13 Funzioni e dis/equazioni ir/razionali

13.1 Polinomi e funzioni razionali intere

Un polinomio è una *scrittura* come

$x^2 - 4$ oppure

$2\,x^7 - \frac{3}{2}\,x^5 + \sqrt{3}\,x^2 - x + 2$ e in generale

$$a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots + a_n\,x^n$$

e n è il *grado* se $a_n \neq 0$.
Il polinomio definisce una funzione *razionale intera* o *polinomiale*

$$f(x) := a_0 + a_1 \; + a_2\,x^2 + \ldots + a_n\,x^n$$

Naturalmente f e x solo solo 2 degli infiniti nomi possibili, possono anche trovarsi anche g, y, *temperatura*, *tempo*...
Per esempio

$g(t) := t^4 + t + 4$

$\mathit{temperatura}(\mathit{tempo}) := 2 \cdot \mathit{tempo}^3 + 100$

$\mathit{tempo}(\mathit{temperatura}) := \frac{1}{2} \cdot \mathit{temperatura} - 30$

che hanno gradi 4, 3 e 1 rispettivamente.

Esistono similmente polinomi in più variabili, come $x^2 + x^8\,y^2 - 1$, del cui grado (che comunque in questo esempio è 10) non ci occuperemo.

13.2 Funzioni e dis/equazioni razionali intere

Limitandosi ad 1 variabile, sia essa x, le

equazioni razionali intere

e le

disequazioni razionali intere

sono predicati con uguaglianza o disuguaglianza fra polinomi, che dopo opportune riduzioni che popolarmente si dicono “portare le x a sinistra", assumono una di queste forme, essendo $P(x)$ un polinomio:

• disequazioni:
∘ $P(x) > 0$
∘ $P(x) < 0$ idem
∘ $P(x) \geq 0$ idem
∘ $P(x) \leq 0$ idem
— e ci limiteremo solo a disequazioni di
  ⋄ I grado, già trattate, e
  ⋄ II grado, già trattate.

• equazione:
∘ $P(x) = 0$
— e ci limiteremo a:
  ⋄ equazioni di I grado, già trattate, ed
  ⋄ equazioni di II grado, già trattate, e
  ⋄ $x^n\cdot$(polinomio di I o II grado)= 0 **unico caso nuovo** (*)

e quest'ultimo, molto semplicemente, si risolve aggiungendo lo 0 alle radici del polinomio nella parentesi. Faremo un esempio pratico, poco sotto.

Naturalmente si potrebbero considerare casi più complessi: si vedano i Complementi a questa Lezione.

Per la generica equazione di III e IV grado esistono complicate formule, trovate da matematici italiani nel XVI secolo, che non tratteremo. Ci accontentiamo di $x^n\cdot$(polinomio di I o II grado)= 0, come sopra detto, che può avere anche grado maggiore di 4, ma è molto particolare.

Esempio$_\mu$ La Formula di Livi per il peso ideale è
$peso\,ideale = (2.37 \times altezza\,in\,metri)^3$
La Formula di Keys per il peso ideale per le donne è $pesoidealedonne = (altezza\,in\,metri)^2 \times 20.6$
Per quali altezze (realistiche) danno lo stesso peso, e quale?

Detta h l'altezza in metri – unità di misura che metteremo nella soluzione ma ometteremo nei calcoli – abbiamo l'equazione di 3^

grado
$$(2.37\,h)^3 = 20.6\,h^2$$
e successivamente
$$2.37^3 \cdot h^3 - 20.6\,h^2 = 0$$
che è equazione *cubica*, ovvero *razionale intera di terzo grado*, ma del tipo (*)
$$h^2 \cdot (2.37^3 \cdot h - 20.6) = 0$$
$$h = 0\,(\textit{non realistica}) \quad 13.312053\,h = 20.6$$
e allora
$$h = \frac{20.6}{13.312053}$$
$$p = \left(\frac{20.6}{13.312053}\right)^2 \cdot 20.6$$
$$\boxed{\begin{array}{c} h \approx 1.55\,m \\ p \approx 49.3\,kg \end{array}}$$

13.3 Funzioni e dis/equazioni razionali fratte

Ovviamente l'*equazione razionale fratta*
$$\begin{array}{r} \textit{polinomio} \rightarrow \\ \textit{polinomio} \rightarrow \end{array} \quad \frac{N(x)}{D(x)} = 0$$
ha la stessa soluzione dell'equazione razionale intera
$N(x) = 0$
tolte le eventuali radici del denominatore.

La *disequazione razionale fratta*
$$\begin{array}{r} \textit{polinomio} \rightarrow \\ \textit{polinomio} \rightarrow \end{array} \quad \frac{N(x)}{D(x)} > 0$$
ha la stessa soluzione di $N(x) > 0$ se sappiamo che il denominatore è positivo per ogni x, per esempio se il denominatore è $x^2 + 1$.
Se invece non sappiamo se il denominatore è sempre positivo, si ha un caso più complicato, di cui non ci occuperemo (e sicuramente rarissimo in Farmacia).

13.4 Una funzione razionale fratta della Farmacia

Mostriamo una funzione razionale fratta di qualche interesse farmaceutico, almeno teorico, in quanto si è mostrato in un articolo scientifico (su un campione di 363 bambini) che, almeno per l'età pediatrica, approssima abbastanza bene i risultati della ben più nota formula di Mosteller per l'area della superficie corporea (dato di interesse per esempio nel dosaggio dei chemioterapici), che è più complessa da calcolare coinvolgendo sia peso che altezza (invece che solo peso) e una radice quadrata (invece che solo "le 4 operazioni"):

$$AreaSuperficieCorporea = BSA = \frac{4\,w + 7}{90 + w}$$

essendo w il peso in chilogrammi: https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/19430073/: "It can safely replace Mosteller formula and dispense the need for time-consuming calculations."

13.5 Le funzioni radice quadrata e cubica

Abbiamo visto nel ripasso di algebra cosa sono la radice quadrata di un numero $x \geq 0$ e la radice cubica di un numero x qualunque.

Al variare di x si ottengono le funzioni radice quadrata e radice cubica. Sono entrambe crescenti. Per $x \geq 0$ queste 2 funzioni hanno grafici qualitativamente simili che si intersecano in $(0,0)$ e $(1,1)$ ma per x sufficientemente grande [81] la radice cubica cresce più lentamente della radice quadrata. (Valgono entrambe $+\infty$ in $+\infty$ nel senso del limite che vedremo, ma la radice cubica ci arriva, per così dire, più lentamente).

La radice cubica è dispari e allora ha grafico simmetrico rispetto all'origine.

[81] In effetti già per $x > 0.087791...$

13.6 Funzioni e dis/equazioni irrazionali

• Le radici di indice dispari (cubiche, quinte...) sono crescenti su $\mathbb{R}$ e allora l'equazione o disequazione

$$\sqrt[dispari]{f(x)} \;_{qualunque\,segno\,di\,dis/uguaglianza}\; g(x)$$

si può affrontare semplicemente elevando ambo i membri all'indice (dispari) della radice (che così scompare). Allora si hanno queste 5 semplici equivalenze, che si ricavano subito appunto elevando a potenza conservando l'uguaglianza o l'ordinamento, e allora in definitiva non c'è niente da veramente “imparare a memoria":

$$\begin{array}{rclcll}
\sqrt[3]{f(x)} & = & g(x) \Leftrightarrow f(x) & = & g^3(x) & \\
 & > & & > & & \\
 & \geq & & \geq & & \text{in tutte} \\
 & < & & < & & \text{l'ordinamento} \\
 & \leq & & \leq & & \text{si conserva}
\end{array}$$

e il 3 della radice può sostituirsi con ogni indice dispari.

• Il caso delle radici di indice pari (radici quadrate, quarte...) è meno semplice perché sono definite solo sui numeri non negativi.

Vale questa formula di riduzione

$$\sqrt{f(x)} = a \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = a^2$$

e altre che si trovano nei Complementi di questa Lezione.

13.7 Una funzione algebrica con grafico sigmoide

Definiamo funzione sigmoide o sigmoidea, in via semplificata, una funzione limitata e cioè

$$a < f(x) < b$$

la quale prima ha la concavità verso l'alto e poi verso il basso. Non è assolutamente una definizione standard.

Il suo grafico lo chiameremo curva sigmoide o sigmoidea.

Il prototipo è la funzione arcotangente; si veda il grafico di

`arctan(x)`

su WolframAlpha. In base alla soprastante definizione, non $\sqrt[3]{x}$.

Le funzioni sigmoidi sono semplici modelli per innumerevoli fenomeni delle Scienze Applicate, e in particolare per il numero cumulativo di morti, o di casi, eventualmente per milione, di un'ondata epidemica, nel mondo o in uno stato o regione.

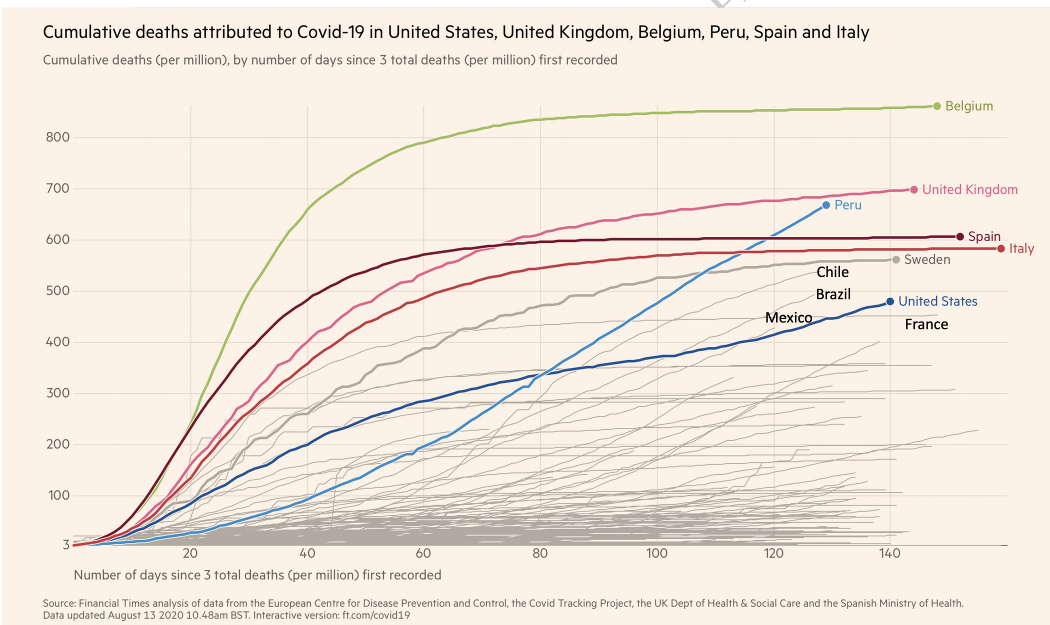

Figure 16: Numero cumulativo di decessi per milione di abitante della pandemia del 2020 verso la metà di agosto 2020, in alcuni stati. (Lo 0 temporale è diverso stato per stato, cioè, per esempio, il giorno 100 dell'epidemia non avviene lo stesso giorno nei vari stati, perchè dipende da quando l'epidemia è iniziata in ogni singolo stato).

Adesso vediamo una funzione sigmoide definita solo con le 4 operazioni e la radice quadrata,

$$f(x) := \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

che cresce da -1 a 1, e quest'altra sua correlata

$$g(x) := \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

che cresce da 0 a 1. Essa potrebbe per esempio rappresentare, al variare del tempo x con una qualche unità di misura temporale, il numero cumulativo di morti di covid per mille abitanti, in una regione geografica, in una singola ondata pandemica. (Con ondate successive, la curva si complica).
(Il Belgio nell'agosto 2020 aveva circa 0.9 morti per mille abitanti, in crescita, ormai lieve, come si vede nella figura).
La ricerca scientifica ha comunque trovato molto migliori funzioni, e più complesse, per modellizzare le epidemie.

Complementi

13.8 Complementi – Un esempio non banale

$2\,x^4(-x^2-2x+8)(2-x)(1-x+x^2)=0$ o, disequazione, >0,

oppure altra disequazione con $\geq$ oppure $<$ oppure $\leq$.
Per risolvere *fattorizziamo* il polinomio in fattori di primo grado e/o di secondo grado *irriducibili* ovvero con discriminante negativo. E poi si risolve con uno schema di prodotto dei segni.
Ecco qualche dettaglio per il lettore interessato. Il monomio $2\,x^4$ si fattorizza in $2\,x\cdot x\cdot x\cdot x$ ma in effetti i fattori che sono monomi x^n conviene lasciarli stare come sono. Il polinomio di secondo grado $-x^2-2x+8$, con discriminante positivo, abbiamo visto che è $-1\cdot(x-2)(x+4)$. Il fattore di primo grado $2-x$ è già a posto. E $1-x+x^2$ è irriducibile avendo discriminante negativo, e allora non ha zeri. Si ha allora la fattorizzazione

$$2\,x^4(-1)(x-2)(x+4)(2-x)(1-x+x^2)\,.$$

L'equazione con $=0$ equivale, considerato che $x^4=0\Leftrightarrow x=0$,

$$x=0\ \vee\ x-2=0\ \vee\ x+4=0\ \vee\ 2-x=0$$

che dà $x\in\{-4,0,2\}$. La disequazione si fa con lo schema di prodotto dei segni visto in precedenza trovandosi (per ≤ 0) la soluzione $x\leq-4\vee x=0\vee x=2$. Per >0 si troverebbe $-4<x<0\vee 0<x<2\vee x>2$.

13.9 Complementi – Un esempio difficile

L'equazione e le 4 disequazioni

$$2\,x^9-2\,x^8-22\,x^7+56\,x^6-56\,x^5+32\,x^4 \quad =0,\ >0,\ \geq 0,\ <0,\leq 0$$

si risolvono come in 13.8 una volta che si riconoscesse che questo è proprio il polinomio di prima, ma ora è molto lontano dalla fattorizzazione. Il problema di fattorizzare un polinomio può essere

facile, come è in questo caso, o difficile, o impossibile.
Prima di tutto *raccogliamo* il fattore x^4, subito visto:

$$x^4\,(2\,x^5 - 2\,x^4 - 22\,x^3 + 56\,x^2 - 56\,x + 32)$$

e ci resta da fattorizzare il polinomio $P_5(x)$ di 5^ grado. In questo caso si può fare abbastanza facilmente ma in questa trattazione ci limiteremo solo ai casi in cui, arrivati a questo punto, si abbia un polinomio di grado al più 2 (invece qua è 5) e allora si procede come prima.
Per il lettore interessato: prima si raccoglie 2

$$2\,(x^5 - 2\,x^4 - 11\,x^3 + 28\,x^2 - 28\,x + 16)$$

in modo da avere un polinomio *monico*, cioè con *coefficiente principale* 1, poi si procede con la Regola di Ruffini, se si può. Cercheremo qua *solo* fattori $x - m$ con m un divisore intero del termine costante: ± 1, ± 2, ± 4, ± 8, ± 16. Allora basta cercare un numero m fra quelli, il quale annulli il polinomio. È $P_5(2) = 0$ e allora dividiamo per $x - 2$ con la Regola di Ruffini:

i coefficienti →	+1	−1	−11	+28	−28	+16
la radice → +2	↓	+2	+2	−18	+20	−16
	+1	+1	−9	+10	−8	0 ← sempre così

che dà i coefficienti del quoziente, e allora la fattorizzazione

$$(x-2)(x^4 + x^3 - 9x^2 + 10x - 8)$$

e riprendendo il monomio x^4 e il fattore 2

$$2\,x^4(x-2)(x^4 + x^3 - 9x^2 + 10x - 8)\,.$$

Si continua cercando un fattore $x - m'$ con m' fra i divisori interi di -8, e si trova che 2 annulla il polinomio di quarto grado $P_4(x)$, e allora lo si divide per $x - 2$ con la Regola di Ruffini trovando

$$2\,x^4(x-2)(x-2)(x^3 + 3x^2 - 3x + 4)$$

poi cercando fra i divisori interi di 4 si trova l'annullamento di $P_3(x)$ in -4 da cui con la Regola di Ruffini applicata a $P_3(x)$

$$2\,x^4(x-2)(x-2)(x+4)(x^2-x+1)$$

che è come prima (un fattore è opposto ma congloba il (-1)).

13.10 Complementi – Dis/equazioni con radice quadrata

Per le equazioni valgono queste formule di riduzione

$$\sqrt{f(x)} = a \geq 0 \Leftrightarrow f(x) = a^2$$

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

Per le disequazioni valgono queste formule di riduzione

$$\sqrt{f(x)} > a \Leftrightarrow f(x) > a^2 \; se \; a > 0, similmente \; \geq \tag{23}$$

$$\sqrt{f(x)} < a \Leftrightarrow 0 \leq f(x) < a^2 \; se \; a > 0, similmente \; \leq \tag{24}$$

e altre formule su cui non insisteremo. Per il lettore interessato ecco altre formule limitatamente alla radice quadrata.
Prima di tutto il caso che diremo **"radice minore"**

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

Poi il caso **"radice minore o uguale"**, similissimo a quello "radice minore":

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$$

e poi 2 casi (similissimi) **"radice maggiore"** e **"radice maggiore o uguale"**:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases} \quad \vee \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 1_μ $\sqrt{x^2 - 9} \geq x - 1$.
Esercizio 2_μ $x > \pi + \sqrt{x^2 - 10}$.

Esempio$_\mu$ Useremo la Formula di Mosteller per l'area della superficie corporea, in questa versione:

$$area \approx \frac{\sqrt{altezza_m \times peso_{kg}}}{6}$$

Considerato un soggetto per un certo tempo, in cui possiamo ritenere costante la sua altezza, sia essa h, può ben variare il suo peso, sia esso x.
Per quel soggetto abbiamo allora una funzione

$$area(x) = \frac{1}{6}\sqrt{h \cdot x}$$

essendo h l'altezza (in metri, costante),

x il peso (in chilogrammi),

$area(x)$ l'area della superficie corporea (in metri quadrati).
Per quali pesi la superficie corporea sarebbe minore di 2 metri quadrati in questo modello?

Abbiamo la disequazione

$$\frac{1}{6}\sqrt{h \cdot x} < 2 \qquad \Big/ \cdot 6 > 0 \text{ (conserva l'ordinamento)}$$

$$\sqrt{h \cdot x} < 12$$

che risolviamo come in (24)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h \cdot x \geq 0 & \Big/ : h > 0 \text{ (conserva l'ordinamento)} \\ \\ h \cdot x < 12^2 & \Big/ : h > 0 \text{ (conserva l'ordinamento)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 & \text{(ovvio, è un'altezza)} \\ \\ x < \frac{144}{h} \end{cases}$$

$$\big(0 \leq \big)\, x < \frac{144}{h}$$

Per esempio con un'altezza di 1.71 m, $x < 84.2$. (Sotto gli 84 kg, circa).
Per esempio con un'altezza di 1.82 m, $x < 79.1$. (Sotto i 79 kg, circa).

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
Si risolva la seguente disequazione:

$$x > \mathrm{e} + \sqrt{x^2 - 8}$$

SVOLGIMENTO
Essendoci una radice quadrata, cercheremo di ricondurci al caso "radice maggiore" oppure al caso "radice minore", e in effetti in questo caso

$$x > \mathrm{e} + \sqrt{x^2 - 8} \quad \Big/ + (-\mathrm{e})$$

$$x - \mathrm{e} > \sqrt{x^2 - 8}$$
$$\sqrt{x^2 - 8} < x - \mathrm{e}$$

proprio al caso "radice minore", e allora la disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} x^2 - 8 \geq 0 \\ x - \mathrm{e} > 0 \\ x^2 - 8 < (x - \mathrm{e})^2 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x \leq -\sqrt{8} \vee x \geq \sqrt{8} \\ x > \mathrm{e} \\ x^2 - 8 < x^2 - 2\,\mathrm{e}\,x + \mathrm{e}^2 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x \leq -2\sqrt{2} \vee x \geq 2\sqrt{2} \approx 2.82 \\ x > \mathrm{e} \approx 2.718 \text{ che sappiamo a memoria} \\ 2\,\mathrm{e}\,x < \mathrm{e}^2 + 8 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{\mathrm{e}^2+8}{2\,\mathrm{e}} \approx 2.831 \text{ con la calcolatrice dal soprastante} \end{cases}$$

e mettendo in ordine crescente i capisaldi (ovvero valori delimitanti) trovati

........$-2\sqrt{2}$.........e..........$2\sqrt{2}$......... $\frac{\mathrm{e}^2+8}{2\,\mathrm{e}}$..........
..............|.............|.............|...............|............. schema d'intersezione
~~~~~ – – – – – – – –– ~~~~~~~~~~~
– – – – – – – –– ~~~~~~~~~~~~~~~~ $\cap$
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~ – – ––

otteniamo il soprastante schema d'intersezione che ci dà la soluzione

$$\boxed{2\sqrt{2} \leq x < \frac{\mathrm{e}^2+8}{2\,\mathrm{e}}}$$