11 Piano cartesiano – III parte

11.1 Sistemi lineari di 2 equazioni in 2 incognite

I *sistemi lineari*, che andiamo a trattare, ricorrono un'infinità di volte nelle Scienze Applicate.
Ci limiteremo sostanzialmente al caso di 2 equazioni in 2 incognite.

Esempio farmaceutico di sistema: miscela di 2 soluzioni.
Immagina di avere due soluzioni con differenti concentrazioni a e b di un principio attivo, e vuoi ottenere una miscela con una concentrazione u desiderata. Devi determinare quali volumi x e y di ciascuna soluzione usare per ottenere un volume desiderato v che abbia la concentrazione desiderata u.
Con un procedimento logico non semplicissimo[72] si ottiene questo sistema:

$$\begin{cases} x + y = v \\ a\,x + b\,y = u\,v \end{cases}$$

Qua il Lettore vede tante lettere, ma in effetti solo x e y sono incognite, mentre a, b, u, v sono numeri[73] dati, per il caso considerato.

[72]Per fissare le idee, per produrre il sistema consideriamo questo esempio:
Soluzione 1 ha una concentrazione di farmaco a = 10 mg/mL
Soluzione 2 ha una concentrazione di farmaco b = 2 mg/mL
Vuoi ottenere un volume totale
v = 100 mL con una concentrazione desiderata di
u = 5 mg/mL
Incognite:
x: Volume della soluzione 1 (in mL).
y: Volume della soluzione 2 (in mL).
Sistema di equazioni:
Equazione del volume totale:
x+y=100 (Il volume totale deve essere 100 mL).
Equazione della concentrazione:
10x+2y=5x100
(La quantità totale di farmaco deve essere 500 mg, ovvero
5mg/mL x 100mL).

[73]Più precisamente grandezze fisiche, con le unità di misura; comunque esse si possono omettere nei calcoli risolutivi, e aggiungere alla fine, ai risultati.

ESERCIZIO$_{\mu 2025}$ $\ast$ L'intelligenza artificiale sta rapidamente entrando nelle farmacie e nella Farmacia; si veda per esempio l'articolo scientifico (2025) su *Nature Medicine* "Artificial intelligence in drug development".
L'intelligenza artificiale è sostanzialmente un'applicazione informatica di formule matematiche, in particolare le funzioni di attivazione, il calcolo delle probabilità e la statistica, e i sistemi lineari. Qua chiediamo di risolvere questo (piccolissimo: le intelligenze artificiali per funzionare risolvono sistemi con anche milioni o miliardi di incognite, però approssimatamente) sistema lineare:

$$\begin{cases} -1 + 4\,x + 3\,y = 0 \\ 4\,x - y = 13 \end{cases}$$

dando della soluzione la scrittura decimale.

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard del punto decimale, a scelta).

Dalla seconda, sommando ad ambo i membri $y - 13$, ricaviamo y

$$4\,x - 13 = y \qquad (\ast)$$

e lo mettiamo nella prima equazione del sistema lineare

$$-1 + 4\,x + 3\,(4\,x - 13) = 0$$

$$-1 + 4\,x + 12\,x - 39 = 0$$

$$-40 + 16\,x = 0$$

$$16\,x = 40$$

$$x = \frac{40}{16}$$

(ed è inutile semplificare la frazione) che è il cercato esatto valore di x, che adesso esprimiamo in forma decimale come richiesto, calcolando $40 : 16$ con la calcolatrice o a mano:

$$x = 2{,}5$$

e la y la calcoliamo con la $(\ast)$

$$y = 4\,x - 13 = 4\,\frac{40}{16} - 13 = \frac{40}{4} - 13 = 10 - 13 = -3$$

$$\boxed{x = 2{,}5\,; \quad y = -3}$$

OPPURE
Facciamo la differenza delle 2 equazioni (la prima meno la seconda) ottenendo

$$-1 + 3\,y + y = -13$$

$$4\,y = 1 - 13$$

$$4\,y = -12$$

$$y = -3$$

che messa nella seconda equazione in pochi passaggi dà x.

11.2 2 Equazioni e 2 incognite: metodo risolutivo

Il sistema lineare (ovvero di primo grado) di 2 equazioni in 2 incognite x e y

Esempio

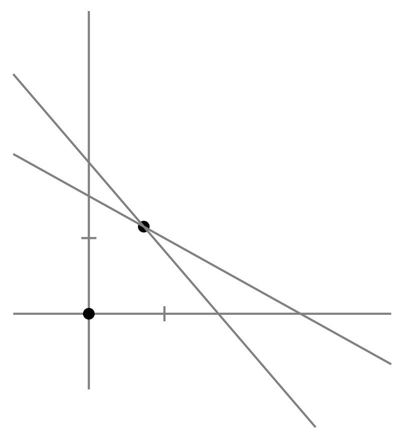
$$\begin{cases} a\,x + b\,y + c = 0 \\ a'\,x + b'\,y + c' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7\,x + 6\,y - 12 = 0 \\ 5\,x + 9\,y - 14 = 0 \end{cases}$$

se $(a, b) \neq (0, 0)$ e $(a', b') \neq (0, 0)$ rappresenta geometricamente l'intersezione di 2 rette nel piano cartesiano. Potrebbero non avere intersezione, se esse sono parallele e distinte, o infinite soluzioni, se esse sono coincidenti. Questi 2 casi sono caratterizzati dal *determinante* nullo

$$\det = a\,b' - b\,a' = 0$$

e si risolveranno con cautela analiticamente e contemporaneamente facendo un disegno. Non ce ne occuperemo.

Ipotizziamo ora $\det \neq 0$, che è il caso generale ed è l'unico che ci interessa. Allora abbiamo 2 rette incidenti in 1 punto, le cui coordinate x_0 e y_0 costituiscono la soluzione del sistema di equazioni.



Ognuna delle eventuali equazioni mancanti di 1 delle 2 variabili si risolve subito, e il valore di x o y trovato si sostituisce nell'altra equazione, se in essa c'è quella variabile, e così quell'equazione diventa un'equazione di primo grado in una sola variabile, e si risolve subito anch'essa.

Ipotizziamo ora che ci siano sia la x che la y in entrambe le equazioni: esplicitiamo y dalla prima e sostituiamola nella seconda, che diventa così un'equazione di primo grado nella sola x. Trovata la x, si trova la y dalla sua espressione precedentemente esplicitata dalla prima equazione.

Nota sui istemi lineari di n equazioni in n incognite

Il metodo visto si estende[(74)] ai sistemi lineari di 3 equazioni in 3 incognite[(75)] x, y e z, e poi anche più numerose equazioni e in ugual numero incognite, ma può essere malagevole.

[74] Si esplicita z dalla prima equazione e si sostituisce nella seconda e la terza, che insieme costituiscono a questo punto un sistema lineare di 2 equazioni in 2 incognite x e y. Tuttavia, i sottocasi particolari, di 0 e infinite soluzioni, iniziano a diventare molteplici, e non sempre facilissimi da trattare, e dipendono da vari determinanti.
Analogo e via via sempre più complesso il caso dei sistemi lineari di n equazioni in n incognite.

[75] Geometricamente rappresenta l'intersezione di 3 piani nello *spazio cartesiano* $\mathbb{R}^3$.

ESERCIZIO$_{\mu 2023}$ $\star$ Un cerotto e una pillola costano insieme € 1,10 e la pillola costa 1 euro in più del cerotto. Quanto costa il cerotto?

SVOLGIMENTO

Viene usato – già nel quesito – lo standard della virgola decimale. (Che è fissato per legge in Italia per gli euro).

Ci sono vari modi di risolvere, e qua risolviamo in questo modo, con ovvio significato dei simboli:

$$\begin{aligned} &cerotto + pillola = 1{,}10 \\ &pillola = cerotto + 1 \end{aligned}$$

e sostituendo la seconda equazione nella prima, si ha successivamente:

$$cerotto + (cerotto + 1) = 1{,}10$$

$$cerotto + cerotto + 1 = 1{,}10$$

$$2 \cdot cerotto + 1 = 1{,}10 \qquad \Big/ -1$$

$$2 \cdot cerotto = 0{,}10 \qquad \Big/ : 2$$

$$cerotto = 0{,}05$$

cioè

$$\boxed{\text{5 centesimi}}$$

ovvero

$$\boxed{€\,0{,}05}$$

Nota. Formulato con una palla e una mazza invece che con un cerotto e una pillola, questo è un problema classico, che si trova in *Pensieri lenti e veloci*, di Daniel Kahneman, vincitore del premio Nobel per l'Economia nel 2002 per il suo lavoro sui pregiudizi cognitivi. (A intuito molti rispondono erroneamente 10 centesimi).

11.3 Sistemi di dis/equazioni e sistemi generalizzati

Definizioni.
Un sistema di n equazioni in 1 incognita x, con la parentesi graffa (grande) che vale *et*, è il predicato (con opportune funzioni)

$$\begin{cases} f_1(x) = g_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) = g_n(x) \end{cases}$$

e sostituendo gli = con segni di disuguaglianza si ha un sistema di n disequazioni in 1 incognita.
Naturalmente possono considerarsi sistemi con 2 o più incognite (per esempio il sistema lineare di 2 equazioni in 2 incognite) e anche sia con equazioni che disequazioni. E altri casi[(76)] ancora.

Non esiste un metodo generale per risolverli tutti.

Complementi

11.4 Complementi – Esempio risolto di sistema

Si risolva

$$\begin{cases} F = C & \text{(stesso valore numerico)} \\ F = 1.8\,C + 32 & \text{(formula di conversione)} \end{cases}$$

(che determina il valore numerico – numero *puro*, senza unità di misura – della temperatura che ha lo stesso valore numerico nelle scale Celsius e Fahrenheit).

[76] I predicati del tipo $f(x) \neq g(x)$, che potremmo chiamare *"inequazioni"*, non li nomineremo per nome considerandoli implicitamente compresi nelle disequazioni data l'equivalenza con $(f(x) - g(x))^2 > 0$.

Definizione.
Predicati come (21) e (22), che sono come quelli qua sopra considerati ma in più ammettono anche il *vel*, si potrebbero chiamare *sistemi generalizzati di equazioni ed eventualmente disequazioni*.

Esplicitiamo F dalla prima, che in effetti “è già risolta", e sostituiamo nella seconda ottenendo

$$C = 1.8\,C + 32 \qquad \Big/ + (-1.8\,C)$$

$$-0.8\,C = 32 \qquad \Big/ : 0.8$$

$$C = 32 : (-0.8)$$

$$\boxed{C = -40}$$

(40 gradi sotto 0, sia Celsius che Fahrenheit).

11.5 Complementi – Esempio parzialmente risolto

Abbiamo una provetta contenente 2 liquidi non miscibili di volumi 7 ml e 6 ml con pesi specifici incogniti e peso complessivo 12 g (si pesa la provetta e sottrae il peso del vetro) e un'altra provetta contenente gli stessi liquidi di volumi 5 ml e 9 ml rispettivamente e peso complessivo 14 g.

Per trovare i pesi specifici incogniti x e y risolviamo il sistema lineare (di 2 equazioni in 2 incognite)

(x g/ml) 7 ml+ (y g/ml) 6 ml=12 g

(x g/ml) 5 ml+ (y g/ml) 9 ml=14 g

ovvero

$$\begin{cases} 7\,x + 6\,y - 12 = 0 \\ 5\,x + 9\,y - 14 = 0 \end{cases}$$

che ha

$$\det = 7 \cdot 9 - 6 \cdot 5 = 72 - 30 \neq 0$$

e si troveranno i pesi specifici (qua dati senza l'unità di misura g/ml) $x = \frac{8}{11} \approx 0.727$ e $y = \frac{38}{33} \approx 1.151$.

Si tratta delle 2 rette della soprastante figura.