Geometria 3 - Curve e superfici 2025/2026
Foglio di esercizi 2

Prof. Valentina Beorchia

7 marzo 2026

1. Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto esterno
$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad u \wedge v = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$
   Siano $u : I \to \mathbb{R}^3$ e $v : I \to \mathbb{R}^3$ due funzioni di classe C^1. Si dimostri che vale
$$\frac{d}{dt}(u(t) \wedge v(t)) = u'(t) \wedge v(t) + u(t) \wedge v'(t).$$

2. Si consideri la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da
$$\alpha(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t\right).$$
   (a) Si verifichi che α è parametrizzata per lunghezza d'arco e biregolare.
   (b) Si calcoli il triedro di Frenet, curvatura e torsione in un punto generico.
   (c) Si dimostri che $\alpha(\mathbb{R})$ è una circonferenza. Si trovi, inoltre, il piano in cui giace, il raggio e il centro.

3. Supponiamo che tutte le normali di una curva biregolare passino per un punto fissato. Dimostrare che la traccia della curva è contenuta in una circonferenza. (La normale ad una curva in un suo punto è la retta passante per il punto e avente come direzione il vettore normale in quel punto)

4. Supponiamo che tutte le tangenti di una curva regolare passino per un punto fissato. Dimostrare che la traccia della curva è contenuta in una retta.

5. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata per lungheza d'arco. Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un movimento rigido, cioè $\varphi(v) = A \cdot v + b$ con $A \in \mathrm{SO}(3)$, matrice ortogonale con determinante uguale a 1, e $b \in \mathbb{R}^3$.

   Si verifichi che la curva $\beta := \varphi \circ \alpha$ è parametrizzata per lunghezza d'arco, e che i triedri di Frenet, curvatura e torsione in $\alpha(s)$ relativi ad α, coincidono con i triedri di Frenet, curvatura e torsione in $\beta(s)$, relativi a β.

6. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare; al variare di $t \in I$, la tangente, la normale e la binormale parametrizzano delle curve le cui immagini giacciono sulla sfera unitaria di $\mathbb{R}^3$. Queste curve si chiamano rispettivamente *l'indicatrice delle tangenti*, *l'indicatrice delle normali e l'indicatrice delle binormali*.

   Sia $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da

$$\alpha(t) = \left(\cos \frac{t}{\sqrt{2}}, \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right).$$

   (a) Si verifichi che α è una curva parametrizzata per lunghezza d'arco.

   (b) Si studino l'indicatrice delle tangenti, delle binormali e delle bitangenti di α.