14 Esponenziali e logaritmi – I parte

14.1 Vecchie funzioni potenza e nuove esponenziali

Già sappiamo il significato della

$$\text{potenza} \quad 2^3 \quad \text{e in generale } b^a$$

di base $b > 0$ ed esponente $a \in \mathbb{R}$

(Se $a > 0$ allora esiste anche per $b = 0$ e vale 0).

Notoriamente, se "liberiamo" la base abbiamo le **funzioni potenza**

$$x^a \qquad \text{per esempio } x^2,\ x^3,\ x^{10},\ x^{\frac{1}{2}}$$

Ma se "liberiamo" l'esponente abbiamo le **funzioni esponenziali**

$$b^x \qquad \text{per esempio } 2^x,\ 3^x, 10^x, \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

di base 2, di base 3, eccetera;
e questa funzione è caratterizzata da

"al crescere di 1 della x la b^x si moltiplica per b"

"al diminuire di 1 della x la b^x si divide per b"

per esempio al crescere di 1 della x la 2^x raddoppia, e la 10^x decuplica.

Le funzioni esponenziali modellizzano un'infinità di processi delle Scienze Applicate, con crescenza sempre più rapida se la base è $b > 1$, e decrescenza verso 0 se $0 < b < 1$.
Si vedano online su WolframAlpha i grafici per $x \geq 0$ delle funzioni esponenziali di basi $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 2, 3, che passano tutti per $(0, 1)$ (illustrando la $c^0 = 1$), e le funzioni potenza con esponenti quegli stessi numeri, che passano tutti per $(1, 1)$ (illustrando la $1^c = 1$).

14.2 Le 4 basi di maggior interesse

Le **basi** più significative sono queste 4, e vediamo alcuni esempi:

•2: la 2^n dà il num. di sottoinsiemi di un insieme di n elementi;

•φ: la $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$ approssima per intero $n \gg 0$ la successione di Fibonacci,

$$\text{e } \varphi \text{ è la } \textit{sezione aurea, } \varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618; \tag{25}$$

•10: per la notazione scientifica dei numeri, $x \cdot 10^n$, con n intero;

•e: e^x è la **funzione esponenziale** (senza dire "di base e") ed

e è il numero di Nepero o numero di Eulero, in inglese Euler's number:

$$\boxed{\mathrm{e} \approx \mathbf{2.718}} \tag{26}$$

Per ricordare queste cifre, sono stati realizzati molti mnemonici, frasi[82] in cui le lunghezze delle parole corrispondono alle cifre

[82]**Mnemonici per le cifre di e.**

Associando ordinatamente ad ogni parola di certe frasi il loro numero di lettere, si ottengono le prime cifre di e. Dello scrivente, in inglese, per esempio:

Of
Eulerus
e
constant.

Dello scrivente, in italiano:

> *"La loquela è vincente* $\leftarrow 2,7,1,8$
> *ma talvolta è migliore il silenzio,* $\leftarrow 2,8,1,8,2,8$
> *come disse Aristocle."* $\leftarrow 4,5,9$

i numeri delle lunghezze delle parole, si ottengono le prime cifre significative di e: $2,7,1,8,2,8,1,8,2,8,4,5,9$.

Fra le molte molte frasi analoghe, una famosa con le stesse cifre è

> *"Ai modesti o vanitosi*
> *ai violenti o timorosi*
> *do, cantando gaio ritmo,*
> *logaritmo."*

(delle approssimazioni) di e.
In figura (in inglese) uno mnemonico (dello scrivente) per ricordarne le cifre (contando le lettere delle parole).

e ≈ 2.718 HE BECOMES A DICTATOR

```
2 ← HE
7 ← BECOMES
1 ← A
8 ← DICTATOR
```

Altre notazioni:

$$\mathrm{e}^x \text{ si denota } \exp x \qquad \text{o meglio } \exp(x).$$

Raramente, e in questo testo quasi mai, si scrive anche

$$\exp_b a \text{ per intendere } b^a, \text{ per esempio } \exp_2 3 = 8$$

* **Nota sul valore esatto di e.** Questo numero è parente di pi greco, e come quello è irrazionale (e, come quello, pure *trascendente*). Il suo valore esatto è la “somma infinita" (serie) dei reciproci dei fattoriali dei numeri naturali:

$$\mathrm{e} := \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

14.3 L'esponenziale in Farmacia

L'esponenziale ha una ricorrenza enorme nelle Scienze Applicate.

Ecco un'equazione classica della Farmacia, e precisamente della Farmacocinetica, che coinvolge l'esponenziale:

$$C = \frac{\dot{m}}{K} + \left(C_o - \frac{\dot{m}}{K}\right) \mathrm{e}^{-\frac{K \cdot t}{V}} \quad (83)$$

L'esponenziale modellizza bene sia la fase iniziale di un'epidemia, che la fase iniziale dell'espansione di una popolazione microbica in coltura. La successione di Fibonacci, che sostanzialmente è ben approssimata da $\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n$ che è una funzione esponenziale, è un buon modello:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89...

Un buon modello dello sviluppo successivo è la logistica, definita pur essa con l'esponenziale, che viene illustrata nel paragrafo seguente.

14.4 Una sigmoide basata sull'esponenziale

Una questione interessante è quella della *logistica standard*

$$f(t) := \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-t}}$$

un'altra funzione sigmoide ovvero con grafico una curva sigmoide.

È correlata allo sviluppo di una popolazione (animale, microbica...) quando si consideri che, ad un certo punto – e a differenza di quel che si considera nel modello ultra-semplificato della successione di Fibonacci – i vari organismi iniziano ad ostacolarsi a vicenda.
Si calcolino i suoi valori in -2, -1, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1, 2, e si disegni un grafico approssimativo.
Si veda il grafico su Wikipedia.

[83] Si veda https://en.wikipedia.org/wiki/Clearance_(pharmacology). Il simbolo $\dot{m}$ indica la *derivata di m rispetto al tempo*, si veda la Lezione 23.

Ricordiamo che questo le curve sigmoidee hanno un'ampia ricorrenza nelle Scienze Applicate e in Calcolo delle Probabilità.
Per evidenze in Epidemiologia si cerchino in rete immagini con le parole chiave: "first wave" "cumulative".

14.5 Logaritmi

La funzione inversa dell'esponenziale in base b si chiama logaritmo in base b e la vedremo bene nella prossima lezione.

$$\log_{10} 1000 = 3 \text{ perchè } 10^3 = 1000$$

Per intanto si noti che tutti gli esponenziali in 0 valgono 1, e allora tutti i logaritmi in 1 valgono 0.
Si disegnino i grafici degli esponenziali e simmetricamente – rispetto alla bisettrice del I e III quadrante – dei logaritmi, fissando le basi 2 e poi 10.

Si verifichi poi online su WolframAlpha.
Sul grafico di WolframAlpha non si vede la simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante perché la scale sugli assi x e y sono diverse.

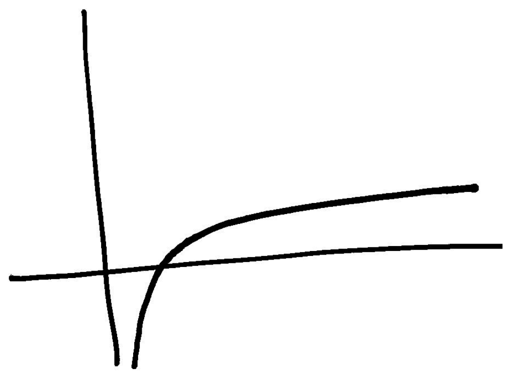
La funzione logaritmo in base 10 è caratterizzata da
- *"al decuplicare della x il $\log_{10} x$ cresce di 1"*

e similmente
- al raddoppiare della x il $\log_2 x$ cresce di 1
- al dimezzare della x il $\log_2 x$ decresce di 1.

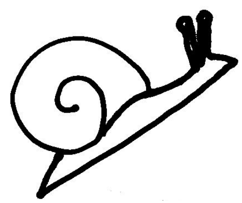
Cresce pianissimo! *("Striscia come un logaritmo").*

$$\log_{10} 1 = 0 \quad \log_{10} 10 = 1 \quad \log_{10} 100 = 2 \quad \log_{10} 1000 = 3$$

In pratica il logaritmo decimale di 1, 10, 100, 1000, 10000... è il numero di zeri; rimaniamo per ora un po' incerti su quanto valgano il logaritmo decimale degli altri numeri, e gli altri logaritmi.



Striscia come un logaritmo



Il lentissimo crescere del logaritmo ha profonde implicazioni in Analisi Matematica, Teoria dei Numeri, Complessità Computazionale, Fisica, Chimica...

14.6 I diagrammi logaritmici

La lentissima crescenza del logaritmo in base 10 permette la costruzione dei diagrammi in scala logaritmica: invece di rappresentare nel piano cartesiano i punti, poniamo,

$(1, 1)$, $(10, 10)$, $(100\,000, 100\,000)$,

ciò che molto verosimilmente produrrebbe l'indistinguibilità pratica dei primi 2 punti, usiamo i logaritmi di quei numeri, cioè in pratica, in questo caso, il numero di zeri: prima $(0, 0)$, poi $(1, 1)$, poi $(5, 5)$: e vengono punti ben distinguibili all'occhio. Naturalmente bisogna avvertire il lettore della scala logaritmica usata.

La rappresentazione in scala logaritmica può essere applicata a 1 o 2 degli assi del piano cartesiano (ci sono 3 casi denominati lin-log, log-lin e log-log). Per esempio in questo diagramma (semplificato) delle fasi dell'acqua, la scala logaritmica è applicata ai valori della pressione sull'asse delle ordinate.

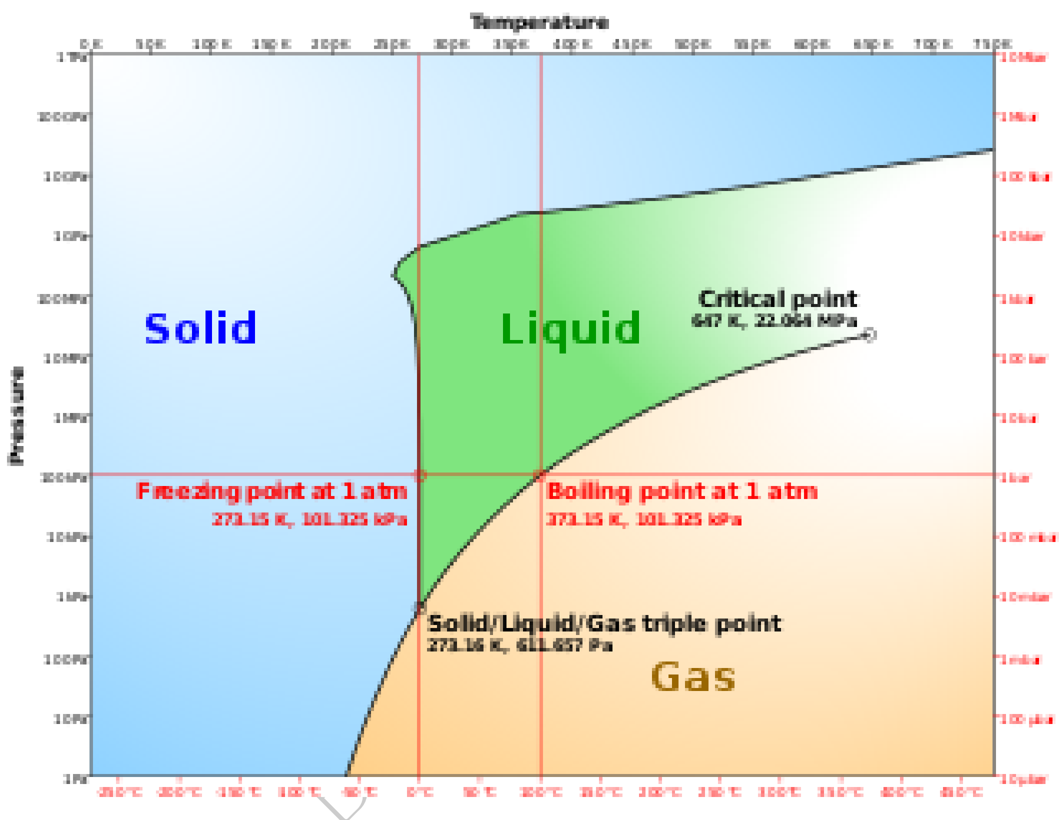


Figure 17: Diagramma di fase dell'acqua, semplificato. By Cmglee, in Wikimedia.

Si vedano ancora per esempio le (veramente appropriate per l'argomento che trattiamo) figure 1a (*linear-log plot*) e 1b (*log-log plot*) in un articolo sui farmaci anti-HIV.

Grafici epidemici in scala logaritmica. Nella figura sottostante sono considerati tutti gli stati confinanti con l'Italia settentrionale (Francia, Svizzera, Austria, Slovenia) e in più quelli di una vastissima area, dal Friuli Venezia Giulia fino ai confini di Russia e Bielorussia.

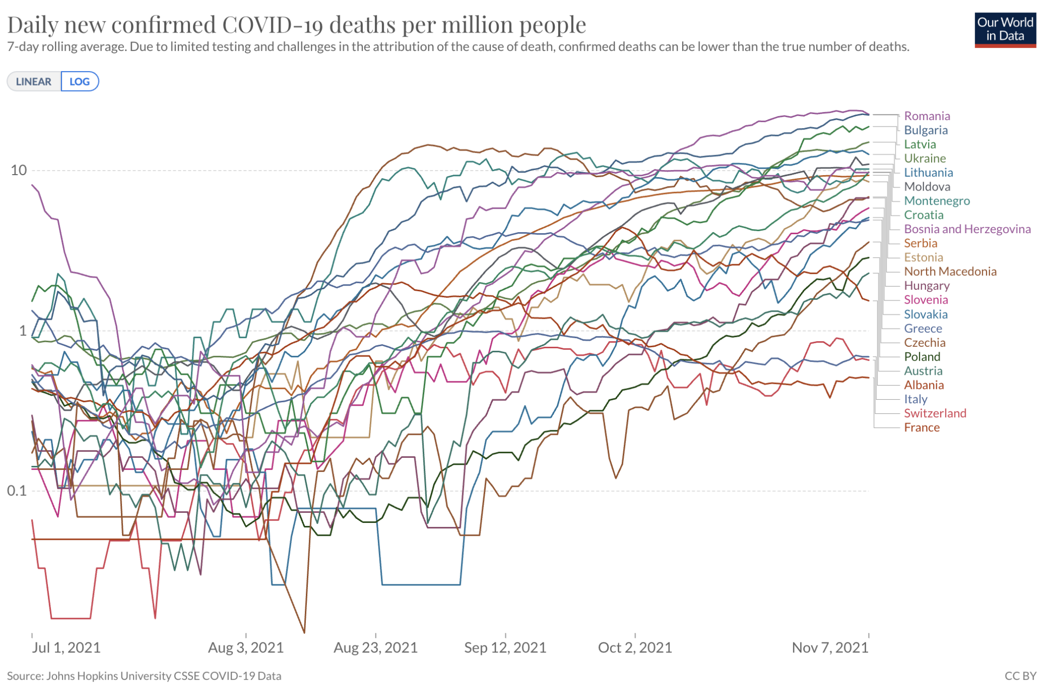


Figure 18: Decessi covid-19 giornalieri, media mobile a 7 giorni

In un normale diagramma cartesiano sarebbero praticamente indistinguibili i grafici di Italia, Francia e Svizzera, ben distinti nel log plot.

Questi 3 stati hanno mortalità covid giornaliera, all'inizio di novembre 2021, sotto l'1 per milione, gli altri stati considerati sopra 1 e alcuni di molto.

Come si verifica facilmente, i primi 3 stati considerati hanno avuto una drammatica prima ondata della pandemia nella primavera del 2020, mentre nessuno degli altri l'ha avuta, iniziando ad avere grandi numeri solo dopo l'estate 2020.

14.7 Logaritmi in Farmacia e nelle Scienze Applicate

I logaritmi hanno una ricorrenza enorme nelle Scienze Applicate.

Ecco 5 ricorrenze dei logaritmi nella Farmacia, che vedremo:

1) i diagrammi in scala logaritmica, sopra accennati;
2) il pH della Chimica;
3) il decibel usato nella misurazione dell'udito;
4) la clearance dei farmaci;

5) La Curva di Preston, del prossimo paragrafo

14.8 La curva di Preston

L'aspettativa di vita alla nascita è uno dei principali indicatori di sviluppo di uno stato (correlato anche a Medicina e Farmacia) insieme alla mortalità infantile (a un anno, e in subordine a 5 anni) e al reddito pro-capite.
Il primo e l'ultimo di questi indicatori, y e x, appaiono da molto tempo correlati a livello mondiale da questo modello empirico:

$$y = 6.6354 \log_{\mathrm{e}} x + 10.754 + error$$

con *error* positivo o negativo ma di solito non grande, il cui grafico – tolto l'*error* – si chiama *curva di Preston*. Ecco la curva e lo scatterplot.

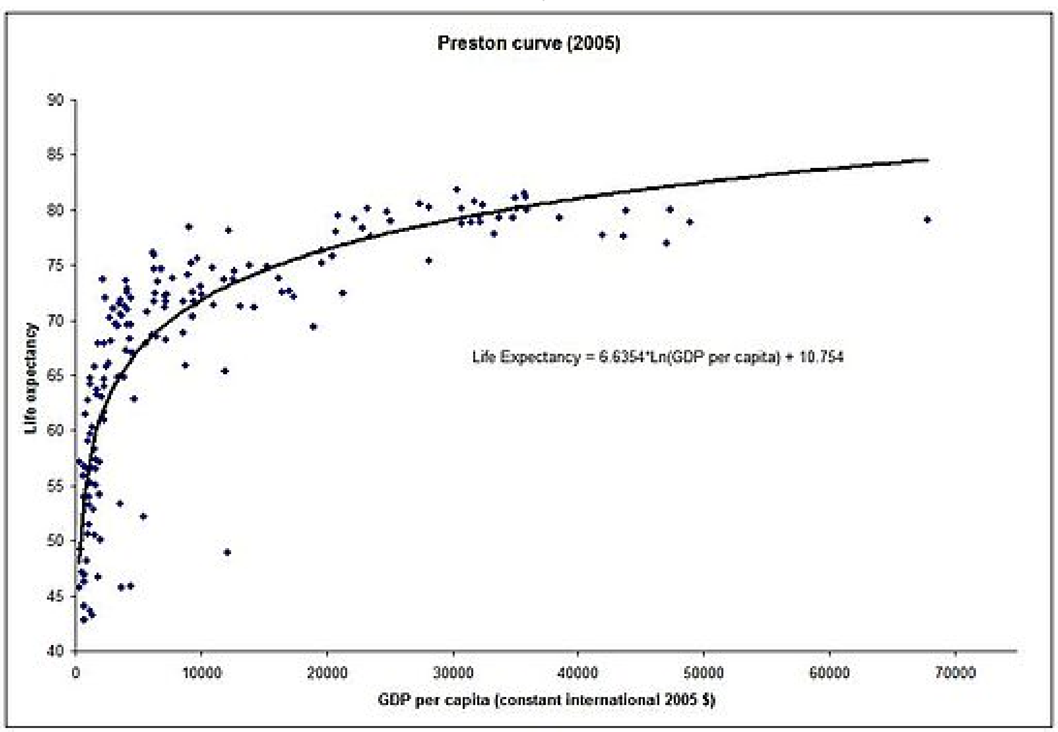


Figure 19: Curva di Preston. Da Wikimedia Commons.

Nota. Sebbene il diagramma illustri una correlazione e non dimostri – in senso stretto – una causalità, induce a riflettere: di quanto si può impoverire una comunità con lockdown e limitazioni ad attività commerciali, per prevenire una malattia che causa morte, senza causare un numero maggiore di morti per impoveriimento?
Icasticamente e semplificatamente – senza nessuna pretesa di esattezza numerica – possiamo dire:

"LA FAMIGLIA BENESTANTE IMPOVERITA RINUNCIA A METÀ DELLE AUTOMOBILI, LA FAMIGLIA POVERA IMPOVERITA A METÀ DEL CIBO, CHE A QUEL PUNTO POTREBBE NON BASTARE PER SOPRAVVIVERE."
Di fatto,dall'inizio del covid sono emersi aumenti di mortalità enormi, in vari Stati, solo in minor parte imputabili direttamente al covid. Bisognerà studiare attentamente le cause a cui sono dovuti: impoverimento, mancata cura di altre malattie, riduzione del movimento fisico... Ci sono varie ipotesi, e ognuna avrà il suo peso, positivo o negativo, da determinare scientificamente.

Limitandoci qua fortemente, anche per non farci il sangue troppo, troppo amaro, sulla gestione della pandemia del covid citiamo([84]) comunque un editoriale del 2020 del British Medical Journal, una delle più importanti riviste mediche del mondo:

> "Science is being suppressed for political and financial gain. Covid-19 has unleashed state corruption on a grand scale, and it is harmful to public health. (...) When good science is suppressed, people die."

Naturalmente all'impoverimento di miliardi di persone ha corrisposto l'arricchimento di alcuni.
Dal punto di vista della Statistica, la pandemia – ovvero chi aveva il potere di indirizzo sulle comunità umane, non il virus *in persona* – ha *spostato* smisurate quantità di ricchezza da molti a certi pochi, in tempi prima inconcepibilmente

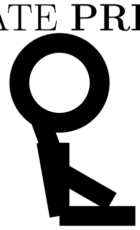
[84]Covid-19: politicisation, "corruption," and suppression of science BMJ 2020; 371 doi: https://doi.org/10.1136/bmj.m4425 (Published 13 November 2020) Cite this as: BMJ 2020;371:m4425

rapidi.
Trascriviamo da Oxfam in
https://www.oxfamitalia.org/la-disuguaglianza-non-conosce-crisi/

> Nel biennio pandemico '20-'21 l'1% più ricco ha visto crescere il valore dei propri patrimoni di 26.000 miliardi di dollari, in termini reali, accaparrandosi il 63% dell'incremento complessivo della ricchezza netta globale (42.000 miliardi di dollari), quasi il doppio della quota (37%) andata al 99% più povero della popolazione mondiale.
> (...) Per la prima volta in 25 anni aumentano inoltre simultaneamente estrema ricchezza ed estrema povertà.

Mnemonico per il nome Preston

FATE **PRESTO**OOOOO....



14.9 Complementi – Unicità degli esponenziali

In buona sostanza, esiste "solo una" funzione esponenziale, e tutte le altre si ottengono riscalando l'argomento. Per esempio la funzione 3^t, essendo t un tempo corrispondente ai mesi (senza unità di misura: numero puro), dà esattamente gli stessi valori della funzione 9^t con t misurato in bimestri (senza unità di misura: numero puro): la prima al mese 4 vale 81 come la seconda al bimestre 2, che è lo stesso tempo nella realtà sensibile.

ESERCIZIO$_{\mu}$ ≈ Risolvere l'equazione $x\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} = 1$.

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale).

Dividiamo ambo i membri per uno stesso numero diverso da 0 (essendo il valore di un esponenziale)

$$x\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} = 1 \qquad \Big/ : \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \neq 0$$

$$x = \frac{1}{\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}} =$$

che è già la soluzione esatta (seppure non bene espressa) e poi per le proprietà delle potenze

$$x = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}} =$$

e già abbiamo la soluzione esatta ed espressa bene, che ora approssimeremo; per le proprietà delle potenze

$$= \left(\mathrm{e}^{3}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

per le proprietà delle potenze e delle radici

$$= \sqrt{\mathrm{e}^{3}} = \sqrt{\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}} \approx$$

ricordando il valore approssimato di e, e poi con la calcolatrice

$$\approx \sqrt{2.718\cdot 2.718\cdot 2.718} \approx \sqrt{20.079} \approx$$

$$\boxed{\approx 4.481}$$

ma senza voler azzardare tanti decimali (comunque giusti, come si può verificare con una buona calcolatrice o col computer) diciamo con maggior sicurezza, e comunque buona accuratezza,

$$\boxed{4.48}$$

Esercizio$_{\mu dispensa}$ (R) ≈ Quanto vale, con 2 decimali dopo la virgola, la media geometrica di pi greco e il numero di Nepero ovvero Eulero?

$$\boxed{2{,}92}$$

(È la radice quadrata del prodotto di 3,14 e 2,718. Con queste approssimazioni le calcolatrici danno 2,9213... che magari ci verrebbe la tentazione di approssimare con 2,921 ma molto opportunamente il testo del quesito ci previene dal farlo chiedendo 2 decimali dopo la virgola: infatti la terza cifra decimale dopo la virgola in 2,921 non è corretta relativamente al quesito posto (formulato per π ed e, non per loro valori approssimati). La cifra decimale corretta, terza dopo la virgola, sarebbe il 2 di 2,9222... – ma appunto non ci riguarda – e questo succede perchè le classiche approssimazioni che si ritengono usualmente a memoria, 3,14 e 2,718, non sono i valori esatti di π ed e).