

## 16 Esponenziali e logaritmi – III parte

### 16.1 Conversioni fra logaritmi naturali e decimali

$$\lg x \approx 0.4343 \ln x \quad (37)$$

Cioè il logaritmo decimale è *vagamente*<sup>(90)</sup> la metà del naturale e con maggior precisione il 43% e ancor meglio 43.43%).

#### Esempio <sub>$\mu$</sub>

$$\ln 2 \approx \frac{\lg 2}{0.4343} \approx \frac{0.3}{0.4343} \approx 0.69$$

costante spesso approssimata a 0.7 in Farmacologia nella trattazione dell'emivita dei farmaci, come vedremo in un paragrafo successivo.

### 16.2 Calcolo del valore di un logaritmo

Il logaritmo in base 2 di 8 è 3 perché  $2^3$  fa 8.

Con argomentazioni analoghe si calcolano a mente molti logaritmi.

Una buona calcolatrice scientifica calcola i logaritmi in base 10 e in base e.

Online con WolframAlpha con  $\text{Log}[base, numero]$  si calcolano i logaritmi in qualunque base.

<sup>90</sup>Questa formula e la sua inversa

$$\ln x \approx \frac{\lg x}{0.4343}$$

hanno circa  $\frac{1}{79000}$  di errore relativo.  
Le formule esatte sono

$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e} \quad \lg x = (\lg e) \ln x$$

### 16.3 Primo passo per il calcolo dei logaritmi

Dato un numero positivo  $x$ , lo si esprima in notazione scientifica

$$x = t \cdot 10^n \quad 1 \leq t < 10$$

e allora vale

$$\lg x = \lg t + n \quad 1 \leq t < 10 \quad (38)$$

e allora ci basta saper calcolare approssimatamente il logaritmo decimale dei numeri fra 1 e 10.

Per esempio

$$\lg 2022 = \lg(2.022 \cdot 10^3) = 3 + \lg 2.022$$

### 16.4 Calcolo approssimato dei logaritmi decimali dei numeri da 1 a 10

Considereremo 9 metodi:

1) con questa formula

$$\lg t \approx \frac{\sqrt{\sqrt{t}} - 1}{\frac{\sqrt{t}}{4} + 0.33} \quad 1 \leq t < 10 \quad \text{errore}^{(91)} < 1\% \quad (39)$$

per esempio con la [sezione aurea](#) viene  $\lg \varphi \approx 0.209$  (si verifichi)

2) con artifici come quelli usati per i logaritmi di 3, 4, 5...

3) con una calcolatrice scientifica reale

4) con un'app di calcolatrice scientifica virtuale sul telefonino

5) online con WolframAlpha con  $\text{Log}_{[base, numero]}$

6) con le tavole cartacee (non sono affatto obsolete, anzi sono utili perché mostrano i valori intorno ad uno cercato, cosa che la calcolatrice non fa)

7) con le *logarithm tables* in rete (come sopra)

8) con altre approssimazioni<sup>(92)</sup>

<sup>91</sup>Errore percentuale rispetto l'esatto.

<sup>92</sup>Un'approssimazione calcolabile con le sole 4 operazioni e la radice quadrata è

$$\log_{10} x \approx (x^{1/256} - 1) \times 111$$

9) con l'obsoleto *regolo calcolatore*. "gli astronauti (...) si servivano di regoli calcolatori

(...) durante le missioni Apollo", da Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce [Regolo calcolatore](#).

Per i logaritmi in altre basi si può calcolare il logaritmo decimale con le stesse formule (38) e (39) e poi usare la formula di cambiamento di base  $\log_b x = \frac{\lg x}{\lg b}$ .

### Esercizio <sub>$\mu$ 2019</sub>

Di quanto aumenta il pH se la concentrazione degli  $H^+$  diminuisce del 45%?

### Svolgimento.

Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare quello della virgola decimale, a scelta).

Diminuire del 45% significa moltiplicare per 0.55:

$$\begin{aligned} \text{pH}_{new} &= \\ &= \text{pH}(y \cdot 0.55) = -\lg(y \cdot 0.55) = -\lg y - \lg 0.55 = \\ &= \text{pH}(y) - \lg(5.5 \cdot 10^{-1}) = \text{pH}_{old} - (-1 + \lg 5.5) \approx \end{aligned}$$

con la formula approssimata (39) di cui sopra

$$\begin{aligned} &\approx \text{pH}_{old} - (-1 + 0.745) = \text{pH}_{old} - (-0.255) = \\ &\approx \text{pH}_{old} + 0.26 \end{aligned}$$

cioè

il pH aumenta di  $\approx 0.26$

(Con la calcolatrice  $\approx 0.259637$ ).

che su una calcolatrice che operi con almeno 7 cifre (decimali) significative dovrebbe avere non più di 0.004 di errore relativo (cioè 0.4%) e assoluto per  $1.1 \leq x \leq 11$ . Naturalmente  $x^{1/256}$ , si ottiene estraendo 8 volte consecutive la radice quadrata. Per i numeri  $y < 1.1$  o  $y > 11$ , li si moltiplichino per un adeguato  $10^m$  con  $m \in \mathbb{Z}$  affinché l'ottenuto  $y = 10^m x$  ricada in  $[1.1, 11]$  e poi

$$\log_{10} y = \log_{10}(10^m x) = m + \log_{10} x$$

per esempio  $\log_{10} 1265 = \log_{10} 1.265 + 3$ .

## 16.5 Risoluzione pratica delle equazioni con $\exp$ e $\log$

Nella pratica le equazioni con esponenziali e logaritmi si possono risolvere abbastanza meccanicamente applicando di passaggio in passaggio regole formali, purché le equazioni siano sufficientemente semplici.

Ne vedremo adesso alcune.

Consideriamo un'equazione

$$A = B$$

in cui almeno 1 delle espressioni  $A$  e  $B$  contiene l'incognita, che chiameremo  $x$ , e almeno 1 delle 2 espressioni contenga logaritmi o esponenziali.

(1) – **Calcolo effettivo del logaritmo** con la sua definizione: *l'esponente da dare alla base per avere l'argomento*. Per esempio

$$2^x - \log_4 64 = 0$$

$$\Rightarrow 2^x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

(2) – **Passaggio al logaritmo** in base 10 oppure e oppure altra base, di entrambi i membri dell'equazione. Per esempio

$$2^{3x} = 8 \quad / \log_2$$

$$\log_2(2^{3x}) = \log_2 8$$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

(3) – **Sostituzione approssimata di  $\lg 2$  con  $0,3$** . Per esempio

$$10^x = 2 \quad / \lg$$

$$x = \lg 2$$

$$\Rightarrow x \approx 0,3 \quad (\text{standard della virgola decimale})$$

(4) – **Sostituzione approssimata di lg e con 0,4343**. Per esempio

$$10^x = e$$

$$x = \lg e \approx 0,4343 \quad (\text{standard della virgola decimale})$$

(5) – **Calcolo approssimato del logaritmo** con uno dei metodi visti. Per esempio

$$10^x = 500 \quad / \lg$$

$$x = \lg 500$$

$$= \lg \frac{1000}{2} =$$

$$= \lg 1000 - \lg 2 =$$

$$= 3 - \lg 2 \approx$$

$$\approx 3 - 0,3$$

$$\Rightarrow x \approx 2,7 \quad (\text{standard della virgola decimale})$$

Adesso vedremo su un esempio altri 6 possibili passaggi.

Consideriamo questa equazione:

$$2(x^2 + 1) \ln(2x)^2 + (x^2 + 1) \lg x^4 + x \ln \frac{1}{|x|} + \frac{2}{3} \ln |x|^x + x \ln \sqrt[3]{|x|} = 0 \quad (40)$$

Ecco ora altri 6 possibili passaggi formali fattibili, da scegliere accuratamente.

(6) – **Logaritmo di una radice**

$$2(x^2 + 1) \ln(2x)^2 + (x^2 + 1) \lg x^4 + x \ln \frac{1}{|x|} + \frac{2}{3} \ln |x|^x + x \cdot \frac{1}{3} \ln |x| = 0$$

(7) – **Logaritmo del reciproco**<sup>(93)</sup>

$$2(x^2 + 1) \ln(2x)^2 + (x^2 + 1) \lg x^4 - x \ln |x| + \frac{2}{3} \ln |x|^x + x \cdot \frac{1}{3} \ln |x| = 0$$

(8) – **"Tirare giù gli esponenti e se pari mettere il valore assoluto"**:

$$2 \cdot (x^2 + 1) \cdot 2 \cdot \ln |2x| + (x^2 + 1) \cdot 4 \cdot \lg |x| - x \ln |x| + \frac{2}{3} \cdot x \ln |x| + x \cdot \frac{1}{3} \ln |x| = 0$$

e gli ultimi 3 addendi si elidono, e poi, con passaggio algebrico,

$$4(x^2 + 1) \ln |2x| + 4(x^2 + 1) \lg |x| = 0 \quad / : (4(x^2 + 1)) \neq 0$$

$$\ln |2x| + \lg |x| = 0 \quad (\text{segue un passaggio algebrico})$$

$$\ln(|2| \cdot |x|) + \lg |x| = 0 \quad (\text{segue un passaggio algebrico})$$

$$\Rightarrow \ln(2|x|) + \lg |x| = 0 \quad (41)$$

(9) – **Passare dalla base e a 10 o viceversa**, approssimativamente con la  $\lg a \approx 0,4343 \ln x$  (oppure esattamente con la  $\lg a = (\lg e) \ln a$ , che comunque non ci proponiamo di imparare a memoria):

$$\Rightarrow \ln(2|x|) + (\lg e) \ln |x| = 0 \quad (42)$$

(10) – **Logaritmo del prodotto**:

$$\Rightarrow \ln 2 + \ln |x| + (\lg e) \ln |x| = 0 \quad (43)$$

$$\ln 2 + \ln |x| + (\lg e) \ln |x| = 0 \quad / + (-\ln 2) \quad (\text{passaggio algebrico})$$

$$\ln |x| + (\lg e) \ln |x| = -\ln 2 \quad (\text{segue un passaggio algebrico})$$

$$(1 + \lg e) \ln |x| = -\ln 2 \quad / : (1 + \lg e) \neq 0 \quad (\text{passaggio algebrico})$$

<sup>93</sup>Si potrebbe dire il passaggio del logaritmo del reciproco, non è necessario perchè può essere sostituito dall'applicazione di (1) e (9):

$$\text{LOG} \frac{1}{z} \stackrel{(9)}{=} \text{LOG}(1) - \text{LOG}(z) \stackrel{(1)}{=} 0 - \text{LOG}(z) = -\text{LOG}(z)$$

$$\ln|x| = \frac{-\ln 2}{1 + \lg e} \quad (44)$$

(11) – **Esponenziazione** in base 10 oppure e oppure altra base:

$$\ln|x| = \frac{-\ln 2}{1 + \lg e} \quad / \exp$$

$$|x| = \exp\left(\frac{-\ln 2}{1 + \lg e}\right) \quad (\text{segue un passaggio algebrico})$$

$$x = \pm \exp\left(\frac{-\ln 2}{1 + \lg e}\right)$$

#### Altre 4 possibili tecniche risolutive

che comunque non ci proponiamo di imparare a memoria

(12) **Formule di cambiamento di base**

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b} \quad (94) \quad (95) \quad \text{in particolare} \quad = \frac{\lg x}{\lg b} = \frac{\ln x}{\ln b}$$

da cui  $\ln x = \frac{\lg x}{\lg e}$  e con la (28) si ottiene la formula approssimata vista per la conversione fra logaritmi naturali e decimali.

(13) – “**Unicità dell’intersezione dei grafici di  $a^t$  e  $b^t$** ”.

$$(\forall a > 0, b > 0, a \neq b) \quad a^t = b^t \quad \Rightarrow \quad t = 0$$

Per esempio:

$$e^{x^3} = 10^{x^3}$$

$$x^3 = 0$$

$$x = 0$$

(14) – “**Unicità dell’intersezione dei grafici di  $\log_a t$  e  $\log_b t$** ”.

$$(\forall a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1, a \neq b) \quad \log_a t = \log_b t \quad \Rightarrow \quad t = 1$$

<sup>94</sup>Anche =  $(\log_c x) \cdot (\log_b c)$ .

<sup>95</sup>Per il lettore interessato, si ricavano subito anche  $\log_b x = \frac{1}{\log_x b}$ , e  $\log_{1/b} x = -\log_b x$ .

(15) **Una formula di apparenza sorprendente** che raramente si trova:

$$x^{\text{LOG}(y)} = y^{\text{LOG}(x)} \quad \forall x, y > 0$$

in particolare per il logaritmo naturale

$$x^{\ln y} = y^{\ln x} \quad \forall x, y > 0$$

(che si dimostra – sostanzialmente – applicando ad ambo i membri il logaritmo nella base considerata; e si veda che WolframAlpha [la dichiara True](#)).

**Bottom line.** *I passaggi visti sono sufficienti per risolvere molte equazioni con esponenziali e logaritmi, unitamente all'algebra:*

- calcolo (a mano o con la calcolatrice o in altri modi) e proprietà delle 4 operazioni e del valore assoluto e del fattoriale e delle radici e delle potenze;
- sostituzione (coi loro valori approssimati) delle costanti conosciute (in forma approssimata) a memoria, come  $e$ ,  $\pi$ , eccetera.

Ovviamente tutto ciò non basta per risolvere tutte le equazioni con gli esponenziali e/o i logaritmi: per esempio non la  $e^x = x + 1$ , che comunque ovviamente ha unica soluzione  $x = 0$ . (Si disegnino i 2 grafici, di  $f(x) := e^x$  e di  $g(x) := x+1$ ).

Ma si veda ancora il paragrafo seguente per una possibile problematica.

## 16.6 Soluzioni spurie ovvero fittizie

*In qualche equazione coi logaritmi per così dire “capricciosa” può capitare che qualche passaggio incauto introduca soluzioni spurie ovvero fittizie, che assolutamente non sono soluzioni ma sembrano esserlo. Al livello di questa trattazione elementare non è possibile dare un metodo generale per evitare sempre e comunque le soluzioni fittizie.*

Per esempio con questi passaggi

$$\lg x + \lg(2x) = 0$$

$$\lg(x \cdot 2 \cdot x) = 0$$

$$\lg(2x^2) = 0 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

troviamo una soluzione spuria ovvero fittizia negativa che assolutamente non è soluzione dell'equazione iniziale perchè  $\lg$  non esiste per argomenti negativi.

Al limite estremo, in un'equazione particolarmente capricciosa anche la banale sostituzione di  $\lg 2$  con l'approssimazione 0,3 potrebbe introdurre soluzioni fittizie, o di  $\pi$  con 3,14.

**Molta parte della problematica si può evitare verificando se le soluzioni trovate verificano l'equazione iniziale, ed eventualmente quindi escludendone qualcuna.**

Oppure – e può essere meno facile – trovando il dominio dell'equazione, ed escludendo le eventuali soluzioni al di fuori del dominio.

## \* Complementi \*

**16.7 Equazioni e disequazioni con exp e log – teoria**

L'esponenziale in ogni base positiva diversa da 1 è iniettivo e allora si può applicarlo ad ambo i membri di un'equazione ottenendo un'equazione *equivalente*, cioè con le stesse (eventualmente esistenti) soluzioni:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 10^{f(x)} = 10^{g(x)}$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^{f(x)} = e^{g(x)}$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow b^{f(x)} = b^{g(x)} \quad \forall b > 0, b \neq 1$$

Si può anche applicare l'esponenziale in base  $b$  positivo diverso da 1 a tutti e 4 i tipi di disuguaglianza e l'ordinamento si conserva se e solo se  $b > 1$ , che è il caso di maggior interesse:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow 10^{f(x)} > 10^{g(x)}$$

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow e^{f(x)} > e^{g(x)}$$

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow b^{f(x)} > b^{g(x)} \quad \forall b > 1$$

e tutte similmente con  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ .

Il logaritmo è iniettivo e definito per ogni numero positivo e allora

$$0 < f(x) = g(x) \Leftrightarrow \lg f(x) = \lg g(x)$$

$$0 < f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln g(x)$$

$$0 < f(x) = g(x) \Leftrightarrow \log_b f(x) = \log_b g(x)$$

cioè si può applicare il logaritmo in qualunque base ad ambo i membri di un'equazione  $f(x) = g(x)$  ottenendo un'equazione *equivalente*, cioè con le stesse (eventualmente esistenti) soluzioni, se

$f(x) > 0$  nel suo dominio, oppure  $g(x) > 0$  nel suo dominio (è equivalente), in particolare se una delle 2 funzioni è un esponenziale in qualche base eventualmente moltiplicato per una costante positiva, che è il caso più comune nella pratica.

Di più: il logaritmo decimale e quello naturale e ogni logaritmo in base  $b > 1$  sono crescenti<sup>(96)</sup> e allora si può applicarli conservando l'ordinamento:

$$0 < f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \lg f(x) \leq \lg g(x) \text{ e anche con } <$$

$$0 < f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \ln f(x) \leq \ln g(x) \text{ e anche con } <$$

$$\forall b > 1 \quad 0 < f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \log_b f(x) \leq \log_b g(x) \text{ e anche con } <$$

---

<sup>96</sup>Invece coi logaritmi in base minore di 1 si inverte l'ordinamento:

$$(\forall b, 0 < b < 1) \quad 0 < f(x) < g(x) \Leftrightarrow \log f(x) > \log g(x)$$

$$(\forall b, 0 < b < 1) \quad 0 < f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \log f(x) \geq \log g(x).$$

## 16.8 L'esponenziale e la campana gaussiana

Nelle Scienze Applicate un'infinità di fenomeni vengono bene modellizzati da funzioni con grafico più o meno a campana.

Talvolta queste campane sono simmetriche, o almeno più o meno simmetriche, altre volte sono lontane dalla simmetria.

Occupiamoci adesso solo delle campane simmetriche.

La più "pura" delle campane simmetriche, diciamo il modello ideale in qualche modo, è la campana gaussiana, che ha un'equazione basata sull'esponenziale

$$y = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

chiamata *densità normale standard*.

Ha asse di simmetria  $x = 0$ , cioè l'asse  $y$ , e l'asse di simmetria può venir spostato in  $x = m$  qualsiasi, con l'equazione

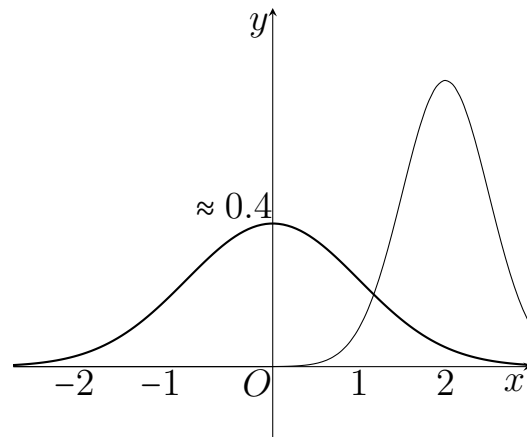
$$y = \frac{e^{-\frac{(x-m)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

ma avvertiamo il Lettore che invece della lettera  $m$  di solito si usa la corrispondente lettera greca  $\mu$ .

Può essere resa più o meno ribassata ovvero "ripida" con un ulteriore parametro  $\sigma > 0$  ottenendosi l'equazione generale

$$y = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

chiamata *densità normale di parametri  $\mu$  e  $\sigma$* .



- Densità normale di parametri  $\mu = 0$  e  $\sigma = 1$  ovvero densità normale standard
- densità normale di parametri  $\mu = 2$  e  $\sigma = 0.5$

Grafici di questo genere si otterranno, fra l'altro, con le altezze, e le glicemie, colesterolemie, sideremie... degli Italiani.

E non solo degli italiani: anche degli europei, e anche solo degli Studenti di Farmacia.

Curve a campana alquanto asimmetriche modellizzano bene il numero di morti (o casi o terapie intensive...) giornaliero (o settimanale o anche mensile) delle ondate epidemiche.

Equazioni per modellizzarle sono ancora basate sull'esponenziale.

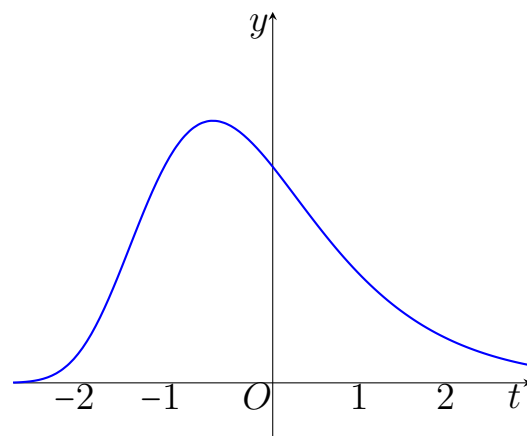


Grafico di

$$10e^{-t-0.5e^{-t}}$$

Il tempo  $t$  potrebbe essere in mesi, e lo 0 all'ultimo giorno di un certo anno.

## 16.9 Funzione di Gompertz

Si chiama funzione di Gompertz ogni funzione della famiglia (insieme) di funzioni

$$f(x) := a e^{-b e^{-cx}}$$

I grafici di queste funzioni sono sigmoidei. Si sono rivelate ottime per la modellizzazione delle epidemie: numero cumulativo dei morti, dei casi, eccetera.

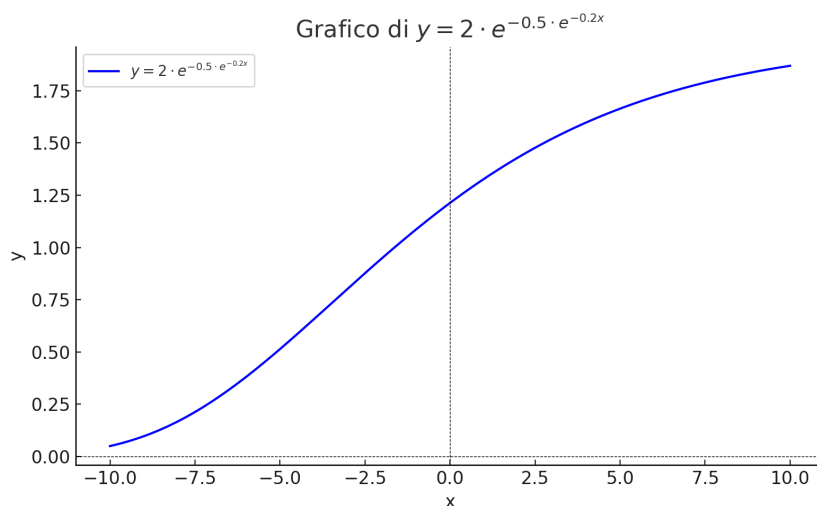


Figure 21: Grafico di  $y = 2 \cdot e^{-0.5 \cdot e^{-0.2x}}$ . (By Vispo Volpino with ChatGPT).

## 16.10 Il logaritmo decimale come contatore di zeri

Logaritmi decimali delle potenze di 10:

- 3 0.001 tre zeri ma con punto decimale
- 2 0.01
- 1 0.1
- 0 1 zero zeri
- 1 10
- 2 100
- 3 1000 tre zeri

## 16.11 Ordine di grandezza di un numero positivo

L'ordine di grandezza è un concetto tanto utile nelle Scienze Applicate, quanto mal definito nelle stesse Scienze Applicate, come anche altre volte succede (per esempio con le cifre significative).

Qua facciamo una scelta definizionale.

Ci sono 2 questioni:

- definire l'ordine di grandezza di 1 numero positivo;
- dire quando 2 numeri positivi hanno LO STESSO ordine di grandezza.

Per la seconda questione, l'uso generale è dire che 2 numeri positivi hanno LO STESSO ordine di grandezza se il rapporto del più grande e il più piccolo sta fra 1 e 10. (Non si dichiara quale sia l'ordine di grandezza, si dice solo che è lo stesso).

(Ma, dopo che avremo definito l'ordine di grandezza, numeri con rapporto 2 o anche 1.1 potranno non avere UGUALE ordine di grandezza, per esempio 95 e 103 ☹ comunque la consolazione è che i 2 ordini di grandezza non distano mai più di 1).

Come abbiamo già detto, ogni numero positivo  $x$  ammette una scrittura

$$x = a \cdot 10^n$$

con  $1 \leq a < 10$  e  $n$  intero: ...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...

Adesso chiamiamo  $n$  ordine di grandezza di  $x$  e aggiungiamo:

$$\boxed{\text{ordine di grandezza di } x : n := \lfloor \lg x \rfloor} \quad (45)$$

cioè

$$\text{ordine di grandezza di } x = \text{parte intera di } \lg x$$

Ma altri Autori definiscono con condizioni su  $a$  diverse da  $1 \leq a < 10$ . (Wikipedia in inglese ne dà altre 2).

Qualunque definizione – ragionevole – di ordine di grandezza si usi per 2 numeri positivi

$$\text{se hanno ugual ordine di grandezza}$$

*il massimo non supera il decuplo del minimo*

cioè sono simili almeno molto molto vagamente, e

*se hanno ordini di grandezza  $m$  e  $m + 1$   
il massimo non supera il centuplo del minimo  
(ma in generale sarà molto molto vagamente il decuplo)*

5 è l'ordine di grandezza del numero di capelli di una persona

11 è l'ordine di grandezza del numero di neuroni di un uomo

11 è l'ordine di grandezza del numero di stelle della Via Lattea

13 è l'ordine di grandezza del numero di globuli rossi di un uomo ( $3.0 \times 10^{13}$ )

Quindi il numero di globuli rossi di un uomo è molto vagamente il centuplo dei suoi neuroni (2 ordini di grandezza di differenza) e del numero di stelle della Via Lattea.

L'ordine di grandezza è molto usato nelle Scienze applicate per fissare le idee sulla grandezza approssimativa di un numero, per agili confronti, semplificandolo all'estremo in un singolo numero intero, spesso fra  $-20$  e  $20$  (e quasi sempre fra  $-30$  e  $30$ ).

Ma la grossolanità dell'approssimazione è mostrata dal fatto che

9 è l'ordine di grandezza del numero di persone del mondo

come se fossero un miliardo e invece sono circa 8 miliardi.

Magari in novembre l'amministrazione dell'università non conosce ancora il numero esatto di quelli che saranno iscritti a Farmacia e Medicina ma può considerare plausibile che i secondi saranno in numero di un ordine di grandezza superiore ai primi.











Questo tipo di grossolanissime approssimazioni sono utilissime nella gestione pratica della realtà.

**Orders of Magnitude in Biology**

Fill in the blanks in the table using the information given.

$10^2 = 10 \times 10$	This is the same as moving the decimal place one place to the right. $10.0 \rightarrow 100.0$
$10^3 = 10 \times 10 \times 10$	This is the same as moving the decimal place two places to the right. $10.0 \rightarrow 1000.0$
$10^{-1} = 1 \div 10$	This is the same as moving the decimal place one place to the left. $1.0 \rightarrow 0.1$
$10^{-4} = 1 \div 10 \div 10 \div 10 \div 10$	This is the same as moving the decimal place four places to the left. $1.0 \rightarrow 0.0001$

Nanometre (nm)	1000000 x smaller than a millimetre
Micrometre ( $\mu\text{m}$ )	1000000 x smaller than a metre
Millimetre (mm)	1000 x smaller than a metre
Metre (m)	
Kilometre (km)	1000 x bigger than a metre

Atom	DNA	Virus	Prokaryotic cell	Eukaryotic cell	Flea	Woodlouse	Peach	Child	Whale	Giant Redwood	School Drive
											
0.000000000 1m	0.00000 001m	0.00000001m		0.00001- 0.0001m			0.1m	1m	10m		
			$10^{-6}\text{m}$			$10^{-2}\text{m}$		1m	10m	$10^2\text{m}$	
		100nm		10-100 $\mu\text{m}$	1mm		10cm	1m	10m		1km

Creative-Commons-CC-BY-SA image retrieved (2024) in

[https://physics-fiction.fandom.com/wiki/Scale\\_%26\\_Magnitude\\_Order?file=Order\\_of\\_Magnitude.png](https://physics-fiction.fandom.com/wiki/Scale_%26_Magnitude_Order?file=Order_of_Magnitude.png)

## 16.12 Emivita di una sostanza nel sangue o nelle ossa

Leggiamo in *Emivita (farmacologia)*:

L'emivita ( $t_{1/2}$ ) è un parametro farmacocinetico che indica il tempo richiesto per ridurre del 50% la concentrazione plasmatica di un farmaco (...) è inversamente proporzionale alla sua clearance ( $Cl$ ) e direttamente proporzionale al suo volume di distribuzione ( $V_d$ ) secondo la formula

$$t_{1/2} = 0.7 \frac{V_d}{Cl}$$

dove la costante 0,7 è in realtà un'approssimazione del logaritmo naturale di 2 (in effetti, più in particolare  $\ln(2) = 0,69\dots$ ).

Per curiosità elenchiamo<sup>(97)</sup> senza qua dare garanzie alcune emivite di farmaci:

noradrenalina 2 minuti

morfina 2-3 ore

donepezil 3 giorni (70 ore)

<sup>97</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Biological\\_half-life](https://en.wikipedia.org/wiki/Biological_half-life)

bedaquilina 165 giorni  
e di questo elemento, che non è un farmaco:

cadmio nelle ossa 30 anni. (Pile ricaricabili, colori per artisti, eccetera).

Il piombo nelle ossa ha un'emivita – supponiamo esponenziale il suo scomparire, com'è ragionevole in questi casi – di (circa) 10 anni. In quanto tempo si riduce del 75%? E del 90%? E del 95%? E del 97%?

La riduzione del 75% è la riduzione al 25%, cioè ai  $\frac{25}{100}$  ovvero  $\frac{1}{4}$  e allora corrisponde a 2 dimezzamenti: allora ci vogliono 20 anni. Per il 90% è meno immediato.

Illustriamo una famiglia (insieme) di funzioni con l'esponenziale, che ricorre amplissimamente nelle Scienze Applicate, ed è espressa dai vari Autori in 2 modi diversi, con una costante negativa (che qua sarà  $k$ ) oppure con una costante positiva (che qua sarà  $r$ ) preceduta dal segno meno:

$$u(t) = u_0 e^{kt} \quad \text{essendo } u_0 = u(0) \quad k < 0$$

$$u(t) = u_0 e^{-rt} \quad \text{essendo } u_0 = u(0) \quad r > 0$$

e la costante  $k$  ovvero  $r$  dipende da caso a caso.

Questa è l'equazione che esprime in funzione del tempo la concentrazione di piombo, che si attenua; e un'infinità di altri fenomeni. Nella figura B, precedente, a destra, si vedono 4 casi, con diversi valori di  $u_0$  e  $r$ :

(rosso)  $e^{-2x}$

(magenta)  $e^{-x}$

(nero)  $2e^{-2x}$

(blu)  $2e^{-x}$

E in questo caso possiamo calcolare la costante  $r$  dall'emivita di 10 anni:

$$u(\text{emivita}) = \stackrel{DEF}{=} \frac{u(0)}{2} = \stackrel{EQ}{=} u(0) e^{-r \cdot 10 \text{ anni}} \quad / : u(0)$$

$$\frac{1}{2} = e^{-r \cdot 10 \text{ anni}} \quad / \ln$$

$$\begin{aligned}\ln \frac{1}{2} &= -r \text{ 10 anni} \\ -\ln 2 &= -r \text{ 10 anni} \quad / : (-10 \text{ anni}) \\ r &= \frac{\ln 2}{10 \text{ anni}}\end{aligned}$$

ottenendosi così l'equazione dello scomparire del piombo nelle ossa

$$u(t) = u_0 e^{-\frac{\ln 2}{10 \text{ anni}} t} \quad \text{essendo } u_0 = u(0)$$

Ora ci si chiede quando sarà ridotto del 90% ovvero al 10%, cioè  $u(t) = 0.1 u(0)$ :

$$\begin{aligned}0.1 u(0) &= \overset{EQ}{=} u(0) e^{-\frac{\ln 2}{10 \text{ anni}} t} \quad / : u(0) \\ 0.1 &= e^{-\frac{\ln 2}{10 \text{ anni}} t} \quad / \lg \\ -1 &= \lg e^{-\frac{\ln 2}{10 \text{ anni}} t} \\ -1 &= -\frac{\ln 2}{10 \text{ anni}} t \lg e \\ t &= \frac{10 \text{ anni}}{\lg e \cdot \ln 2} \approx \frac{10 \text{ anni}}{\lg e \cdot \frac{\lg 2}{\lg e}} = \frac{10 \text{ anni}}{\lg 2} \approx \frac{10 \text{ anni}}{0.3}\end{aligned}$$

$\approx 33.3$  anni (valore che, nella pratica, possiamo stare sicuri che verrà riportato come 33 anni).

Si risolvano gli altri quesiti posti associatamente a questo appena risolto. Con 95% si dovrà calcolare  $\lg 0.05 = \lg \left(\frac{1}{2} \cdot 0.1\right) = \lg \frac{1}{2} + \lg \frac{1}{10} = -\lg 2 - \lg 10 \approx -0.3 - 1 = -1.3$ .

### 16.13 L'intensità sonora, i logaritmi e i decibel

**In farmacia misuriamo l'udito...** capendo l'intensità sonora.

L'intensità sonora in decibel è definita con un logaritmo decimale, in dipendenza dall'energia sonora, e una serie di calcoli<sup>(98)</sup> porta a concludere che

$$\boxed{\text{ad un raddoppio dell'energia corrisponde un aumento di } \approx 3 \text{ decibel}} \quad (46)$$

unica cosa che ci proponiamo di imparare di questo argomento. Il 3 viene, coi calcoli, dallo 0.3 dell'approssimazione di  $\lg 2$ .

<sup>98</sup>Per il Lettore interessato: l'intensità sonora in decibel è definita sostanzialmente come

$$\text{intensità sonora} := 10 \left( \lg \frac{\text{energia passante in 1 s per } 1 \text{ m}^2}{\text{una prefissata energia passante in 1 s per } 1 \text{ m}^2} \right) \text{ dB}$$

dove la prefissata energia passante in 1 s per un  $\text{m}^2$  è la (piccolissima)  $1 \text{ pW}/\text{m}^2$ . (L'argomento dei logaritmi e degli esponenziali è sempre adimensionale, cioè un numero puro, senza unità di misura: non esiste il logaritmo di 3 metri o 4 secondi). Allora come funzione dell'energia è del tipo

$$a \lg \frac{x}{c} = a (\lg x - \lg c) = a \lg x + d \quad (\text{con } d := -a \lg c)$$

(e si faccia ben attenzione a distinguere la soprastante scrittura dalla  $a \lg(x+d)$ ). Il grafico è proprio come quello di  $\lg x$ , riscalato da  $a$  sull'asse delle ordinate e traslato verticalmente di  $d$ .

Calcoliamo di quanti decibel aumenta l'intensità sonora raddoppiando l'energia.

Detta  $E$  l'energia considerata e  $2E$  il suo doppio, si ha

$$\begin{aligned} \text{intensità\_sonora}(2E) - \text{intensità\_sonora}(E) &= \\ &= 10 \lg \frac{2E}{1 \text{ pW}/\text{m}^2} - 10 \lg \frac{E}{1 \text{ pW}/\text{m}^2} = \end{aligned}$$

ricordando che  $\lg(x/y) = \lg x - \lg y$

$$\begin{aligned} &= 10 (\lg(2E) - \lg E) = \quad (\text{mentre } \lg(1 \text{ pW}/\text{m}^2) \text{ si elide}) \\ &= 10 \lg \frac{2E}{E} = 10 \lg 2 \approx 10 \cdot 0.3 = 3 \end{aligned}$$

cioè quanto detto: ad un raddoppio dell'energia corrisponde un aumento di  $\approx 3$  decibel.

### 16.14 Complementi – Equazioni con LOG e $x$ libera

Questione interessante è quella delle equazioni in cui compare un  $\text{LOG}(x)$  e anche una  $x$  fuori dai logaritmi. Per esempio per

$$1 - \lg x - x = 0$$

si può fare

$$1 - x = \lg x$$

e poi risolvere per via grafica il sistema

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ y = \lg x \end{cases}$$

Ma questo tipo di equazioni possono diventare più complicate, per esempio

$$2 - \lg x - x = 0$$

La risoluzione di quest'equazione richiede l'uso di una *funzione speciale dell'analisi matematica*.

Precisamente la funzione  $W$  di Lambert, e in casi più complessi nemmeno quella basta.

Su questa funzione lo scrivente ci ha passato un bel po' di vita, e si trovano in rete articoli scientifici cercando il cognome e Lambert e function.

### 16.15 Complementi – Fibonacci ed esponenziali

La successione di Fibonacci, che modella l'espansione almeno – nelle fasi iniziali – di una popolazione animale o microbica, e le epidemie, è sì definita per ricorrenza (e solo su  $\mathbb{N}$ ) ma è approssimata con una funzione esponenziale in base  $\varphi$ , la sezione aurea:

$$a_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^n \text{ per } n \text{ sufficientemente grande} \quad (47)$$

per esempio  $a_{10} = 55 \approx 55.0036$ .

Dopo quanti mesi (se  $n$  indica i mesi) la popolazione raggiunge il

valore 135 301 852 344 706 746 049, oppure anzi, uscendo dall'esattezza ideale del problema, un valore  $1.35 \cdot 10^{20}$ ?

Abbiamo l'equazione approssimata

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^n \approx 1.35 \cdot 10^{20} \quad / \lg$$

$$\lg \frac{1}{\sqrt{5}} + n \lg \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx \lg(1.35 \cdot 10^{20}) \quad / + \lg \sqrt{5}$$

$$n \lg \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx \lg(1.35 \cdot 10^{20}) + \lg \sqrt{5} \quad / : \lg \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\approx \frac{\lg(1.35 \cdot 10^{20}) + \lg \sqrt{5}}{\lg \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

$$\approx \frac{\lg(1.35 \cdot 10^{20}) + \lg 2.23607}{\lg 1.61803}$$

e insomma ci servono i valori (approssimati) dei logaritmi decimali di 3 numeri (fra 1 e 10).

Con l'approssimazione prima vista si ha

$$\approx \frac{20 + 0.130 + 0.35054}{0.2089} \approx 98.04$$

e calcolando con pazienza si troverà che il 98-esimo numero di Fibonacci è proprio 135 301 852 344 706 746 049. (Oppure con WolframAlpha: `Fibonacci [98]`).

Nella figura a sinistra si vedono:

(blu) la successione  $(n, a_n)$  essendo  $a_n$  la successione di Fibonacci

(verde)  $\frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^x$

(magenta)  $e^x$

(nero)  $10^x$

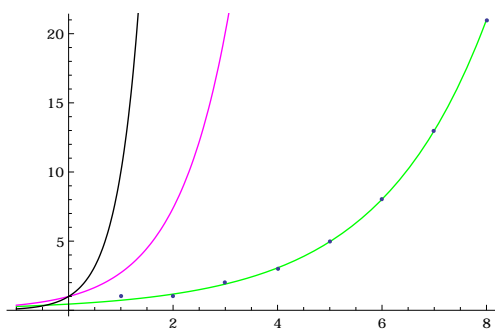


Figura A

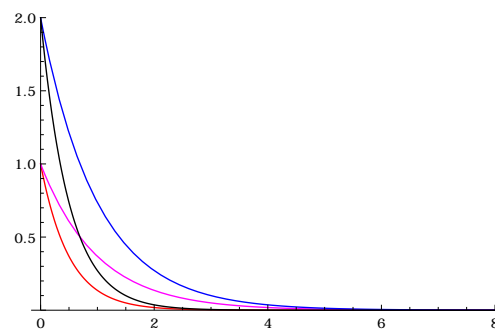


Figura B

Nella figura B, a destra, si vedono grafici di funzioni del tipo  $a e^{ct}$ : questo tipo di funzioni internazionalmente vengono talvolta chiamate impropriamente *exponential functions* anche se  $a \neq 1$ .

BOZZA - DRAFT

## 16.16 ESERCIZI SULLA LEZIONE 16

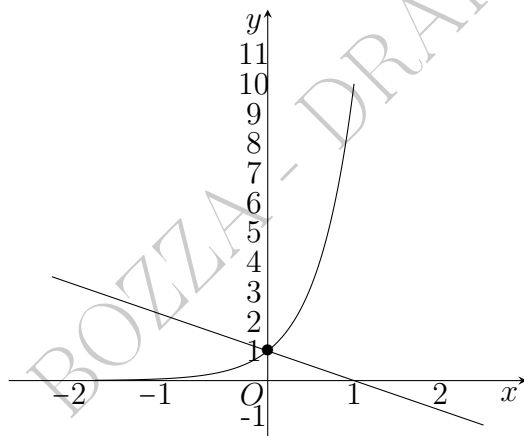
### 16.16.1 Esercizio risolto a – Risoluzione per via grafica

$\mu_{2024}$  \* Risolvere per via grafica il sistema di equazioni

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ y = 10^x \end{cases}$$

(dando la soluzione nella forma  $x = \dots, y = \dots$ ).

#### SVOLGIMENTO



Già bastano questi pochi (valori delle coordinate di) punti dei 2 grafici

$x$	$1 - x$
-2	3
-1	2
0	1
1	0
2	-1

$x$	$10^x$
-2	$\frac{1}{100}$
-1	$\frac{1}{10}$
0	1
1	10

e disegnando (vedi figura) sullo stesso piano cartesiano grafici (approssimativi), vediamo subito che c'è un punto di intersezione  $(0, 1)$ , e non esistono altri per le proprietà elementari delle funzioni  $1 - x$  e  $10^x$ , e allora la soluzione del sistema di equazioni è data dalle coordinate  $x$  e  $y$  dell'unico punto di intersezione dei grafici:

$$x = 0, y = 1$$

### 16.16.2 Esercizio risolto b – Equazione con logaritmi decimali

μ2018\*

≈ Si risolva l'equazione

$$\log_{10} \frac{x^2}{x^2 + 10} + \log_{10} \frac{x^2 + 10}{10^2} = 1$$

#### SVOLGIMENTO

Prima di tutto osserviamo che deve essere

$$\frac{x \neq 0}{x \neq 0}$$

(altrimenti si avrebbe l'inesistente  $\log_{10} 0$ ). (Altre condizioni da richiedere non ci sono perché per  $x \neq 0$  gli argomenti dei logaritmi sono entrambi evidentemente positivi).

Ricordando che la somma dei logaritmi (in una stessa base) è il logaritmo (in quella stessa base) del prodotto, si ha

$$\log_{10} \left( \frac{x^2}{x^2 + 10} \cdot \frac{x^2 + 10}{10^2} \right) = 1$$

e semplificando

$$\log_{10} \frac{x^2}{10^2} = 1 \quad / \quad 10^{\wedge} \quad \leftarrow \text{potenza in base 10; elimina il logaritmo in base 10}$$

$$\frac{x^2}{10^2} = 10^1 \quad / \quad \cdot 10^2$$

$$x^2 = 10^2 \cdot 10^1$$

$$x = \pm \sqrt{10^2 \cdot 10} = \pm \sqrt{10^2} \sqrt{10}$$

e in conclusione (senza che la condizione  $x \neq 0$  ci faccia escludere qualche valore)

$$x \approx \pm 31.623$$

oppure con un decimale in meno

$$\boxed{x \approx \pm 31.62}$$

### 16.16.3 Esercizio risolto c – Equazione con ln e lg

<sup>μ</sup> Risolvere

$$\lg \ln x^2 = 0$$

#### SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare quello del punto decimale, a scelta).

$$\lg \ln x^2 = 0 \quad / 10^{\wedge}$$

(passaggio che non introduce soluzioni spurie ovvero fittizie)

$$\ln x^2 = 10^0$$

$$\ln x^2 = 1 \quad / \exp$$

(passaggio che non introduce soluzioni spurie ovvero fittizie)

$$x^2 = e$$

$$x = \pm \sqrt{e}$$

e ricordando che  $e \approx 2,718$

$$\boxed{\approx \pm 1,649}$$

**Nota 1.** In qualche equazione coi logaritmi per così dire “capricciosa” può capitare che qualche passaggio incauto introduca soluzioni spurie ovvero fittizie, che assolutamente non sono soluzioni ma sembrano esserlo. Per esempio con questi passaggi

$$\lg x + \lg(2x) = 0$$

$$\lg(x \cdot 2 \cdot x) = 0$$

$$\lg(2x^2) = 0 \quad \Rightarrow 2x^2 = 1 \quad \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

troviamo una soluzione spuria ovvero fittizia negativa che assolutamente non è soluzione dell'equazione iniziale perchè  $\lg$  non esiste per argomenti negativi.

Ma i passaggi svolti per risolvere l'esercizio iniziale,  $\lg \ln x^2 = 0$ , sono di quelli "sicuri", che non introducono soluzioni spurie ovvero fittizie.

**Nota 2.** Non è una buona idea cercare di risolvere l'equazione con la proprietà del logaritmo della potenza

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall x > 0) \text{LOG}(x^\alpha) = \alpha \text{LOG}(x)$$

(ove LOG indica 2 volte 1 stesso logaritmo in qualunque base) perchè essa, come si vede scritto, vale per  $x > 0$ , e di fatto, incautamente applicandola in questo esercizio, fa perdere la soluzione negativa. (Per  $x$  negativo la formula  $\text{LOG}(x^\alpha) = \alpha \text{LOG}(x)$  non ha senso).

Piuttosto, si potrebbe applicare la proprietà degli esponenti pari, aggiungendo il valore assoluto.

**ESERCIZIO** <sub>$\mu 2020$</sub>

\*  $\approx$  Risolvere l'equazione

$$e^{2x^3} - e^{2 \lg^6(2 \lg 100)} = 0$$

**SVOLGIMENTO**

Ovviamente  $\lg 100 = 2$

$$e^{2x^3} = e^{2 \lg^6(2 \cdot 2)} \quad / \ln$$

$$2x^3 = 2 \lg^6 4 \quad / : 2$$

$$x^3 = \lg^6 4 \quad / \sqrt[3]{\phantom{x}}$$

$$x = \lg^2 4 =$$

che è la soluzione esatta, e infine con le proprietà dei logaritmi e la nota approssimazione  $\lg 2 \approx 0,3$

$$= \lg^2 2^2 = (\lg 2^2)^2 = (2 \lg 2)^2 \approx (2 \cdot 0,3)^2 = 0,6^2 = 0,36$$

$$\lg^2 4 \approx 0,36$$

(Un valore più preciso è 0,3625, come si può verificare per esempio online su WolframAlpha con [Log\[10,4\]^2](#)).

**ESERCIZIO** <sub>$\mu 2018$</sub>

\* Si risolva quest'equazione:

$$\log_{10} x + \log_{10} 200 - \log_{10}(1 + x^2) = \log_3 9$$

**SVOLGIMENTO**

Prima di tutto osserviamo che dev'essere

$$\underline{x > 0}$$

perché  $x$  è argomento di un logaritmo. (Ovviamente  $1 + x^2 > 0$  sempre). Ricordando le  $\log_b u + \log_b v = \log_b(uv)$  e  $\log_b u - \log_b v = \log_b \frac{u}{v}$  e  $3^2 = 9$

$$\log_{10} \frac{x \cdot 200}{1 + x^2} = 2 \quad / 10^\wedge \quad \leftarrow \text{potenza in base 10; elimina il logaritmo in base 10}$$

$$\frac{200x}{1 + x^2} = 100 \quad / \cdot \frac{1 + x^2}{100}$$

$$2x = 1 + x^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$\boxed{x = 1}$$

(Che è  $> 0$ ).

### ESERCIZIO<sub>μ</sub>

\* ≈ Risolvere l'equazione  $4 \lg(100x) = 9$ .

### SVOLGIMENTO

$$4 \lg(100x) = 9 \quad / : 4$$

$$\lg(100x) = \frac{9}{4}$$

e per la proprietà del logaritmo del prodotto

$$\lg 100 + \lg x = \frac{9}{4}$$

$$\lg 10^2 + \lg x = \frac{9}{4}$$

$$2 + \lg x = \frac{9}{4}$$

$$\lg x = \frac{9}{4} - 2$$

$$\lg x = \frac{9 - 8}{4}$$

$$\lg x = \frac{1}{4} \quad / 10^\wedge$$

$$x = 10^{\frac{1}{4}}$$

ovvero

$$\sqrt[4]{10} \approx 1,77828$$

(La radice quarta si calcola con la calcolatrice come radice quadrata della radice quadrata:  $\sqrt[4]{z} = \sqrt{\sqrt{z}}$ )

BOZZA - DRAFT