12 Piano cartesiano – IV parte

12.1 Parabole e funzioni e dis/equazioni di secondo grado

Come detto, ogni parabola con asse verticale ha un'equazione

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

con qualche $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

La parabola è un oggetto geometrico a cui sono associati – in particolare – 2 oggetti algebrici:
l'equazione di secondo grado e
la disequazione di secondo grado,
che andiamo a esaminare.

12.2 Equazione di secondo grado

Consideriamo per $a \neq 0$ l'equazione detta di secondo grado

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

e la sua parabola associata, avente asse verticale,

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

per esempio l'equazione e la parabola, associate fra loro,

$$2\,x^2 - x + 1 = 0 \qquad y = 2\,x^2 - x + 1$$

> Le equazioni di secondo grado hanno una grande ricorrenza nelle Scienze. Per esempio in Chimica, quando si prepara una soluzione tampone, il pH della soluzione dipende dalla concentrazione degli acidi e delle basi e dalla costante di dissociazione acida K_a, per esempio 10^{-5}: in alcuni casi, per calcolare il pH è necessario risolvere quest'equazione di secondo grado

$$x^2 + K_a\,x - K_0\,C_a = 0$$

essendo C_0 la concentrazione iniziale dell'acido, per esempio 0.1 M. In nota[77] un esempio della Fisica.

Si definisce il discriminante

$$\boxed{\Delta := b^2 - 4ac} \tag{16}$$

Nel piano cartesiano ci sono

6 tipi di parabole con asse verticale,

di generica equazione $y = a\,x^2 + b\,x + c$,
a seconda

di $\mathrm{sign}(a)$ (positivo o negativo, 2 casi) e

di $\mathrm{sign}(\Delta)$ (positivo o nullo o negativo, 3 casi).

[77] Una funzione di secondo grado dà lo spazio

$$s(t) = 9.81\,\frac{t^2}{2} + v_0\,t$$

percorso al tempo t da un corpo partito verso il basso con velocità v_0, nel campo gravitazionale terrestre, da altezza non troppo elevata, supposta la forma tale da rendere insignificante l'attrito con l'aria.

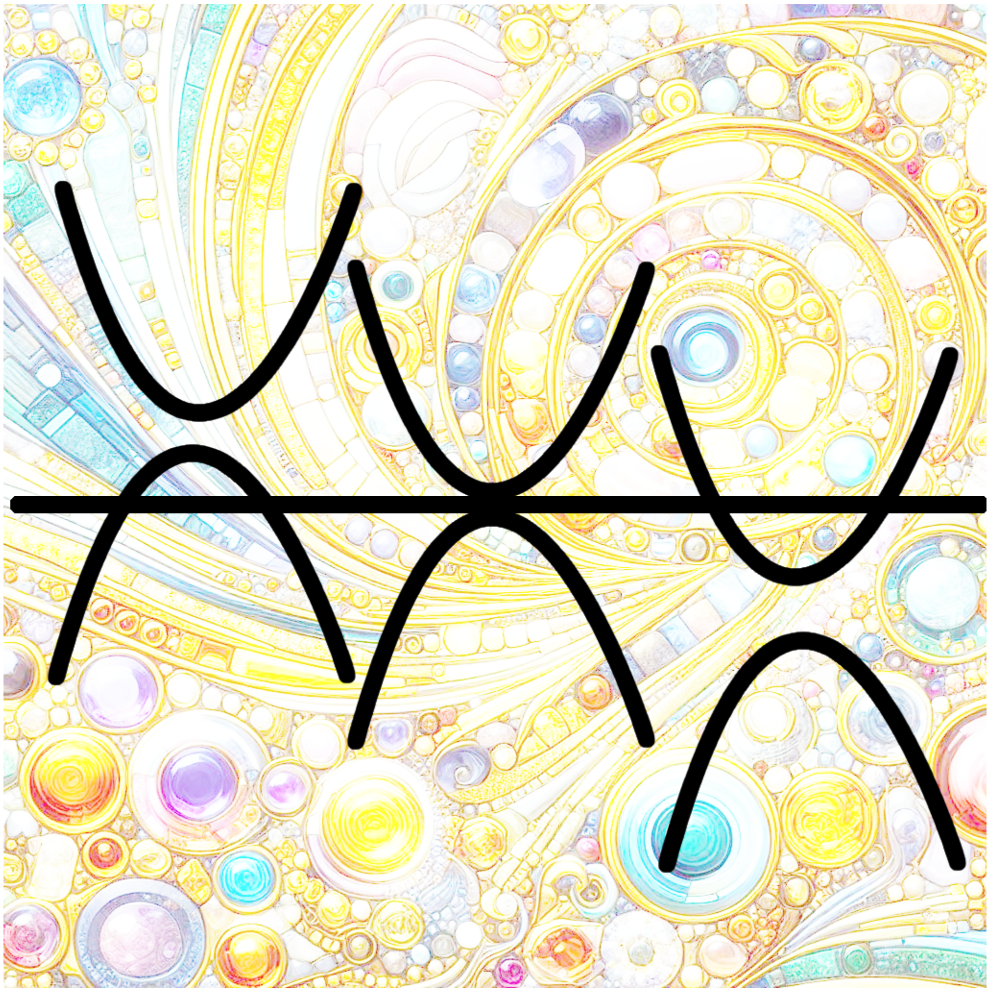


Figure 14: Bing Image Creator, rielaborata

La parabola interseca[78] l'asse x in

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}} \tag{17}$$

se $\Delta \geq 0$ e altrimenti mai, e sono le soluzioni dell'equazione di secondo grado associata.

[78] Vale anche questa *formula ridotta*

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} \qquad \frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - a\,c$$

utile se b è intero pari.

12.3 Valore assoluto, e relative dis/equazioni

Il valore assoluto in $\mathbb{R}$, già definito,

$$|x| := \begin{cases} x & se\ \ x \geq 0 \\ -x & se\ \ x < 0 \end{cases}$$

verifica queste proprietà:

$$|x| \geq 0$$

$$|-x| = |x|$$

$$|x|^2 = x^2$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \text{ e similmente } \Big(\forall\, y \neq 0\Big)\ |x/y| = |x|/|y|$$

$$|f(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$\Big(\forall\, a > 0\Big) \quad |f(x)| = a \Leftrightarrow f(x) = -a \vee f(x) = a$$

$$\Big(\forall\, a \geq 0\Big) \quad |x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a \ \ \textit{e analoga con} \ \geq$$

$$\Big(\forall\, a > 0\Big)\ \ |x| \leq a \ \Leftrightarrow\ -a \leq x \leq a$$

ovvero

$$\begin{cases} x \geq -a \\ x \leq a \end{cases}$$

e molte altre[79].

[79] Per il lettore interessato, ecco alcune altre formule sul valore assoluto:

$$||x|| = |x|$$

$$|x| = x \cdot \operatorname{sgn}(x)$$

$$x = |x| \cdot \operatorname{sgn}(x)$$

$$|x^n| = |x|^n \qquad \forall\, x \in I\!R, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

$$|x^\alpha| = |x|^\alpha \qquad \forall\, x \in I\!R^+, \ \forall\, \alpha \in I\!R$$

$$\Big(\forall\, a \geq 0\Big) \quad |f(x)| > a \Leftrightarrow f(x) < -a \vee f(x) > a \ \ \textit{e analoga con} \ \geq$$

$$\Big(\forall\, a > 0\Big) \quad |f(x)| \leq a \ \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq -a \\ f(x) \leq a \end{cases}$$

$$|f(x)| = g(x) \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \vee \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$$

Il valore assoluto ricorre un'infinità di volte nelle Scienze Applicate. Nel prossimo paragrafo ne vedremo alcune, e per intanto osserviamo che $|t|$ rappresenta una distanza temporale dall'istante 0, sia dopo che prima di 0.

12.4 Errore assoluto, relativo e percentuale

Nelle successive 3 formule, si noti che bisogna conoscere il valore esatto di una grandezza considerata.

Si definiscono

$$\text{errore assoluto [rispetto l'esatto]} := |approx - esatto|$$

$$\text{errore relativo [rispetto l'esatto]} := \frac{|approx - esatto|}{esatto}$$

errore percentuale [rispetto l'esatto] :=

errore relativo [rispetto l'esatto]:=

errore relativo [rispetto l'esatto] [in forma percentuale] :=

$$\frac{|approx - esatto|}{esatto} \cdot 100\%$$

Quest'ultimo errore relativo, e quello della seconda formula, sono lo stesso numero, ma espresso in 2 modi diversi.

Nelle Scienze Applicate ci vorrà grande cautela nell'applicare queste 3 formule perché i *valori misurati* vanno intesi in generale come *approssimati*.

---

e i 3 = possono sostituirsi con tutti e 4 i segni di disuguaglianza.

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

e l'ultima si chiama *disuguaglianza triangolare*.

Esempio 1.$_\mu$ All'inizio i 46 cromosomi umani furono erroneamente conteggiati come 44 con errore (percentuale) dell'ordine del 4%:

$errore\,assoluto\,[rispetto\,l'esatto]:\ 2$

$errore\,relativo\,[rispetto\,l'esatto]:\ \frac{1}{23}$

$errore\,percentuale\,[rispetto\,l'esatto]: \approx 4.3\%$ (diciamo pure 4%).

Esempio 2$_\mu$ L'approssimazione 3.14 del valore di π ha errore (percentuale) dell'ordine dello 0.5 per mille:

$$\text{errore percentuale rispetto l'esatto} := \frac{|3.14 - \pi|}{\pi} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{|3.14 - 3.14159265...|}{3.14159265...} \cdot 100\% \approx$$

$$\approx \frac{|3.14 - 3.14159265|}{3.14159265} \cdot 100\% \approx 0.051\% \approx 0.05\%$$

(Meno dell'1 per 1000, anzi circa lo 0.5 per mille).

12.5 La sezione aurea

La sezione aurea è[80] l'unica soluzione positiva dell'equazione

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

[80]La sezione aurea è anche l'unico numero $x > 0$ che sia *medio proporzionale* fra 1 e $1 + x$, cioè soluzione di

$$1 : x = x : (1 + x) \qquad (*)$$

che ora calcoleremo.
Riscriviamo la proporzione $(*)$ in questa forma

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1+x} \qquad \Big/ \cdot x \cdot (1+x)$$

$$1 + x = x^2$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

ed escludendo la radice negativa, troviamo la soluzione che denotiamo con φ

$$\boxed{\varphi = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \quad \text{sezione aurea}} \tag{18}$$

Questo numero φ tende a ricorrere nelle Scienze Naturali. È molto collegato alla successione di Fibonacci: si veda 6.12.1.

LINK->

Complementi

12.6 Complementi – 3 metodi per disegnare una parabola

(a) Un disegno approssimativo (del grafico) della parabola (di equazione)

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

(essendo a, b, c valori numerici noti) si ottiene per punti, e i 7 punti con queste coordinate *spesso* basteranno:

$x = -3; y = y(-3)$ ← calcolare con l'equazione soprastante
$x = -2; y = y(-2)$
$x = -1; y = y(-1)$
$x = -0; y = y(-0)$
$x = 1; y = y(1)$
$x = 2; y = y(2)$
$x = 3; y = y(3)$

(Oppure altri punti, se ritenuti più idonei).

(b) Oppure con i seguenti 7 passaggi, in effetti 8 in casi "sfortunati".

1) Si calcola il valore $-\frac{b}{2a}$.
2) Si segna quel valore sull'asse x.
3) Si disegna la retta verticale per il punto or ora segnato: quello è l'asse di simmetria della parabola.
4) Si calcola l'ordinata del vertice

$$y_V = y\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

5) Si segna il vertice V sull'asse di simmetria, con l'ordinata or ora calcolata.
6) Si segna il punto $Q = (0, c)$ che ovviamente appartiene alla parabola.
7) Se V e Q sono 2 punti diversi, con l'aiuto dell'asse di simmetria potete disegnare approssimativamente la parabola facendola passare per quei 2 punti, con sorta di "vaschetta" in V.
8) Se invece $V = Q$, tenete anche conto che:
se $a > 0$ la parabola è rivolta verso l'alto e se $a < 0$ verso il basso.

(c) Ovviamente usare WolframAlpha per disegnare le parabole è più semplice, affidabile, e professionale.

12.7 Complementi – Fattorizzazione del trinomio

Se x_1 e x_2, dati dalla soprastante formula risolutiva dell'equazione di secondo grado, sono
• le *radici* (eventualmente coincidenti) del *polinomio* $a\,x^2 + b\,x + c$,
• ovvero le *soluzioni* dell'*equazione* $a\,x^2 + b\,x + c = 0$,
• ovvero se $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$ sono le *intersezioni* della parabola con l'asse x,
allora vale questa
Formula di fattorizzazione del polinomio di secondo grado con $\Delta \geq 0$

$$\boxed{a\,x^2 + b\,x + c \equiv a\,(x - x_1)(x - x_2)} \tag{19}$$

12.8 Complementi – Disquazione di secondo grado

Risolviamo per esempio

$$-2\,x^2 - 2\,x + 12 > 0 \qquad \Big/ : (-2) < 0$$

$$x^2 + x - 6 < 0$$

e adesso che il *coefficiente principale* (cioè quello di x^2) è 1 applichiamo la (19) con le soluzioni $x_1 = 2$ e $x_2 = -3$ dell'*equazione associata*, trovate con le (16) e (17):

$$(x - 2)(x + 3) < 0 \tag{20}$$

Risolviamo, in ogni caso col >, le 2 disequazioni di primo grado
$x - 2 > 0$ ... $x > 2$
$x + 3 > 0$ ... $x > -3$
e allora nella regione intermedia, $-3 < x < 2$, il prodotto è negativo, e in conclusione, siccome in questo caso avevamo il < 0 in (20),

$$\boxed{-3 < x < 2}$$

Questo procedimento del *prodotto dei segni* si può usare anche per più di 2 termini moltiplicati, magari con uno *schema di prodotto dei segni*, che non approfondiamo.

(Altri Autori risolvono la disequazione di secondo grado col disegno della parabola).

12.9 Complementi – Esempio di sistema non lineare

Esercizio$_\mu$
La Formula di Keys – fra i numerosi standard – calcola

$$peso\,ideale\,uomini = (statura\,in\,metri)^2 \times 22.1 \qquad (*)$$

Per quale statura (realistica) essa dà – per gli uomini – lo stesso peso della Formula di Broca

$$peso\,ideale = (statura\,in\,centimetri - 100) \pm 10\%$$

intesa senza la tolleranza del 10%?

Svolgimento
La Formula di Broca intesa senza la tolleranza del 10% è ovviamente

$$peso\,ideale = statura\,in\,centimetri - 100$$

ovvero

$$peso\,ideale = (statura\,in\,metri - 1) \times 100 \qquad (**)$$

da mettere a sistema con la $(*)$:

$$\begin{cases} p = 22.1\,h^2 & \text{che è la } (*) \\ p = 100\,(h-1) & \text{che è la } (**) \end{cases}$$

che è un sistema (non lineare) di 2 equazioni in 2 incognite, e uguagliando si ha successivamente

$$22.1\,h^2 = 100\,(h-1)$$

$$22.1\,h^2 - 100\,(h-1) = 0$$

$$22.1\,h^2 - 100\,h + 100 = 0$$

$$h_{1,2} = \frac{50 \pm \sqrt{50^2 - 22.1 \cdot 100}}{22.1}$$

$$h \approx 3.03 \quad \vee \quad h \approx 1.49$$

e ovviamente la prima soluzione non ha senso dal punto di vista della realtà sensibile (è ovvio che tutte queste formule hanno un certo dominio entro il quale funzionano bene, e poi perdono significato nella realtà).

$$\boxed{\approx 149\,cm}$$

(Il peso ideale corrispondente sarebbe $\approx 49\,kg$).

12.10 Complementi – Un altro sistema non lineare

Esempio oltre il livello che ci prefiggiamo.
Questo ***sistema di equazioni e disequazioni*** in 2 incognite

$$\begin{cases} x\,y = 0 & \leftarrow rappresenta\, 2\, rette,\ x = 0\, e\, y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 \le 0 & \leftarrow rappresenta\, 1\, cerchio,\ C(1,1),\ r = 1 \end{cases}$$

equivale a

$$\begin{cases} x = 0 \vee y = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1 \end{cases} \tag{21}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x = 0 \\ (0-1)^2 + (y-1)^2 \le 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ (x-1)^2 + (0-1)^2 \le 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ (y-1)^2 \le 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ (x-1)^2 \le 0 \end{cases} \tag{22}$$

ha soluzione, come anche si vedeva subito graficamente,

$$\boxed{\Big(x = 0 \wedge y = 1\Big) \vee \Big(x = 1 \wedge y = 0\Big)}$$

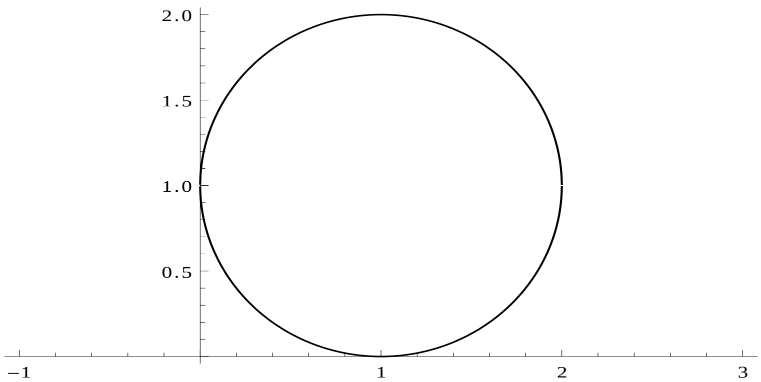


Figure 15: Il cerchio (“pieno") e l’unione delle 2 rette del sistema

12.11 ESERCIZI SULLA LEZIONE 12

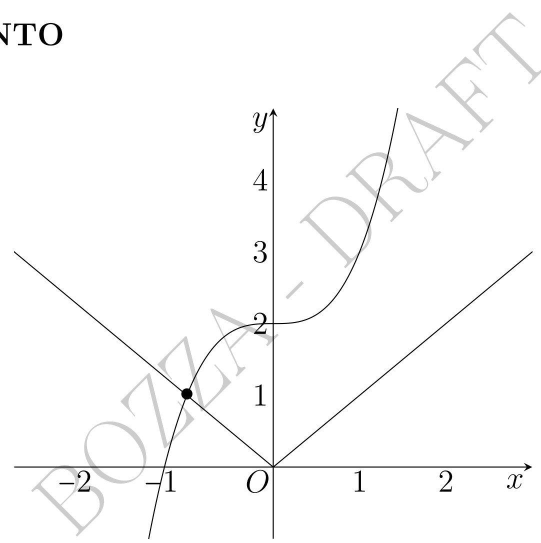
12.11.1 Esercizio risolto a – Risoluzione grafica

ESERCIZIO$_{\mu 2024}$ $\ast$ Risolvere per via grafica il sistema di equazioni

$$\begin{cases} y = |x| \\ y = x^3 + 2 \end{cases}$$

(dando la soluzione nella forma $x = ...$, $y = ...$).

SVOLGIMENTO



Già bastano questi pochi (valori delle coordinate di) punti dei 2 grafici

x	$\|x\|$
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2

x	$x^3 + 2$
-2	-6
-1	1
0	2
1	3
2	10

e disegnando (vedi figura) sullo stesso piano cartesiano grafici (approssimativi), vediamo subito che c'è un punto di intersezione $(-1, 1)$, e non esistono altri per le proprietà elementari delle funzioni $|x|$ e x^3, e allora la soluzione del sistema di equazioni è data dalle coordinate x e y dell'unico punto di intersezione dei grafici:

$$\boxed{x = -1,\ y = 1}$$

III – Funzioni elementari, con equazioni e disequazioni