

15 Esponenziali e logaritmi – II parte

15.1 Definizione del logaritmo

Nella formula seguente

- il 2023 può essere sostituito con qualunque numero positivo;
- il 7 può essere sostituito con qualunque numero positivo $\neq 1$;

la formula resta vera: e metà della teoria del logaritmo è spiegata.

$$2023 = 7^{\log_7 2023} = 7^{3,911\,967\dots}$$

Se interessa anche il valore numerico del logaritmo del nuovo numero nella nuova base, il 3,911967... andrà sostituito col nuovo valore numerico $\log_b a$ che si può trovare per esempio col computer.

Una terzina di ottonari:

*Logaritmo ad esponente,
Se si mette, la sua base
Lui si mangia, evanescente.*

**Il logaritmo in base b di x è
l'esponente da dar a b per aver x .**

(Ma) dev'essere $x > 0$, e $0 < b \neq 1$.

**In tutta questa lezione col simbolo
LOG intenderemo un logaritmo in
qualunque base.**

E ovviamente in una formula in cui compaiono
più LOG è da intendersi che sono tutti in una
stessa base.

15.2 Logaritmi naturali e decimali; esponenziale

Come abbiamo anticipato, la funzione inversa dell'esponenziale in base b si chiama logaritmo in base b .

Facciamo un passo indietro, verso l'algebra.

Per introdurre i logaritmi algebricamente, possiamo vedere

$$\log_2 8 = 3 \quad \text{come una scrittura alternativa di} \quad 2^3 = 8.$$

Ecco due esempi scritti come implicazioni:

$$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8 \quad \log_{10} 100 = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 100.$$

Considereremo quasi solo 2 basi: di grande importanza applicativa per secoli, e ancor oggi usato in Chimica,

il *logaritmo decimale*, in base 10,

$$\lg x \quad \text{oppure} \quad \log_{10} x \quad (\text{ma purtroppo anche } \log x),$$

e il *logaritmo naturale*, in base e ,

$$\ln x \quad \text{oppure} \quad \log_e x \quad (\text{ma purtroppo anche } \log x).$$

Insomma la scrittura $\log x$ è ambigua e può riferirsi a logaritmi in base e e in base 10, e anche in altre basi. 😊

La base 10 è stata di grande importanza applicativa per secoli, e ancor oggi è usata in Chimica.

La base e è oggi preferita in Matematica e Fisica.

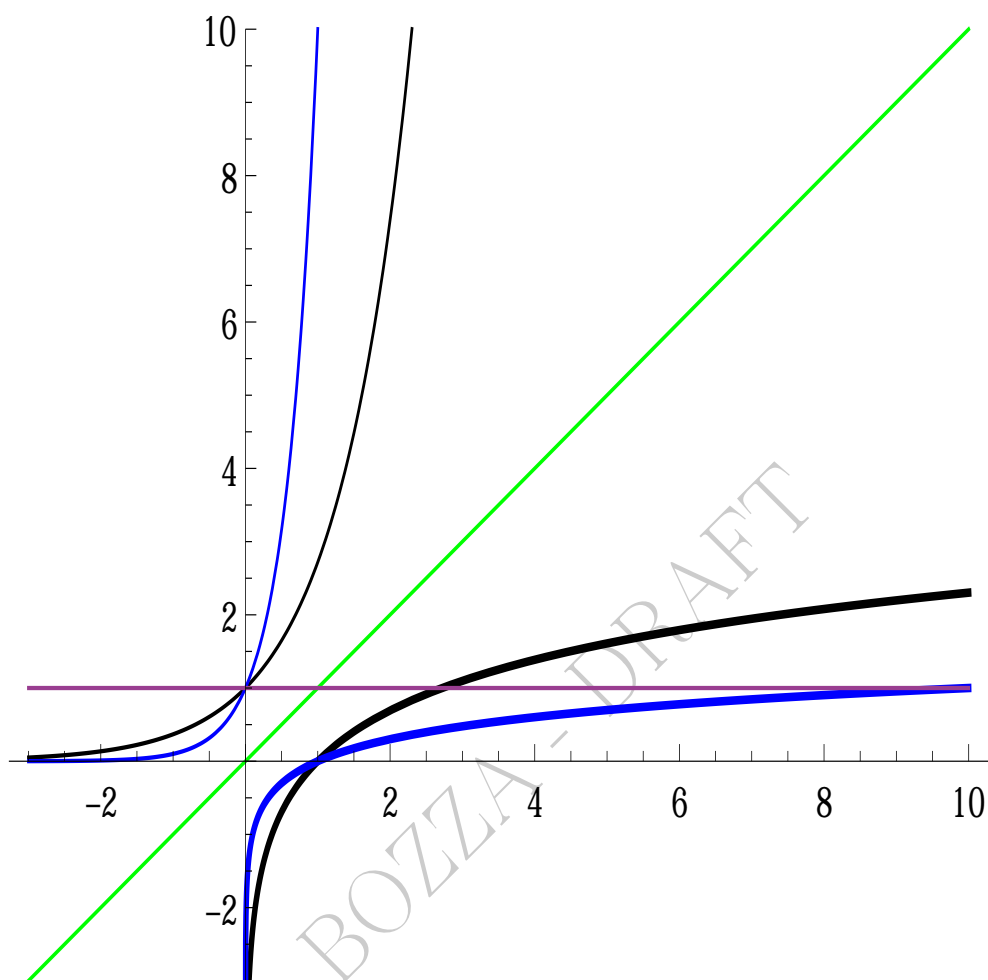


Figure 20: $\log_e x$ (nero), e^x (nero), $\log_{10} x$ (blu), 10^x (blu)

Ecco due valori che ci proponiamo di imparare a memoria:

$$\boxed{\lg 2 \approx 0.3} \quad (27)$$

O meglio ≈ 0.301 . Il numero 0.3 ha errore (percentuale rispetto l'esatto) $< 0.5\%$.

$$\boxed{\lg e \approx 0.4343} \quad (28)$$

Tutti i logaritmi in 1 valgono 0. I logaritmi in base $b > 1$ sono funzioni crescenti (“verso $+\infty$ ”), e in base $0 < b < 1$ decrescenti (“verso $-\infty$ ”). In ogni caso il crescere in valore assoluto avviene con straordinaria lentezza, per esempio $\log_{10} 1000 = 3$. I limiti in 0 sono rispettivamente $-\infty$ e $+\infty$. In ogni caso è $\log_b : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

(Per ogni possibile base b) il logaritmo in base b è una funzione biiettiva, e la sua inversa è la funzione esponenziale in base b , cioè b^x .

L'inversa del logaritmo naturale è la *funzione esponenziale*, ed è definita su tutto \mathbb{R} , cioè $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\exp = \ln^{-1} \quad \ln = \exp^{-1},$$

ed è la funzione esponenziale di base e :

$$\exp x = e^x.$$

Questi $^{-1}$ denotano l'inversa, [assolutamente non il reciproco](#).

(L'inversa di $\ln x$ come detto è $\exp x$, la reciproca di $\ln x$ è $\frac{1}{\ln x}$, una funzione completamente diversa, neanche definita per $x < 0$).

L'esponenziale in 0 vale 1, ed è crescente "verso $+\infty$ " con grande rapidità, per esempio, $\exp(20)$ è più o meno mezzo miliardo.

Ripetiamo.

In tutta questa lezione col simbolo LOG intenderemo un logaritmo in qualunque base.

E ovviamente in una formula in cui compaiono più LOG è da intendersi che sono tutti in una stessa base.

15.3 "Trasforma prodotti in somme"

La proprietà fondamentale dei logaritmi:

$$\boxed{\text{LOG}(x \cdot y) = \text{LOG}(x) + \text{LOG}(y)} \quad (29)$$

Per esempio

$$\begin{aligned} \lg 2000 &= \\ &= \lg(2 \cdot 1000) = \\ &= \lg 2 + \lg 1000 \approx \\ &\approx 0.3 + 3 = \\ &= 3.3 \text{ (valore approssimato)}. \end{aligned}$$

Un valore più preciso è 3.301.

Con l'estrema lentezza della crescita del logaritmo, il logaritmo decimale di 2022 non si allontana molto: si trova infatti ≈ 3.306 .

Il logaritmo
Vispo volpino
Con un suo ritmo
Fa uno spuntino.

LOG

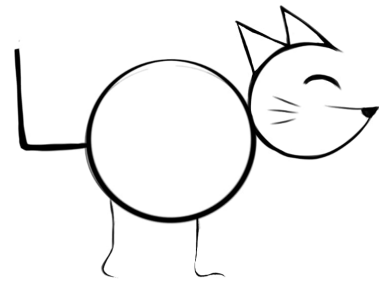
Un bel prodotto
Vorace ingoia,
Poi che lo ha rotto,
Che il punto muoia.
Proprio soccomba:
Lascia una tomba.

LOG(X·Y)

·

+

E lui si sdoppia: LOG(X) + LOG(Y)
Forma una coppia.



15.4 “Trasforma divisioni in sottrazioni”

$$\boxed{\text{LOG}(x/y) = \text{LOG}(x) - \text{LOG}(y)} \quad (30)$$

Per esempio

$$\begin{aligned} \lg 5 &= \\ &= \lg \frac{10}{2} = \\ &= \lg 10 - \lg 2 \approx \\ &\approx 1 - 0.3 = \end{aligned}$$

= 0.7 (valore approssimato).

15.5 “Trasforma reciproco in opposto”

$$\boxed{\text{LOG}\left(\frac{1}{y}\right) = -\text{LOG}(y)} \quad (31)$$

che si ottiene dal caso del precedente con $x = 1$: $\text{LOG}(1/y) = \text{LOG}(1) - \text{LOG}(y) = 0 - \text{LOG}(y)$.

Per esempio

$$\begin{aligned} \lg 0.5 &= \\ &= \lg \frac{1}{2} = \\ &= -\lg 2 \approx -0.3 \end{aligned}$$

Esempio. In Spettroscopia, l'*assorbanza* è⁽⁸⁵⁾ l'opposto del logaritmo decimale della *trasmissione*, ovvero il logaritmo decimale del suo reciproco:

$$\alpha = -\lg \tau = \lg \frac{1}{\tau}$$

15.6 “Trasforma la radice ennesima in divisione per n”

$$\boxed{\text{LOG}(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \text{LOG}(x)} \quad (32)$$

In particolare

“Trasforma l'estrazione di radice quadrata nel dimezzamento”:

$$\boxed{\text{LOG}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \text{LOG}(x)} \quad (33)$$

Per esempio

$$\lg \sqrt{10} = \frac{1}{2} \lg 10 = \frac{1}{2} \cdot 1 = 0.5$$

Osservando che $\sqrt{10} \approx 3.16 \approx \pi$ troviamo

$$\lg \pi \approx 0.5$$

e con la calcolatrice scientifica troviamo infatti ≈ 0.497 .

⁸⁵Si veda Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce [Trasmissione](#)

15.7 “Trasforma l’elevare a potenza in moltiplicare”

Logaritmo della potenza.

“Tira giù gli esponenti”

$$\boxed{\text{LOG}(x^\alpha) = \alpha \text{LOG}(x)} \quad (34)$$

per ogni α e x per cui ha senso⁽⁸⁶⁾ la scrittura, e da quest’ultima discendono alcune delle precedenti proprietà, ponendo α uguale a -1 e poi $\frac{1}{n}$ e poi $\frac{1}{2}$.

Da quell’uguaglianza, con facili argomentazioni che comunque non facciamo, si trova che

“Tira giù l’esponente 2 e aggiunge il valore assoluto”:

$$\boxed{\text{LOG}(x^2) = 2 \text{LOG}(|x|)} \quad (35)$$

e più in generale per n intero

“Tira giù gli esponenti pari e aggiunge il valore assoluto”:

$$\boxed{\text{LOG}(x^{2n}) = 2n \text{LOG}(|x|)} \quad (36)$$

Naturalmente anche senza valore assoluto le ultime 2 formule sono vere, ma col valore assoluto valgono anche per $x < 0$.

Come esempio della proprietà del logaritmo della potenza, considerando 1.024 vicino a 1, si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{1024}{1000} &= 1.024 \\ \frac{1024}{1000} &\approx 1 \quad / \lg \\ \lg\left(\frac{1024}{1000}\right) &\approx \lg 1 \\ \lg 1024 - \lg 1000 &\approx 0 \\ \lg 1024 &\approx \lg 1000 \\ \lg 2^{10} &\approx \lg 10^3 \\ 10 \lg 2 &\approx 3 \\ \lg 2 &\approx \frac{3}{10} \end{aligned}$$

che spiega l’approssimazione $\lg 2 \approx 0.3$ che ci siamo proposti di imparare a memoria.

⁸⁶Precisamente: $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x > 0$.

15.8 Esempi di calcoli coi logaritmi

$$\lg 4 = \lg(2 \cdot 2) = \lg 2 + \lg 2 \approx 0.3 + 0.3 = 0.6$$

$$\lg 8 = \lg(2 \cdot 2 \cdot 2) = \lg 2 + \lg 2 + \lg 2 \approx 0.3 + 0.3 + 0.3 = 0.9$$

$$\lg 5 = \lg(10/2) = \lg 10 - \lg 2 \approx 1 - 0.3 = 0.7$$

Esercizio _{$\mu 2021$} \approx
Risolvere l'equazione

$$\lg e^{2x} = 8$$

SVOLGIMENTO

$$\lg e^{2x} = 8$$

$$2x \lg e = 8 \quad / : 2 \lg e$$

$$\Rightarrow x = \frac{8}{2 \lg e} \approx \frac{8}{2 \cdot 0.4343} \approx$$

$$\approx 9.21$$

ESERCIZIO 2 _{$\mu 2025$} * Essendo lb il logaritmo in base 2, risolvere l'equazione

$$\lg x - \lg \frac{1}{x} = \text{lb} 8$$

SVOLGIMENTO

Per una proprietà del logaritmo (in qualunque base) del reciproco

$$\lg x - (-\lg x) = \text{lb} 8$$

$$\lg x + \lg x = \text{lb} 8$$

$$2 \lg x = \text{lb} 8$$

$$\lg x = \frac{\text{lb} 8}{2}$$

e il logaritmo di 8 in base 2 è l'esponente da dare a 2 per avere 8, cioè 3:

$$\lg x = \frac{3}{2} \quad / 10^{\wedge}$$

$$x = 10^{\frac{3}{2}}$$

$$\boxed{10^{\frac{3}{2}}}$$

ovvero $(10^3)^{\frac{1}{2}}$ cioè $\sqrt{1000}$

$$\boxed{\sqrt{1000}}$$

ovvero anche, scomponendo 1000 in $100 \cdot 10$,

$$\boxed{10\sqrt{10}}$$

15.9 Prevenire è meglio che curare: errori tipici

Questa formula già vista

$$\text{LOG}(x \cdot y) = \text{LOG}(x) + \text{LOG}(y)$$

è vera ogni volta che ha senso (e cioè per x e y positivi) e riguarda il logaritmo del prodotto.

Errori tipici sono scambiare fra loro il $+$ col \cdot e simili⁽⁸⁷⁾ cose.

⁸⁷In generale la sequenza $\cdot +$ della formula non si può sostituire con

$+$
 \cdot
 \dots
 $+$
 $+$

Detto altrimenti:

$$\text{LOG}(x \cdot y) \equiv \text{LOG}(x) + \text{LOG}(y)$$

è un'identità, cioè un'uguaglianza sempre vera (per gli x e y per cui ha senso, cioè positivi) invece per esempio

$$\text{LOG}(x + y) \stackrel{EQ}{=} \text{LOG}(x) + \text{LOG}(y)$$

è un'equazione, vera solo per particolari valori (x, y) , per esempio $(2, 2)$:

$$\text{LOG}(2 + 2) = \text{LOG}(4) = \text{LOG}(2^2) = 2\text{LOG}(2) = \text{LOG}(2) + \text{LOG}(2).$$

Ma non succede certo con $(3, 3)$ o $(2, 3)$ o $(3, 2)$.

Ripetiamo la formulazione giusta:

logaritmo del prodotto = somma dei logaritmi. (Ovviamente, nella stessa base).

15.10 Esempio di uso del logaritmo: il pH.

Il pH è una complessa questione chimica, per la quale si rinvia comunque ai testi specialistici. Qua vogliamo illustrarne qualche proprietà matematica.

Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce pH:

pH is defined as the decimal logarithm of the reciprocal of the hydrogen ion activity, a_{H^+} , in a solution

$$\text{pH} = -\log_{10}(a_{H^+}) = \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H^+}}\right)$$

Se il pH diminuisce di 1 questo equivale al decuplicare di a_{H^+} :

$$\begin{aligned} \text{pH} - 1 &= \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H^+}}\right) - 1 = \\ &= \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H^+}}\right) + (-1) = \\ &= \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H^+}}\right) + \log_{10}\frac{1}{10} = \\ &= \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H^+}} \cdot \frac{1}{10}\right) = \\ &= \log_{10}\left(\frac{1}{10 a_{H^+}}\right) \end{aligned}$$

Così il suo diminuire di 2 corrisponde al centuplicare di a_{H^+} .

Complementi

15.11 Complementi – Con riferimento alle varie basi

Come già detto

“Trasforma prodotti in somme”:

(formule per il *logaritmo del prodotto* ed *esponenziale della somma*)

$$\lg(xy) = \lg x + \lg y, \quad \forall x, y > 0 \qquad 10^{x+y} = 10^x \cdot 10^y$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \forall x, y > 0 \qquad e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y, \quad \forall x, y > 0 \qquad b^{x+y} = b^x \cdot b^y$$

Come già detto

“Trasforma divisioni in sottrazioni”:

(formule per il *logaritmo del quoziente* ed *esponenziale della differenza*)

$$\lg(x/y) = \lg x - \lg y, \quad \forall x, y > 0 \qquad 10^{x-y} = 10^x / 10^y$$

$$\ln(x/y) = \ln x - \ln y, \quad \forall x, y > 0 \qquad e^{x-y} = e^x / e^y$$

$$\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y, \quad \forall x, y > 0 \qquad b^{x-y} = b^x / b^y .$$

Come già detto

“Tira giù gli esponenti”:

(formule per il *logaritmo della potenza*)

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall x > 0) \lg x^\alpha = \alpha \lg x$$

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall x > 0) \ln x^\alpha = \alpha \ln x$$

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall x > 0) \log_b x^\alpha = \alpha \log_b x$$

e da quest'ultima discendono tutte le successive proprietà di questo paragrafo, ponendo α uguale a -1 e poi $\frac{1}{2}$ e poi $\frac{1}{n}$.

E per esponenti pari anche

$$(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall x \neq 0) \lg x^{2n} = 2n \lg |x|$$

$$(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall x \neq 0) \ln x^{2n} = 2n \ln |x|$$

$$(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall x \neq 0) \log_b x^{2n} = 2n \log_b |x|$$

Come già detto

“Trasforma il passaggio al reciproco nel passaggio all'opposto:”

$$\lg \frac{1}{x} = -\lg x$$

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

$$\log_b \frac{1}{x} = -\log_b x$$

Come già detto

“Trasforma l'estrazione di radice quadrata nel dimezzamento:”

$$\lg \sqrt{x} = \frac{1}{2} \lg x$$

$$\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$$

$$\log_b \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log_b x$$

e questo si estende alle radici di qualunque indice:

$$\lg \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \lg x$$

$$\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \ln x$$

$$\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_b x .$$

15.12 Complementi – Altre proprietà

Dalle definizioni e proprietà dette, discendono subito le seguenti.

In questo paragrafo, b rappresenta qualunque numero reale che possa essere base di un logaritmo, cioè

$$b > 0 \wedge b \neq 1.$$

Un'attenta considerazione di quanto detto finora dà

$$(\forall x > 0, x \neq 1) \quad \log_x x = 1$$

e queste 6:

"exp mangia log e log mangia exp"

$$\lg 10^x = x, \forall x \quad 10^{\lg x} = x, \forall x > 0.$$

$$\ln \exp x = \ln e^x = x, \forall x \quad \exp \ln x = e^{\ln x} = x, \forall x > 0$$

$$\log_b b^x = x, \forall x \quad b^{\log_b x} = x, \forall x > 0.$$

Tutte le successive proprietà degli esponenziali ci sono già note dall'Algebra, e alcune proprietà dei logaritmi le abbiamo viste da poco; altre sono nuove.

I logaritmi in 1 valgono 0 e gli esponenziali in 0 valgono 1:

$$\lg 1 = 0 \quad 10^0 = 1$$

$$\ln 1 = 0 \quad e^0 = 1$$

$$\log_b 1 = 0 \quad b^0 = 1$$

15.13 Complementi – Esempi di calcoli coi logaritmi

Esempi con le proprietà 1, 2 e 4 del logaritmo decimale.

$\lg 3 = \lg \sqrt[5]{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \lg \sqrt[5]{243} \approx$
 sostituiamo approssimativamente 243 con 250

$$\begin{aligned} \approx \lg \sqrt[5]{250} &= \frac{1}{5} \lg 250 = \frac{1}{5} \lg \frac{1000}{4} = \\ &= \frac{1}{5} (\lg 1000 - \lg 4) = \frac{3 - 0.6}{5} = 0.48 \end{aligned}$$

$$\lg 6 = \lg(3 \cdot 2) = \lg 3 + \lg 2 \approx 0.48 + 0.3 = 0.78$$

$$\lg 9 = \lg(3 \cdot 3) = \lg 3 + \lg 3 \approx 0.48 + 0.48 \approx 0.96 \quad \text{☺}$$

ma per eccesso di approssimazioni quest'ultimo fallisce sul secondo decimale, infatti troviamo con calcolatrice scientifica o WolframAlpha

$$\lg 9 \approx 0.95$$

Adesso abbiamo i logaritmi - in effetti approssimazioni in generale - dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; aggiungiamo

$$\lg 0.1 = \lg \frac{1}{10} = -\lg 10 = -1$$

e disegniamo un grafico!

$$\lg 7 = \lg \sqrt{49} = \frac{1}{2} \lg 49 \approx$$

sostituiamo approssimativamente 49 con 50

$$\approx \frac{1}{2} \lg 50 = \frac{1}{2} \lg(5 \cdot 10) = \frac{1}{2} (\lg 5 + \lg 10) \approx \frac{1}{2} (0.7 + 1) \approx 0.85$$

(Ci mancano 3, 6 e 9, che vedremo; 1, 2 e 10, e ora 4, 5, 7, 8, li abbiamo: provate a disegnare un grafico e stimare così i 3 valori mancanti; poi verificherete le stime).

Esempio: calcolo del $\log_{10}(50\,000)/2$ dei prodotti omeopatici.

Leggiamo su Wikipedia (inglese)⁽⁸⁸⁾ alla voce *Homeopathic dilutions*:

⁸⁸https://en.wikipedia.org/wiki/Homeopathic_dilutions

Several potency scales are in use (...) If a dilution is designated as q on the Q scale, and c on the C scale, $c/q = \log_{10}(50,000)/2$

cioè vale una sorta di formula di conversione fra scale

$$c = q \times \frac{\lg 50\,000}{2}$$

e ora vogliamo calcolare quel numero, col "nostro" $\lg 5 \approx 0.7$:

$$\frac{\lg 50\,000}{2} = \frac{\lg 5 \cdot 10^4}{2} = \frac{\lg 5 + \lg 10^4}{2} \approx \frac{0.7 + 4}{2} = 2.35$$

e infatti dice, e ora lo capiamo un po' meglio,

A given dilution on the Q scale is roughly 2.35 times its designation on the C scale.

(La formula soprascritta $c/q = \log_{10}(50,000)/2$ si trova facilmente⁽⁸⁹⁾).

Alcuni Autori e Produttori scrivono LM invece di Q (il significato inteso sarebbe 50 e 1000 in numeri romani, ma LM non significa 50 000 nei numeri romani). E alcuni purtroppo lm, minuscolo, con difficile interpretazione della elle minuscola iniziale (sul web dove si vendono tali prodotti, pare una i maiuscola).

La formula di conversione si riferisce solo alla *teorica* diluizione *in base al modello* usato, e darebbe per esempio l'equivalenza di 20 Q con 47 C ovvero CH, ma i due preparati sono stati ottenuti con procedura diversa e non vengono considerati equivalenti dal punto di vista terapeutico.

⁸⁹La formula viene da

$$100 \cdot \dots (c \text{ volte}) \dots \cdot 100 = 50\,000 \cdot \dots (q \text{ volte}) \dots \cdot 50\,000$$

$$100^c = 50\,000^q$$

$$(10^2)^c = 50\,000^q$$

$$10^{2c} = 50\,000^q \quad / \lg$$

$$2c \lg 10 = q \lg 50\,000$$

$$2c = q \lg 50\,000 \quad / \cdot \frac{1}{2q}$$

$$\frac{c}{q} = \frac{\lg 50\,000}{2}$$

dove la prima equazione rappresenta le diluizioni centesimali che avanzano di 100 volte in 100 volte sulla scala C, e le diluizioni cinquantamillesimali che avanzano di 50 000 volte in 50 000 volte sulla scala Q.

15.14 ESERCIZI SULLA LEZIONE 15

ESERCIZIO $\mu 2019$

Consideriamo il pH della Chimica:

$$-\log_{10} y$$

dove y viene spesso scritto $[H^+]$ e letto “concentrazione degli H^+ ”, ma tutto ciò richiederebbe precisazioni di Chimica di cui qua non ci occupiamo.

A cosa corrisponde la diminuzione di 0,5 nel pH? Con grossolana approssimazione, si esprima infine la soluzione a parole, come “circa dimezzare y ” o “circa decuplicare y ” o analoghi.

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard della virgola decimale. (Già nel quesito).

$$-\log_{10} y - 0,5 =$$

ricordando che $x \equiv \log_b b^x$

$$= -\log_{10} y - \log_{10} 10^{0,5} =$$

e osservando che $0,5 = \frac{1}{2}$ e ricordando che $y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$

$$= -\log_{10} y - \log_{10} \sqrt{10} =$$

per algebra delle parentesi

$$= -\left(\log_{10} y + \log_{10} \sqrt{10}\right) =$$

per la proprietà del logaritmo del prodotto

$$= -\log_{10} \left(y \cdot \sqrt{10}\right)$$

cioè a dire, y viene moltiplicata per $\sqrt{10} \approx 3,16$, e con grossolana approssimazione, come richiesto,

circa triplicare y
