

## 17 Funzioni trigonometriche

### 17.1 Generabili nella geometria riappaiono ovunque

$mx + q$ ,  $x^2$ ,  $\sqrt{x}$ ,  $\exp x$ ,  $\ln x$  si possono definire geometricamente, poi appaiono ovunque nelle Scienze Applicate. Ugualmente avviene per le funzioni trigonometriche che andiamo a definire.

Un'infinità di problemi geometrici con **lunghezze** e **aree** relativamente a **poligoni** possono venir risolti con le funzioni lineari

$$y = mx + q \quad (\text{funzione meglio detta affine})$$

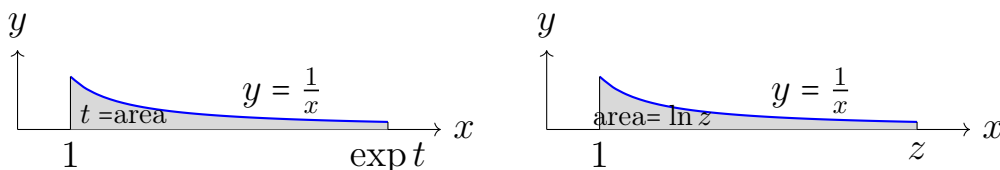
e con la radice quadrata e la sua inversa, il quadrato:

$$\sqrt{x} \quad x^2$$

Queste funzioni, del tutto costruibili nella geometria, si rivelano ottimi modelli di un'infinità di fenomeni delle Scienze Applicate.

Nuove funzioni compaiono considerando **coniche** invece che poligoni, e, di nuovo, si rivelano ottimi modelli di un'infinità di fenomeni delle Scienze Applicate.

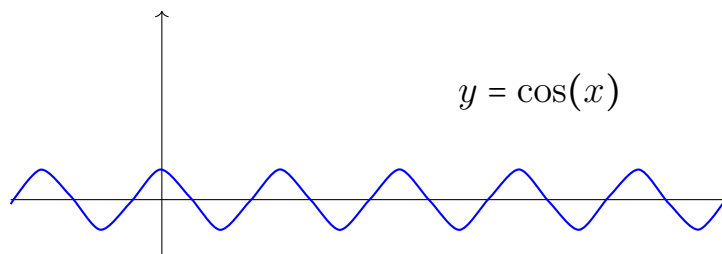
Precisamente l'**iperbole equilatera** genera (in modi non banali: integrali) l'**esponenziale** e la sua inversa, il **logaritmo** naturale:



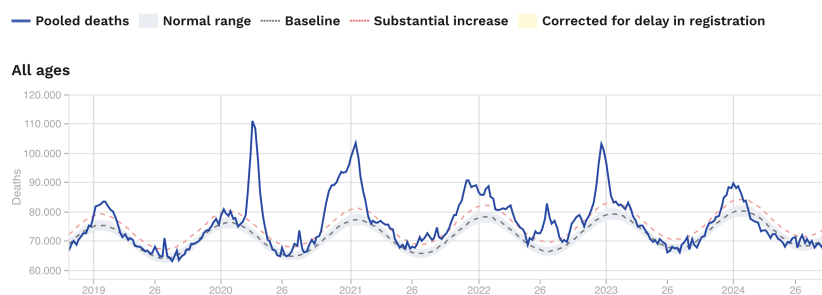
(Storicamente l'esponenziale e il logaritmo non furono definiti in questo modo geometrico ma si può fare).

E il **circolo** genera le **funzioni trigonometriche** ovvero **goniometriche** che considereremo in questa Lezione: seno, coseno, ecc.

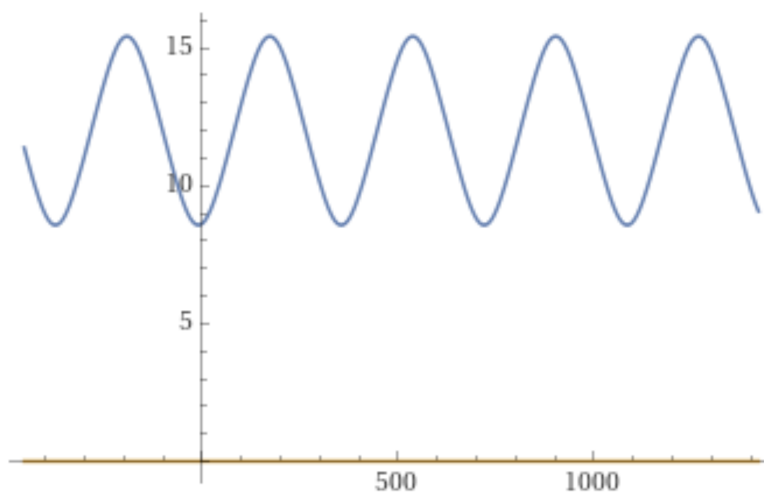
## 17.2 Oscillazioni periodiche ovunque



Si veda sul prestigioso sito online EuroMOMO, con statistiche sugli eccessi di mortalità in decine di stati europei, la *baseline*, cioè in pratica il numero di morti attesi in base alla media degli anni passati: oscilla, con molti più morti nella stagione fredda che in quella calda, in modo del tutto affine alla cosinusoide sopra disegnata.



Questa è la durata delle ore di luce alla latitudine di  $45^\circ$  nello stesso periodo, in stretta corrispondenza.



In Europa le persone muoiono di più intorno a gennaio che intorno ad agosto, per varie ragioni mediche, fra cui le seguenti.

C'è meno sole: diminuisce la temperatura, favorendo malattie.

C'è meno sole: si riduce la produzione di vitamina D nel corpo.

Guardando in dettaglio il grafico di EuroMOMO, per i 27 stati considerati (2024, prima erano meno) troviamo ogni anno circa 80'000 morti alla settimana in nei mesi di gennaio e 68'000 in luglio, diciamo una media annuale di 64'000 morti alla settimana con un'oscillazione di  $\pm 6'000$ .

### 17.3 Le funzioni trigonometriche in Farmacia

*Le funzioni goniometriche ovvero trigonometriche ricorrono un'infinità di volte nelle Scienze Applicate, in particolare in Fisica.*

Le applicazioni in Farmacia e Chimica Farmaceutica sono rare, ma quelle vicine ad esse sono molte, e in Fisica moltissime.

☺ Qua di seguito qualche ricorrenza vicina alla Farmacia.

- Si può ricercare sul web  
"Sinusoidal heart rate"

dove viene in pratica solo considerata la forma<sup>(99)</sup> sinusoidale.

- Si può guardare la formula che dà la distanza fra 2 punti sulla Terra (identificati da latitudine e longitudine) che ipoteticamente può venire considerata nel tracciamento dei contatti covid, come si vede in<sup>(100)</sup> figura, formula con 3 funzioni goniometriche:

<sup>99</sup>Leggiamo per esempio in [Sinusoidal heart rate pattern: Reappraisal of its definition and clinical significance](#), di Modanlou HD, Murata Y, su *The journal of obstetrics and gynaecology research* 2004 Jun;30(3):169-80: Sinusoidal heart rate (...) was called 'sinusoidal' because of its sine waveform (...) A true SHR is an ominous sign of fetal jeopardy needing immediate intervention.

<sup>100</sup>Screenshot da arXiv:2105.15030 [cs.HC] <https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.15030> "Digital Contact Tracing for Covid 19", by Chandresh Kumar Maurya, Seemandhar Jain,

### 3 CONTACT TRACING

As discussed in the introduction section, our solution for contact tracing relies on the location sharing data, i.e., GPS location of the users collected through our app. The naive solution will be to compute the Euclidean distance (or *Haversine distance* as shown in (1), where  $\phi_i$  and  $\lambda_i$  for  $i \in \{1, 2\}$  are lat/long of two users, if one wants to be more exact) every  $t$  mins for finding the contact event.

$$d=2r \arcsin\left(\sqrt{\sin^2\left(\frac{\phi_2-\phi_1}{2}\right)+\cos(\phi_1)\cos(\phi_2)\sin^2\left(\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}\right)}\right) \quad (1)$$

A contact event is defined as when two users are within a distance of  $d$  meter for at least  $t$  mins. The naive solution for contact tracing requires computing pairwise distances and has the complexity of  $O(n^2)$  for  $n$  users and hence not feasible for large  $n$ . Therefore, we

Le formule trigonometriche stanno dietro la grafica computerizzata 3D. Si veda per esempio questo spettacolare visualizzatore interattivo di molecole:

<https://molview.org/>

- Sono alla base (con l'Analisi di Fourier) di una branca scientifica in qualche modo tangente alle Scienze Biomediche: l'Elaborazione di Immagini.

- Gli angoli di legame della Chimica che accenneremo in 17.7.
- Nelle determinazioni posizionali dell'MRI, *magnetic resonance imaging*.
- La trigonometria tocca marginalmente la Farmacia anche con la Legge di Bragg e la Legge di Snell, utili nella Cristallografia a raggi X, usata per l'analisi dei cristalli di sostanze chimiche solide. [LINK->](#) [LINK->](#) [LINK->](#)

- La questione trigonometrica più interessante in questa trattazione elementare è la funzione arcotangente perché dà una distribuzione di probabilità (di Cauchy) simile alla ben più importante distribuzione normale, ma per certi versi più semplice.

## 17.4 Le nozioni principali

– Grafici:

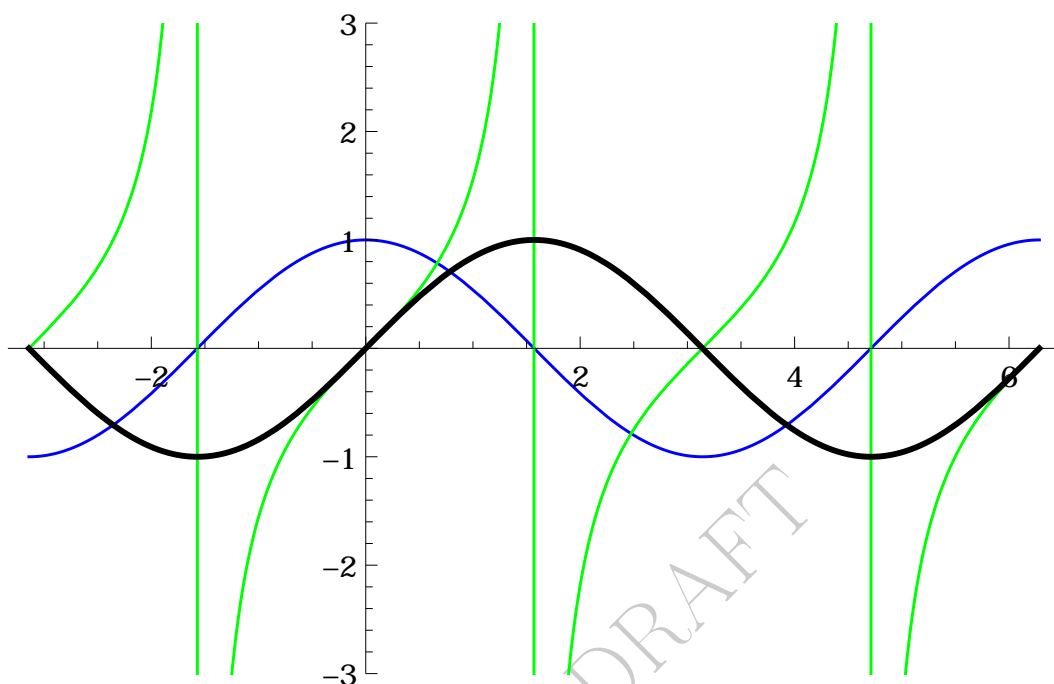


Figure 22: (nero) senoide, (blu) cosenoide, (verde) tangente e suoi asintoti

- Il seno e il coseno sono funzioni definite su tutto  $\mathbb{R}$  a valori in  $\mathbb{R}$ .
- Si tratta sostanzialmente della stessa funzione, ovvero più precisamente l'una è "traslata" dell'altra:

$$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

- Seno e coseno sono legate<sup>(101)</sup> anche dall'**identità goniometrica fondamentale**:

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1} \quad (48)$$

- Da esse si definisce una terza funzione, la tangente:

$$\boxed{\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}} \quad (49)$$

<sup>101</sup>Questa è chiaramente una relazione *algebraica* fra seno e coseno, mentre la precedente è un'identità funzionale.

– Sono tutte funzioni periodiche:

$$\begin{aligned} \sin(x + 2k\pi) &= \sin(x) & k \in \mathbb{Z}, \\ \cos(x + 2k\pi) &= \cos(x) & k \in \mathbb{Z} \\ \tan(x + k\pi) &= \tan(x) & k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{50}$$

– Impariamo, oppure ricaviamo dal circolo goniometrico (vedi dopo) che il seno è dispari, il coseno è pari, la tangente è dispari:

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x \\ \cos(-x) &= \cos x \\ \tan(-x) &= -\tan x \end{aligned} \tag{51}$$

– Formula di addizione del seno:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \tag{52}$$

– Da quest'ultima con  $y = x$  segue la formula di duplicazione del seno:

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x \tag{53}$$

– Formula di addizione del coseno:

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

– Da quest'ultima con  $y = x$  segue una formula di duplicazione del coseno:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

– Da quest'ultima e dall'identità goniometrica fondamentale segue quest'altra formula di duplicazione del coseno:

$$\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1 \tag{54}$$

– In  $\frac{\pi}{4}$  seno e coseno hanno questo stesso valore:

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (55)$$

– Da quest'ultima, applicando le formule di duplicazione si ottengono i valori di seno e coseno in  $\frac{\pi}{2}$ , poi in  $\pi$ , poi in  $2\pi$ :

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad (56)$$

$$\sin \pi = 0 \quad \cos \pi = -1 \quad (57)$$

$$\sin 2\pi = 0 \quad \cos 2\pi = 1 \quad (58)$$

e da quest'ultima per la  $2\pi$ -periodicità

$$\sin 0 = 0 \quad \cos 0 = 1 \quad (59)$$

## 17.5 Definizioni

Nel piano cartesiano di assi  $X$ ,  $Y$  e origine  $O$  consideriamo il *cerchio goniometrico* che è il cerchio di centro  $O$  e raggio 1, rappresentato in Figura.

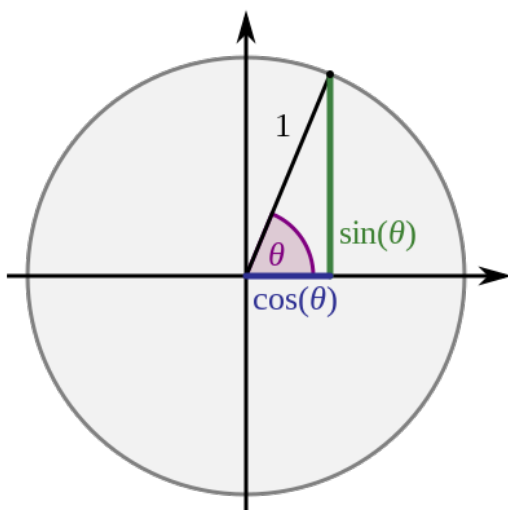


Figure 23: Il circolo goniometrico. Wikimedia, public domain image, by Stephan Kulla (2017)

📖 La lettera greca  $\theta$ , spesso usata come misura di angoli, come nella soprastante figura, è la *theta*, traslitterata *th*. È la lettera di *arithmos*, il numero, della citazione pitagorica all'inizio della Lezione 1, che ritroviamo nelle parole inglesi *arithmetic* e *logarithm*.

Consideriamo un arco (del circolo) che inizia in  $(1, 0)$  procedendo in senso antiorario. Esso determina un *angolo goniometrico* di vertice  $O$ . La lunghezza  $x$  dell'arco si dice *misura in radianti* dell'*angolo goniometrico*. E si possono considerare misure negative con archi orientati in senso orario. Chiamiamo  $P(x)$  il secondo estremo dell'arco. La misura in radianti a priori  $\in [-2\pi, 2\pi]$ , e poi in effetti *facendo anche più di 1 giro*,  $x \in \mathbb{R}$ . Si definiscono le funzioni *seno* e *coseno*,  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , e la *tangente*:

$$\cos(x) := \text{ascissa}(P(x)) \quad (60)$$

$$\sin(x) := \text{ordinata}(P(x)) \quad (61)$$

e la tangente è l'ordinata del punto d'intersezione della retta  $OP(x)$  con la retta tangente al circolo goniometrico in  $(1, 0)$ .

Per esempio si ha (banalmente le prime 2, difficilmente la terza)

$$\sin \pi = 0 \quad \cos \pi = -1 \quad \sin 1 \approx 0.84 \quad (62)$$

## 17.6 Gradi e radianti

In questa trattazione considereremo il seno e il coseno quasi solo per  $0 \leq x \leq \pi$  e la tangente principalmente per  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ .

La misura dell'angolo piatto di  $\pi$  radianti, in un altro sistema di misura – più antico – si dice di  $180^\circ$ , e vale la proporzione

$$\pi_{rad} : 180^\circ = x_{rad} : x^\circ \quad (63)$$

che consente di passare da un sistema all'altro.

In particolare

angolo giro	$360^\circ$	$2\pi$ radianti	(64)
angolo piatto	$180^\circ$	$\pi$ radianti	
angolo retto	$90^\circ$	$\frac{\pi}{2}$ radianti	

Ecco alcuni degli *angoli notevoli* che si considerano a un livello molto elementare:

$x$	$0$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$2\pi$
$x^\circ$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$

e un qualche interesse ha anche  $1 \text{ rad} \approx 57^\circ$ , e tutte queste corrispondenze si calcolano con la (63). Quasi mai<sup>(102)</sup> si scrive *rad*.

<sup>102</sup>Per il lettore interessato, alcuni valori numerici interessanti:

$\frac{\pi}{4} \approx 0.785$	(che di solito useremo nel senso di $\frac{\pi}{4} \text{ rad} \approx 0.785 \text{ rad}$ )
$\frac{\pi}{3} \approx 1.05$	(che di solito useremo nel senso di $\frac{\pi}{3} \text{ rad} \approx 1.05 \text{ rad}$ )
$\frac{\pi}{2} \approx 1.57$	(che di solito useremo nel senso di $\frac{\pi}{2} \text{ rad} \approx 1.57 \text{ rad}$ ).
$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$	(per esempio $\cos \frac{\pi}{4}$ )
$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$	(per esempio $\cos \frac{\pi}{3}$ )
$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577$	(per esempio $\tan \frac{\pi}{3}$ )

**Primi e secondi.** La metà di un angolo di  $\pi/4$  radianti ha  $\pi/8$  radianti. La metà di quello stesso angolo, espresso in gradi, cioè di  $45^\circ$ , è  $22.5^\circ$  ma spesso si scrive diversamente: come

per 22 ore e mezza scriviamo  $22^h30'$

cioè

si usano i 60 minuti primi che suddividono 1 ora, similmente

si usano i 60 primi (di grado) che suddividono 1 grado

così

per  $22.5^\circ$  (22 gradi e mezzo) si può anche scrivere  $22^\circ 30'$ .

E ci sono anche 60 *secondi* in un *primo* (questione che non approfondiamo).

Le conversioni fra le 2 scritture delle misure in gradi

con le cifre decimali, come  $22.5^\circ$

coi primi e secondi, come  $22^\circ 30'$

è in generale calcolo difficile; ma in questo caso è stata semplice.

Si tratta esattamente degli stessi valori della *latitudine* e *longitudine*, altra questione che non approfondiamo; diamo solo a titolo di esempio le coordinate di Trieste:  $45^\circ 39' 01''$  N  $13^\circ 46' 13''$  E.

Si tratta naturalmente di angoli nello spazio tridimensionale, come quelli del paragrafo seguente.

## 17.7 Gli angoli di legame della Chimica

Angolo di legame del metano:  $\approx 109^\circ 28'$ .

E si veda l'eptafluoruro di iodio,  $\text{IF}_7$ , a questo [LINK->](#)

Altri angoli di legame a questo [LINK->](#)

Si noti che per il metano dà, correttamente,  $109.5^\circ$ . (I  $28'$  di  $109^\circ 28'$ , prima detti, corrispondono, salvo approssimazione, a  $0.5^\circ$ ).

### ESERCIZIO <sub>$\mu$</sub>

Qual è la misura in gradi di un angolo di  $\frac{2}{3}\pi$  radianti? (È l'angolo di legame del trifluoruro di boro  $\text{BF}_3$ ).

### SVOLGIMENTO

Sappiamo che  $180^\circ$  sono  $\pi$  radianti da cui la proporzione

$$\pi_{rad} : 180^\circ = x_{rad} : x^\circ$$

e adesso

$$\pi_{rad} : 180^\circ = \frac{2}{3}\pi_{rad} : x^\circ$$

$$\frac{\pi_{rad}}{180^\circ} = \frac{\frac{2}{3}\pi_{rad}}{x^\circ} \quad / \cdot \frac{180^\circ \cdot x^\circ}{\pi_{rad}}$$

$$x^\circ = \frac{2}{3} \cdot 180^\circ$$

120°

BOZZA - DRAFT

### 17.8 Alcuni valori notevoli

Impariamo a leggere questo diagramma, che, senza imparare a memoria niente, ci dà seni e coseni di molti *angoli notevoli*.

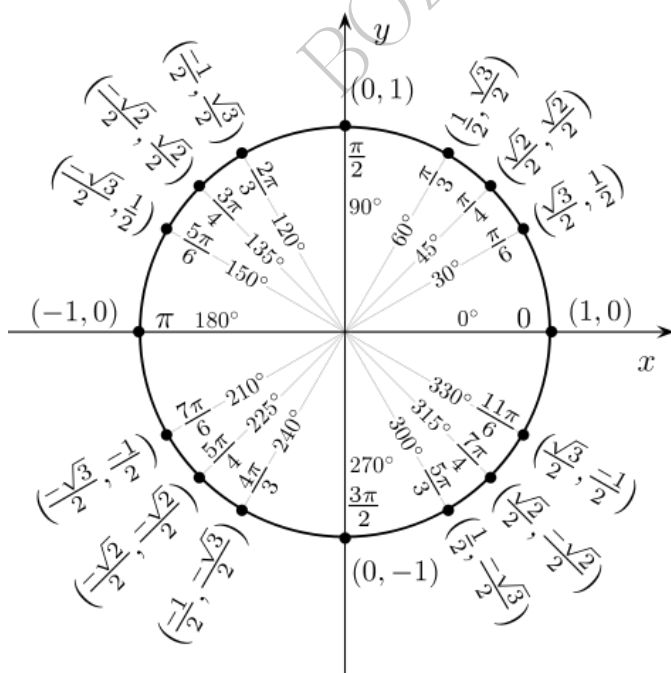


Figure 24: Angoli notevoli e corrispondenti valori di seno e coseno

## 17.9 Funzioni goniometriche inverse

### Definizione classica di arcotangente.

$$\text{arctan è l'inversa della restrizione della tangente a } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \quad (65)$$

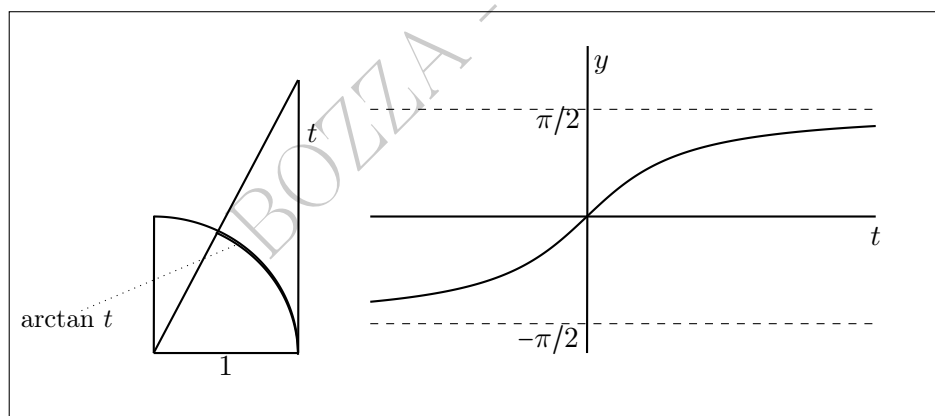
Si prenda allora il secondo arco curvilineo verde nella Figura 22 e lo si simmetrizza rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, e si otterrà il grafico della funzione arcotangente, rappresentato qua sotto nella figura di destra.

In simboli:

$$\text{arctan} := \left( \tan \Big|_{\left] -\pi/2, \pi/2 \right[} \right)^{-1}$$

Detto altrimenti,

$\text{arctan } x$  è l'angolo  $\alpha$  la cui tangente è  $x$ ,  $\alpha \in \left] -\pi/2, \pi/2 \right[$ .



**Definizione geometrica di arctan.** (Senza usare tan).

Con riferimento alla figura a sinistra, si chiama arcotangente di  $t > 0$  la lunghezza dell'arco di circolo intersezione del quarto di circolo col triangolo rettangolo (pieno) di cateti 1 e  $t$ .

Per  $t < 0$  si pone

$$\text{arctan}(-t) = -\text{arctan } t$$

e ancora si pone

$$\text{arctan } 0 = 0$$

Al variare di  $t$  in  $\mathbb{R}$  si ottiene così la funzione arcotangente, di cui si vede in figura un disegno (di una parte) del grafico.

**Teorema.** (Ovvio)

(a)  $\arctan$  è dispari:

$$\boxed{\arctan(-x) = -\arctan(x)} \quad (66)$$

(b)  $\arctan$  è crescente;

(c) “ $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$ ”, come limite, valore mai raggiunto;

(d) “ $\arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ ”, come limite, valore mai raggiunto;

(e)  $\arctan$  ha grafico sigmoide.

**Teorema.** (Di difficile dimostrazione)

(f)  $\arctan$  non è nè razionale nè irrazionale (tecnicamente si dice funzione *trascendente*, come anche sono i *logaritmi*);

(g)  $\arctan$  ha grafico senza *punti angolosi*, dotato di *retta tangente* in ogni punto (funzione *derivabile*).

**Definizioni (che non diamo).** Similmente all'arcotangente, vi sono poi anche<sup>(103)</sup> l'arcoseno ( $\arcsin$ ) e l'arcocoseno ( $\arccos$ ).

**Esempio di Chimica.** Per esempio

$$\begin{aligned} \pi - \arctan(2\sqrt{2}) &= \\ &= \arccos(-1/3) \approx \\ &\approx 1.910633 \end{aligned}$$

che convertendo da radianti in gradi è  $\approx 109^\circ 28'$ : è l'angolo di legame del metano.

Con WolframAlpha

---

<sup>103</sup> **Arcoseno:**

$\arcsin x$  è l'angolo  $\alpha$  il cui seno è  $x$ , con  $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ .

**Arcocoseno:**

$\arccos x$  è l'angolo  $\alpha$  il cui coseno è  $x$ , con  $\alpha \in [0, \pi]$ .

In simboli:

$$\begin{aligned} \arcsin &:= \left( \sin|_{[-\pi/2, \pi/2]} \right)^{-1} \\ \arccos &:= \left( \cos|_{[0, \pi]} \right)^{-1} \end{aligned}$$

```

arccos(-1/3)
dà
1.9106332... (eccetera, moltissimi decimali non qua riportati)
e poi
convert 1.910633 rad into degrees
dà
109.471° (degrees)
109 degrees 28 arc minutes 16 arc seconds

```

**Nota 1.**

L'arcotangente è variamente denotata dai vari Autori e software. In particolare

arctan (che è lo standard ISO)

$\tan^{-1}$  (compatibile con lo standard ISO)

E ancora

arctang, arctg, ArcTan, Atn, atg, atan (e datan), rad(atan(...))...  
(Non è la funzione atan2, comunque correlata).

**Nota 2.** Ritroveremo l'arcotangente in Calcolo delle Probabilità (nella *densità di Cauchy*, in 29.2). L'arcotangente appare anche nella Cristallografia a raggi X.

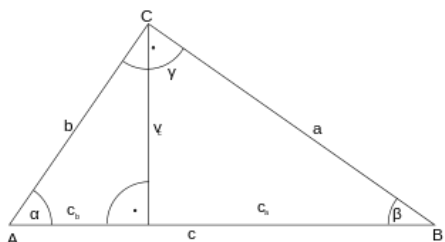
**Nota 3: alcuni valori notevoli.** Dalle definizioni si ha subito

$x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$
arctan	0		$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
arcsin	0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
arccos	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{3}$

I valori mancanti in tabella non si considerano *valori notevoli*, ma esistono. (Per esempio  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.61548$ ).

Altri valori si ottengono dalla disparità dell'arcotangente (e dell'arcoseno).

### 17.10 Trigonometria – La goniometria dei triangoli



In un triangolo rettangolo di lati  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , con angoli rispettivamente opposti di misure  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $90^\circ$  i lati di misure  $a$  e  $b$  si chiamano *cateti* e l'altro *ipotenusa* ed è

$$\frac{a}{b} = \tan \alpha$$

cioè  $\frac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}} = \text{tangente}(\text{angolo opposto})$

(67)

$$a = c \sin \alpha$$

$$a = c \cos \beta$$

Esistono innumerevoli altri teoremi e formule di Trigonometria, e alcuni sono nella sezione di Complementi a questa Lezione.



**Nota.** Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule *contemporaneamente* numerate *et* riquadrate, oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione. Non ci proponiamo di imparare a memoria nessun ALTRO valore

di seno, coseno, tangente e arcotangente, ma solo di saperli ricavare disponendo di tabelle analoghe a quelle sopra esposte, oppure dalla Figura 17.8 o analoga.

BOZZA - DRAFT

## \* Complementi \*

## 17.11 Complementi – Altre formule goniometriche

**Formule di addizione e sottrazione:**

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad (\text{vista prima})$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad (\text{vista prima})$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

**Formule di duplicazione:**

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x \quad (\text{vista prima})$$

$$\cos(2x) = \begin{cases} 2 \cos^2 x - 1 & (\text{vista prima}) \\ \cos^2 x - \sin^2 x & (\text{vista prima}) \\ 1 - 2 \sin^2 x & \end{cases}$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

**Formule di prostaferesi:**

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

**Formule di bisezione della tangente:**

$$\tan \frac{x}{2} = \begin{cases} \frac{\sin x}{1 + \cos x}, & x \neq (2k + 1)\pi \\ \frac{1 - \cos x}{\sin x}, & x \neq k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

**Approssimazione del seno per piccoli valori dell'argomento:**

$$\sin x \approx x \quad |x| \ll 1$$

Esiste poi questa relazione *funzionale* fra seno e coseno:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

che si ottiene subito dalla (52) (ponendovi  $y = \frac{y}{2}$ ).

Ed esiste una *relazione differenziale* fra seno e coseno, che esprimiamo a parole:

*la retta tangente alla senoide nel punto di ascissa  $x$  ha coefficiente angolare  $\cos x$*

(e che in formule si esprime con  $D \sin x = \cos x$  che spiegheremo nella lezione sulle derivate).

Vi sono poi le *formule parametriche razionali*, e molte altre.

### 17.12 Complementi – Il calcolo di queste funzioni

Molti valori delle funzioni goniometriche si trovano nelle tavole che abbiamo dato in questa lezione. Numerosissimi altri valori si trovano in forma approssimata su tavole cartacee ora riprodotte su internet. Valori (approssimati) si calcolano con le calcolatrici scientifiche, reali o virtuali, e online con WolframAlpha.

Questione interessantissima – veramente di fondamentale importanza in Matematica – è come fanno i software a calcolare quei valori, e come fecero i nostri antenati nei secoli passati a calcolare i valori scritti nelle tavole cartacee.

Ebbene, quei valori (approssimati ma con quanti decimali esatti si voglia) si calcolano con *serie*, ovvero in pratica somme infinite, questione che approfondiremo in una lezione successiva.

### 17.13 Complementi – Angoli notevoli

Nella figura del paragrafo sui valori notevoli, si possono apprezzare molti angoli notevoli, espressi in gradi e radianti, e il loro cor-

rispondente punto goniometrico, con coordinate il coseno e rispettivamente il seno di quell'angolo. Per esempio

$$\cos 30^\circ = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Semplici considerazioni di geometria elementare danno subito

$x$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$-\pi$ $\pi$	$-\frac{\pi}{2}$ $\frac{3}{2}\pi$	$2\pi$
$x^\circ$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
sin	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1
tan	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0
	*	*			

In questa e nelle successive 4 tabelle le colonne astericate sono le più importanti.

**Non ci proponiamo di imparare a memoria nessun valore di seno, coseno, tangente (e poi arcotangente), ma solo di saperli ricavare disponendo di queste o analoghe tabelle, oppure dalla Figura 24.**

**Caveat.** Nello schema soprastante è da intendersi che

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \sin(270^\circ)$$

**assolutamente non si intenda che  $-\frac{\pi}{2}$  sia uguale a  $270^\circ$ .**

La considerazione del quadrato inscritto nel circolo goniometrico e coi lati paralleli agli assi, che per il Teorema di Pitagora ha lato  $\sqrt{2}$ , dà subito, con analogo *caveat* come sopra (e anche dopo),

$x$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{4}$
$x^\circ$	$45^\circ$	$135^\circ$	$225^\circ$	$315^\circ$
sin	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
tan	1	-1	1	-1
	*			

La considerazione dei 2 esagoni regolari inscritti nel circolo goniometrico, con un vertice in  $(0, 1)$  e rispettivamente in  $(1, 0)$ , dà subito, dividendoli in triangoli equilateri di lato 1 e altezza  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

$x$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{\pi}{6}$	$x$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{\pi}{3}$
$x^\circ$	$30^\circ$	$150^\circ$	$210^\circ$	$330^\circ$	$x^\circ$	$60^\circ$	$120^\circ$	$240^\circ$	$300^\circ$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	sin	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	cos	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	tan	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
	*					*			

La considerazione di decagoni regolari darebbe ancora altri valori.

## 17.14 Complementi – Trigonometria

In un triangolo di lati  $a, b, c$ , con angoli rispettivamente opposti  $\alpha, \beta, \gamma$  valgono i seguenti 2 teoremi.

**Teorema dei Seni.**<sup>(104)</sup>

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

**Teorema del Coseno.**<sup>(105)</sup>

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

<sup>104</sup>Nasir al-Din al-Tūsī, persiano, XIII sec. d.C. "He is often considered the creator of trigonometry as a mathematical discipline in its own right", Wikipedia, l'enciclopedia libera.

<sup>105</sup>Euclide, greco, III sec. a.C., ben noto, e Jamshīd al-Kāshī, persiano, XIII sec. d.C. "Much of al-Kāshī's work was not brought to Europe, and much, even the extant work, remains unpublished in any form", Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Ed esistono innumerevoli altri teoremi e formule di Trigonometria.

BOZZA - DRAFT

## ESERCIZI SULLA LEZIONE 17

### ESERCIZIO<sub>μ</sub>

Qual è la misura in radianti di un angolo di  $150^\circ$ ?

#### SVOLGIMENTO

Sappiamo che  $180^\circ$  sono  $\pi$  radianti da cui la proporzione

$$\pi_{rad} : 180^\circ = x_{rad} : x^\circ$$

e adesso

$$\pi_{rad} : 180^\circ = x_{rad} : 150^\circ$$

$$\frac{\pi_{rad}}{180^\circ} = \frac{x_{rad}}{150^\circ} \quad / \cdot 150^\circ$$

$$\frac{\pi_{rad}}{180^\circ} \cdot 150^\circ = x_{rad}$$

$$x_{rad} = \frac{15}{18} \pi_{rad}$$

$$\frac{5}{6} \pi$$

### ESERCIZIO<sub>μ</sub>

\* La concentrazione sanguigna di una certa sostanza sia modellizzata nelle 24 ore del giorno da

$$u_a(t) := 2a + a \sin \frac{\pi t}{12} \quad 0 \leq t \leq 24$$

essendo  $a$  un parametro fissabile farmacologicamente. In quale orario la concentrazione è  $\geq 2.5$  per  $a := 1$ ?

#### Svolgimento.

Seppure non sia necessario per risolvere il problema, vediamo su WolframAlpha il grafico della concentrazione per  $a := 1$  scrivendovi

`plot 2+Sin[Pi t/12], t from 0 to 24`

Ora (con  $a := 1$ ) abbiamo la disequazione

$$2 + \sin \frac{\pi t}{12} \geq 2.5 \quad / + (-2)$$

$$\sin \frac{\pi t}{12} \geq 0.5$$

poniamo  $x := \frac{\pi t}{12}$  ottenendo  $\sin x \geq \frac{1}{2}$

e ci interessano solo i tempi

$$0 \leq t \leq 24 \quad / \cdot \frac{\pi}{12}$$

$$0 \leq \frac{\pi t}{12} \leq 2\pi \text{ cioè } 0 \leq x \leq 2\pi$$

e allora in  $[0, 2\pi]$  dobbiamo risolvere  $\sin x \geq \frac{1}{2}$ , che si fa disegnando il circolo goniometrico, trovando subito (sono valori notevoli)

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$$

cioè

$$\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi t}{12} \leq \frac{5}{6}\pi / \cdot \frac{12}{\pi}$$

$$2 \leq t \leq 10$$

e in conclusione

Fra le 2 e le 10 di mattina

**ESERCIZIO** <sub>$\mu$ 2018</sub> Risolvere la seguente equazione goniometrica:

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

### Svolgimento

Si risolve subito disegnando un circolo goniometrico e segnandovi gli angoli  $\frac{\pi}{6}$  e  $\frac{5}{6}\pi$ , corrispondenti appunto a  $\sin x = \frac{1}{2}$ :

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(Si notino le periodicità).

**ESERCIZIO** <sub>$\mu$</sub>  Approssimare  $\cos(1)$  usando le (62) e (48).  
Si verifichi poi su WolframAlpha con `Cos[1]`

**ESERCIZIO** <sub>$\mu$ 2018</sub> Risolvere la disequazione

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x < 2 \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

**Svolgimento**

Con la formula di addizione del coseno

$$2\left(\cos x \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin x \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$

e coi valori notevoli ben conosciuti

$$= 2\left((\cos x)\left(-\frac{1}{2}\right) - (\sin x)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -\cos x - \sqrt{3} \sin x$$

e con il secondo membro così riscritto la disequazione equivale a

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x &< -\cos x - \sqrt{3} \sin x \\ \frac{\sqrt{3}}{2} &< -\sqrt{3} \sin x \\ -\sqrt{3} \sin x &> \frac{\sqrt{3}}{2} \quad /: (-\sqrt{3}) < 0 \\ \sin x &< -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

che si risolve subito disegnando un circolo goniometrico e segnandovi l'arco da  $-\frac{5}{6}\pi$  fino a  $-\frac{\pi}{6}$ , estremi esclusi, corrispondente appunto a  $\sin x < -\frac{1}{2}$ :

$$-\frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

equivalentemente scritta

$$\frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{11}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

## IV – Statistica descrittiva

*Senza dati  
sei solo un'altra persona con un'opinione*  
(William Edwards Deming,  
autore di "The New Economics:  
For Industry, Government, Education")

La potenza dei dati numerici, specie quando sono confrontati almeno 2, è enorme, e può indurre a riflettere, e, avendone la possibilità, a prendere una decisione piuttosto che un'altra. Con i conseguenti spostamenti di soldi e di potere: per questo veniamo inondati di statistiche dai media; che hanno padroni quelli privati, e "referenti", diciamo così, quelli pubblici – e scelgono quali dati mostrarci, fra infiniti.

### **Esempio: alcuni dati numerici**

Per la ricerca sul cancro, che causa ogni anno 150 mila morti, l'Italia spende circa 225 milioni di dollari, mentre ne destina 30 miliardi per le spese militari. (2010, Umberto Veronesi, che era stato Ministro della Sanità)

La Statistica Descrittiva è ottima per queste cose, quando usata bene, ed è pessima quando usata male, per errore o dolo.

*Ci sono tre livelli di gravità delle menzogne: le bugie ufficiose ("non ho studiato perchè il criceto stava male"), le bugie calunniose, e infine la statistica.*

## La Statistica in Farmacia

Amplissimo in Farmacia è l'uso della Statistica Descrittiva (oggetto di queste Lezioni) e della Statistica Inferenziale (che vedremo in Lezioni molto successive).

Per esempio:

- Gestione: per la conduzione della farmacia come azienda;
- Ricerca: per selezionare farmaci via via migliori;
- Farmacovigilanza: per ritirare dal commercio quelli poi risultati più nocivi che utili.

Leggiamo:<sup>(106)</sup>

Non è mai venuta meno quell'attenzione al farmaco anche se in uso da anni, che diventerà l'odierna farmacovigilanza, che purtroppo non riesce ancora ad evitare casi come la Talidomide della tedesca Grünenthal usato dal 1957 come sedativo, antinausea che provocherà neonati focomelici e verrà ritirato dal commercio alla fine del 1961 (in Italia con sei mesi di ritardo) o il Vioxx antinfiammatorio della Merck messo in commercio nel 1999 e ritirato brutalmente in campo mondiale il 30 settembre 2004 a causa dei gravissimi danni cardiologici riscontrati: casi purtroppo **non isolati** dovuti ad un **accorciamento dei tempi** obbligatoriamente molto lunghi e molto costosi che pretende una ricerca etica.

[Enfasi aggiunta]

---

<sup>106</sup>Giorgio Du Ban: La storia del Farmaco, in: Atti del 1° Convegno Nazionale – Italia ed Europa: Storia della Medicina e della Croce Rossa – in onore di LORIS PREMUDA

Leggiamo sul sito di EMA in

[https://www.ema.europa.eu/en/documents/annual-report/2015-annual-report-european-medicines-agency\\_en.pdf](https://www.ema.europa.eu/en/documents/annual-report/2015-annual-report-european-medicines-agency_en.pdf)

Since 2014, companies have been required to report the cessation of marketing of a medicine in any Member State for reasons affecting patient safety so that the authorities can ensure that the same action is taken across all Member States. EMA is responsible for the coordination of these actions across the EU.

- In 2015, EMA received 160 notifications of withdrawn products, compared to 132 in 2014

BOZZA - DRAFT