline{\pi}$

* * *

Voglio studiare la variazione di $b(s)$:

$$b(s) = \begin{pmatrix} y'(s)\, n_3(s) - z'(s)\, n_2(s) \\ z'(s)\, n_1(s) - x'(s)\, n_3(s) \\ x'(s)\, n_2(s) - y'(s)\, n_1(s) \end{pmatrix}$$

$$T(s) = \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \\ z'(s) \end{pmatrix}$$

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \begin{pmatrix} n_1(s) \\ n_2(s) \\ n_3(s) \end{pmatrix}$$

$$\alpha''(s) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall s$$

OSS.: Se α è di classe C^k, allora $T(s)$ è C^{k-1}, e $n(s)$ e $b(s)$ sono di C^{k-2}

Supp. $k \geq 3$, e cons. $b'(s)$

Domanda: direzione di $b'(s)$?

Ricordo: $\|b(s)\|^2 = 1$

$$(b(s) \cdot b(s))' = 0$$

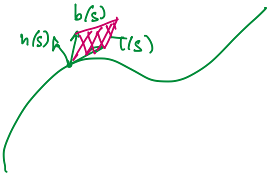
$$2\, b(s) \cdot b'(s) = 0 \implies \boxed{b'(s) \perp b(s)}$$

Inoltre:

$$b(s) = T(s) \wedge n(s)$$

Esercizio: $b'(s) = \underbrace{\underbrace{T'(s)}_{\substack{=\alpha''(s)\\ =k(s)\,n(s)}} \wedge n(s)}_{=0} + \underbrace{T(s) \wedge n'(s)}$

$$\boxed{\Rightarrow b'(s) \perp T(s)}$$



$\Rightarrow b'(s) \perp \underbrace{\mathrm{Span}(T(s), b(s))}_{\text{piano RETTIFICANTE}}$

$\Rightarrow b'(s)$ è proporzionale a $n(s)$

Def.: La funzione $\tau(s)$ determinata da

$$b'(s) = \tau(s)\, n(s)$$

si chiama TORSIONE di α in s

Domanda: Regolarità di $\tau(s)$?

$$b(s) = \begin{pmatrix} b_1(s) \\ b_2(s) \\ b_3(s) \end{pmatrix} \qquad n(s) = \frac{1}{k(s)} \begin{pmatrix} x''(s) \\ y''(s) \\ z''(s) \end{pmatrix}$$

classe C^{k-2}

$$\frac{\tau(s_0)}{k(s_0)} \begin{pmatrix} x''(s_0) \\ y''(s_0) \\ z''(s_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1'(s_0) \\ b_2'(s_0) \\ b_3'(s_0) \end{pmatrix}$$

$$\ne$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, almeno 1 comp. è $\neq 0$

in un intorno

ad es. $z''(s_0)\neq 0$; posso scrivere   di s_0

$$\tau(s_0)=\frac{\overset{\mathcal{C}^{k-2}}{k(s_0)}\cdot \overset{\mathcal{C}^{k-3}}{b_3'(s_0)}}{\underset{\mathcal{C}^{k-2}}{z''(s_0)}}$$

$\Longrightarrow$ se α è di classe $\mathcal{C}^k$

$\tau(s)$ è di classe $\mathcal{C}^{k-3}$

* * *

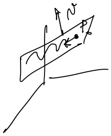
Ora vediamo che $\tau(s)$ "MISURA QUANTO una curva NON è piana"

> **PROP:** $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ PLA e biregolare di classe $\mathcal{C}^k$, $k\geq 3$
>
> Allora $\alpha(I)\subseteq H$ piano affine
>
> $\Longleftrightarrow$ $\tau(s)\equiv 0$ $\forall\, s\in I$.

Dim. Supp. $\alpha(I)\subseteq H$; fisso $P_0\in H$

e fisso $v\perp H$, $v\neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ $(\alpha(s)-P_0)\cdot v = 0$



$$\big((\alpha(s)-P_0)\cdot v\big)' = 0$$

$$\underbrace{\alpha'(s)}_{=T(s)}\cdot v + (\alpha(s)-P_0)\cdot \underbrace{v'}_{=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}} = 0$$

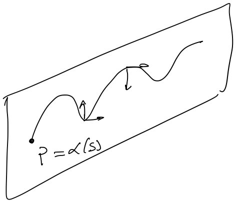
$\Longrightarrow$ $T(s)\perp v$ $\forall\, s\in I$

Continuo a derivare

$$(\alpha'(s)\cdot v)' = 0$$

$$\underbrace{\alpha''(s)\cdot v}_{k(s)\,n(s)} + \underbrace{\alpha'(s)\cdot v'}_{=0} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad n(s) \perp v$$



$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Span}(T(s), n(s)) = W_p$$ piano osc vettoriale

è COSTANTE, $\perp v$

W_p è la giacitura di H_p piano oscul. aff

W_p è anche la giacitura di H

$$\Longrightarrow H_p = H \qquad \forall\, p \in \alpha(I)$$

$$\Longrightarrow \quad b(s) \,/\!/\, v$$

$$b(s) = \begin{cases} \dfrac{v}{\|v\|} \\[2ex] -\dfrac{v}{\|v\|} \end{cases}$$

ma se C^k con $k \geq 3$, $b(s)$ è C^{k-2}

in part. continuo, I connesso $\Longrightarrow b(I)$ è connesso

$$\Longrightarrow b(I) = \frac{v}{\|v\|} \quad \text{opp.} \quad -\frac{v}{\|v\|}$$

$$\Longrightarrow b(s) \text{ è costante} \Longrightarrow b'(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau(s) = 0$$

Viceversa: Supp. $\tau(s) \equiv 0 \quad \forall\, s \in I$

$$b'(s) = \tau(s)\, n(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad b(s) = v \quad \text{costante}$$

$\Rightarrow$ il piano osculatore costante

$$s_0 \in I \, , \quad \frac{d}{ds}\Big((\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot v \Big)$$

$$= \alpha'(s) \cdot v + (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot v'$$

$$= \underset{T(s)}{\alpha'(s)} \cdot \underbrace{v}_{=b(s)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot v = \text{costante} = c$$

$$s = s_0 \qquad (\alpha(s_0) - \alpha(s_0)) \cdot v = c = 0$$

$$\forall s$$

$$\Rightarrow \quad (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \subseteq \text{piano} \perp v$$