



4

AZIONE ASSIALE

A. A. 2025-2026
Corso di **Tecnica delle costruzioni**

Azione assiale

PILASTRI IN C.A. SOGGETTI AD AZIONE ASSIALE di COMPRESSIONE

I **pilastri** sono elementi strutturali **verticali portanti** che trasferiscono i carichi della sovrastruttura alle strutture sottostanti. Sono elementi soggetti prevalentemente ad **azione assiale di compressione** normalmente accompagnata da sollecitazioni di flessione e taglio.

Gli aspetti legati alla presenza combinata di altre caratteristiche della sollecitazione (**momento flettente e taglio**), se queste sono di entità rilevante, vanno adeguatamente tenuti in considerazione.

Anche gli effetti del **second'ordine**, che si sviluppano in elementi snelli, vanno adeguatamente tenuti in considerazione.

I pilastri degli edifici, comunque, sono frequentemente progettati facendo **riferimento alla sola azione assiale DI COMPRESSIONE**, quando le altre componenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di entità molto modesta.

Le dimensioni della sezione trasversale di un pilastro sono tipicamente molto inferiori rispetto alla sua altezza (assimilabili quindi ad elementi monodimensionali).

I pilastri sono provvisti di due ordini di armature:

- Longitudinali
- Trasversali (staffe o spirali)

In un tipico ciclo costruttivo, la realizzazione dei pilastri viene eseguita piano per piano, intervallata dalla fase di realizzazione delle travi e dei solai del piano.

Ciascuna fase, si articola nell'allestimento della cassetta, posizionamento dell'armatura, ed esecuzione del getto di calcestruzzo.

Una volta che il getto ha fatto presa e si è indurito, si prosegue con la fase successiva.



Pertanto, per assicurare la continuità dell'armatura longitudinale, le armature dei pilastri del piano inferiore sono prolungate anche oltre il solaio, fino nel pilastro del piano superiore e sono collegate per sovrapposizione con le barre di quest'ultimo.

Le barre longitudinali sono piegate verso l'interno per inserirsi nella della gabbia di armatura del pilastro sovrastante.



Esercitazione 01 – Analisi dei carichi e calcolo dei pilastri

Considerando la sola azione assiale di compressione, si potrebbe pensare che nei pilastri non sia necessaria alcuna armatura, dato che il calcestruzzo ha una buona resistenza a compressione.

Tuttavia la sua **fragilità** nelle modalità di collasso richiede la presenza di una «**gabbia**» di **armatura** volta a contrastare tale occorrenza.

Ciò viene perseguito intervenendo sulle **armature longitudinali** e, in particolare:

- prescrivendo una quantità minima di armatura longitudinale, A_s , proporzionale all'area del pilastro, A_c :

$$A_s \geq 0.003 A_c$$

- riservando all'armatura longitudinale l'assorbimento di una quota minima del carico assiale, N_{Ed} :

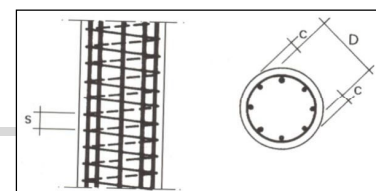
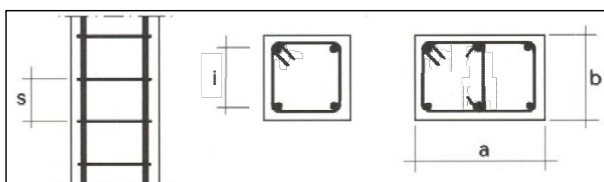
$$A_s \geq 0.10 N_{Ed} / f_{yd}$$

- garantendo una sufficiente diffusione delle armature longitudinali, rispettando un interasse massimo:

$$b_1 \leq 300 \text{ mm}$$

- a, comunque, limitando la quantità di armatura longitudinale (altrimenti viene meno l'effettiva collaborazione acciaio-calcestruzzo, per problemi di aderenza)

$$A_s \leq 0.04 A_c$$



Inoltre è fondamentale un'adeguata disposizione delle **armature trasversali**, in quanto contrastano l'**instabilizzazione delle barre longitudinali** indotta dalla compressione e garantiscono un'**efficace ritegno** verso l'interno del pilastro, funzionando a trazione. Ciò viene perseguito:

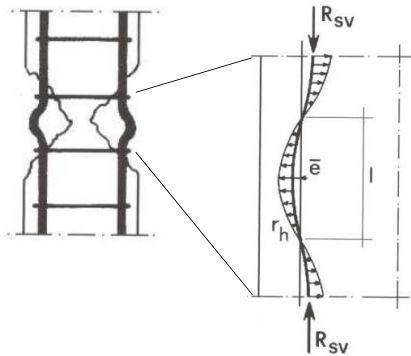
- limitando il passo s delle armature trasversali:

$$s \leq 12\phi_s \quad s_{max} = 250\text{mm}$$

- prescrivendo un diametro minimo delle armature trasversali:

$$\phi_{st} \geq \phi_s / 4 \quad \phi_{st,max} = 6\text{mm} \quad \text{Tipicamente } \phi_{st} = 8\text{mm}$$

(o, al più, 10 mm in fondazione)



Tipica modalità di rottura di un pilastro in c.a. compresso: rottura a clessidra del calcestruzzo con instabilizzazione delle barre longitudinali (le barre perdono stabilità e si inflettono lateralmente).

L'instabilizzazione viene contrastata limitando la snellezza λ della barra e, in particolare, limitandone la luce libera di inflessione (ovvero il passo tra le staffe)



Anche a livello normativo ritroviamo analoghe prescrizioni (**NTC 2018**)

4.1.6.1.2 Armatura dei pilastri

Nel caso di elementi sottoposti a prevalente sforzo normale, le barre parallele all'asse devono avere diametro maggiore od uguale a 12 mm e non potranno avere interassi maggiori di 300 mm. Inoltre la loro area non deve essere inferiore a

$$A_{s,min} = (0,10 N_{Ed} / f_{yd}) \text{ e comunque non minore di } 0,003 A_c \quad [4.1.46]$$

dove:

f_{yd} è la resistenza di progetto dell'armatura (riferita allo snervamento)

N_{Ed} è la forza di compressione assiale di progetto

A_c è l'area di calcestruzzo.

Le armature trasversali devono essere poste ad interasse non maggiore di 12 volte il diametro minimo delle barre impiegate per l'armatura longitudinale, con un massimo di 250 mm. Il diametro delle staffe non deve essere minore di 6 mm e di $\frac{1}{4}$ del diametro massimo delle barre longitudinali.

Al di fuori delle zone di sovrapposizione, l'area di armatura non deve superare $A_{s,max} = 0,04 A_c$, essendo A_c l'area della sezione trasversale di calcestruzzo.

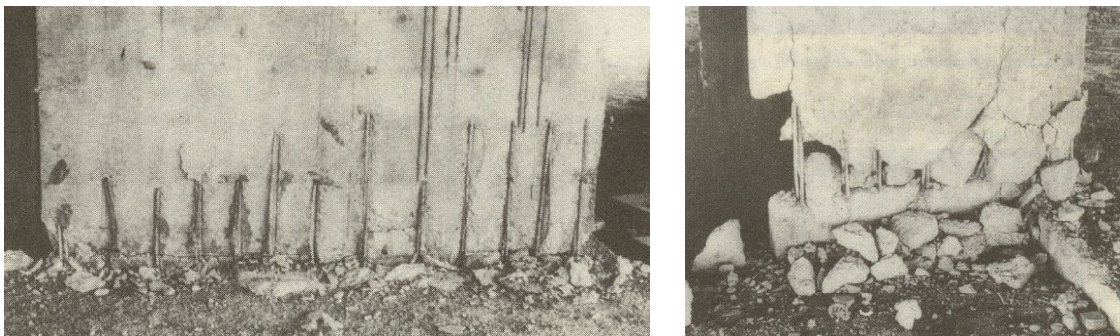


Esempi di instabilizzazione barre longitudinali di armatura compresse per eccessiva spaziatura delle staffe



Le zone più «critiche» sono tipicamente le estremità dei pilastri, in quanto sono le zone in cui c'è la ripresa delle armature ed è presente anche una maggiore sollecitazione di flessione.

È quindi buona norma infittire le staffe in dette zone, per esempio dimezzandone il passo.



COMPORTAMENTO ELASTICO di un PILASTRO IN C.A.

Si considera un pilastro soggetto al carico assiale N di compressione di modesta entità e si vuole conoscere lo stato tensionale nel calcestruzzo (σ_c) e nelle armature (σ_s).

Per risolvere il problema, si assumono le seguenti ipotesi:

- Planarità delle sezioni (ipotesi di Bernoulli): sotto l'effetto delle sollecitazioni applicate, le sezioni traslano rimanendo piane;
- Perfetta aderenza acciaio-calcestruzzo (ipotesi di congruenza): le deformazioni dei due materiali, nei punti di contatto, si equivalgono;
- Comportamento elastico dei materiali (secondo la legge di Hook).

Per a), la generica sezione del pilastro manifesta una contrazione costante, ε .

Per b), sia il cls che l'acciaio subiscono la medesima deformazione: $\varepsilon_s = \varepsilon_c = \varepsilon$

Per c), le tensioni nei due materiali sono: $\sigma_c = E_c \varepsilon_c$ $\sigma_s = E_s \varepsilon_s$

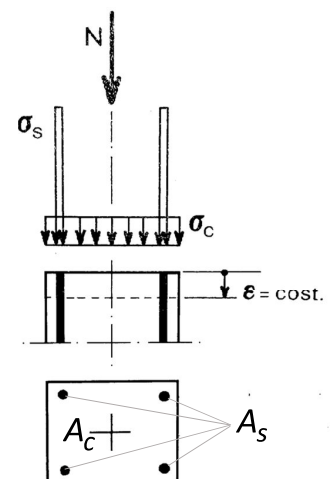
Scrivendo l'equilibrio alla traslazione tra forze interne ed esterne si ha:

$$\sigma_c A_c + \sigma_s A_s = N \rightarrow \sigma_c (A_c + \alpha_e A_s) = N \rightarrow \sigma_c A_i = N$$

con dove A_i area ideale della sezione, omogenizzata al calcestruzzo

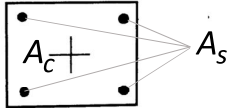
e α_e coefficiente di omogenizzazione (E_s/E_c).

Si ottiene quindi $\sigma_c = \frac{N}{A_i}$ e $\sigma_s = \alpha_e \sigma_c$



COMPORAMENTO A ROTTURA di un PILASTRO IN C.A.

Le capacità portante (a rottura) di un pilastro in c.a. nei confronti dell'azione assiale di compressione sarà data dal contributo della sezione di **calcestruzzo** (A_c) e di quello delle **barre d'armatura longitudinali** (A_s).
Le ipotesi a) e b) continuano ad essere valide, mentre si sarà riferimento al comportamento non-lineare dei due materiali, secondo i rispettivi legami costitutivi.



$$N_{Rd} = f_{cd} A_c + \sigma^* A_s$$

Resistenza a compressione (di progetto) del cls

Tensione di compressione nelle barre longitudinali

$$\sigma^* = E_s \varepsilon_{c2} \quad \text{se } \varepsilon_{yd} > \varepsilon_{c2} \quad (\text{ovvero se le barre sono ancora in campo elastico})$$

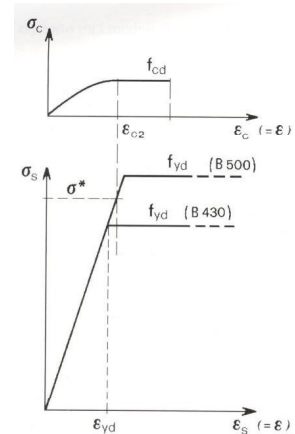
$$\sigma^* = f_{yd} \quad \text{se } \varepsilon_{yd} \leq \varepsilon_{c2} \quad (\text{ovvero se le barre sono snervate})$$

In quest'ultimo caso, sostituendo sopra, si può scrivere:

$$N_{Rd} = f_{cd} \left(A_c + \frac{f_{yd}}{f_{cd}} A_s \right) = f_{cd} A_c (1 + \omega_s)$$

$$\omega_s = \frac{f_{yd} A_s}{f_{cd} A_c} \quad \text{Rapporto meccanico di armatura}$$

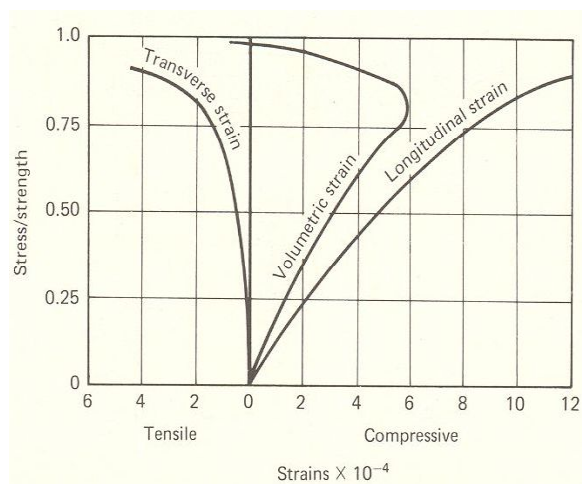
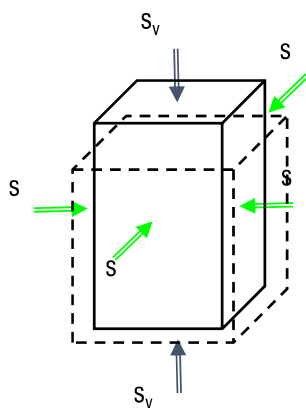
$$\rho_s = \frac{A_s}{A_c} \quad \text{Rapporto geometrico di armatura}$$



IL CONFINAMENTO del CALCESTRUZZO

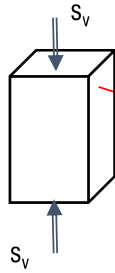
La presenza di staffe o spirali contiene (meglio, confina) il calcestruzzo incrementando la resistenza a compressione (**CONFINAMENTO**)

--> **Effetto benefico**: la **resistenza** e la **duttilità** del calcestruzzo compresso aumentano sensibilmente in stati di sforzo triassiali. L'azione di una pressione trasversale "confina" il calcestruzzo e contrasta l'evoluzione dello stato fessurativo interno e l'incremento di volume che precede la rottura

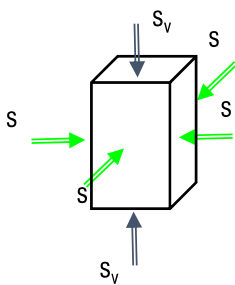


Caso ideale:

Prova di compressione monoassiale



Se applichiamo una **pressione trasversale s (o σ)** sulle altre facce, otteniamo un notevole aumento di **resistenza** e in **duttilità**



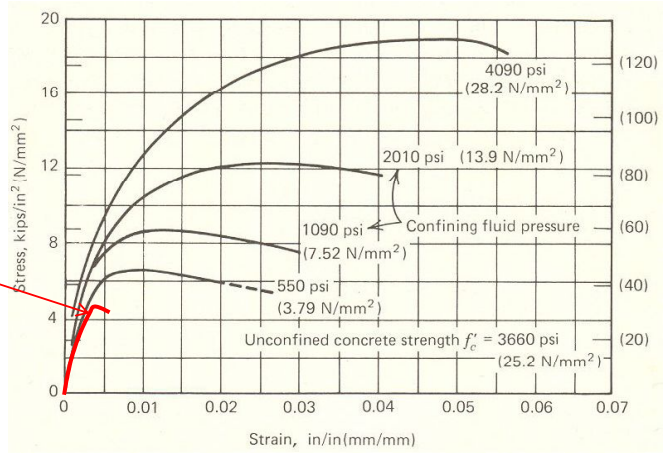
$$f_{cc} = f_c + \alpha \sigma$$

Resistenza del cls confinato

Resistenza del cls NON confinato

Pressione trasversale

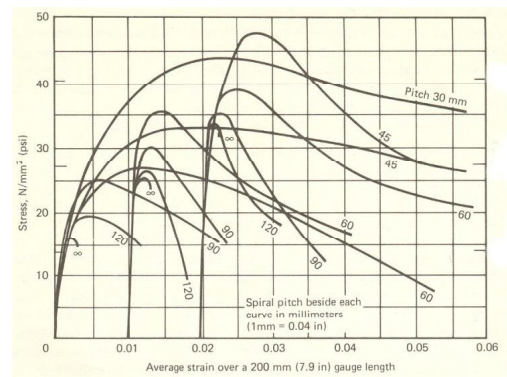
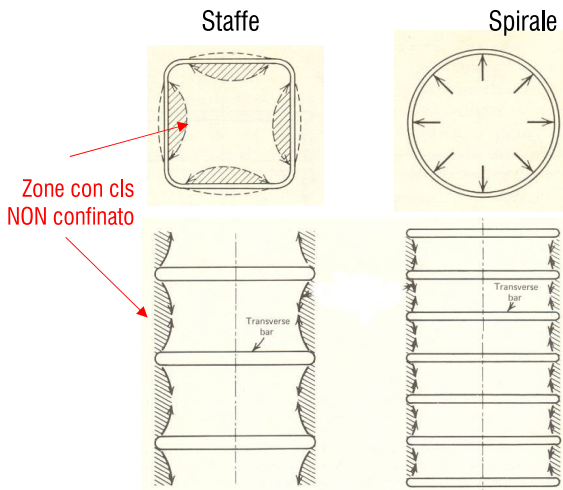
α coefficiente che varia fra 4 e 7 (=4.1 Richart, Brown)



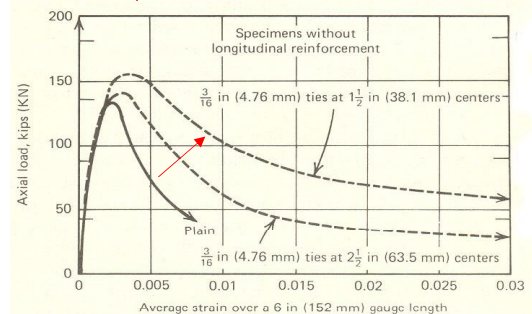
Caso reale:

Il confinamento trasversale può essere realizzato mediante **staffe/spirali**. L'efficacia è funzione del **passo** e della **forma**.

L'effetto del confinamento dato dalle armature trasversale coinvolge, in realtà, soltanto una porzione della sezione (cioè σ non è uniforme)



Al diminuire del passo delle armature trasv. aumenta il confinamento



L'effetto del confinamento può essere tenuto conto **modificando il legame costitutivo del calcestruzzo**, in funzione del tipo di **armatura d'anima** impiegata:

Un metodo per quantificare l'effetto del confinamento sulla resistenza a compressione del calcestruzzo si basa sull'ipotesi che quando il calcestruzzo raggiunge il suo ramo plastico, le staffe sono **prossime allo snervamento**: allora le tensioni di confinamento possono essere approssimate con la relazione

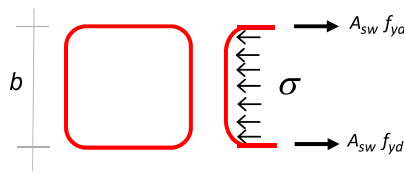
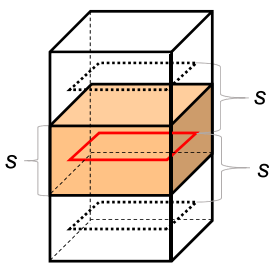
$$\sigma = 0.5 \omega_w f_{cd}$$

ω_w è la percentuale volumetrica meccanica di armatura d'anima

$$\omega_w = \frac{V_{sw} f_{yd}}{V_c f_{cd}} \quad V_{sw} \text{ è il volume di armature trasversali contenute nel volume di calcestruzzo } V_c \text{ avente sezione } A_c \text{ e altezza pari al passo delle armature trasversali}$$

Es. caso staffe quadrate

$$\omega_w = \frac{4bs A_s f_{yd}}{b^2 s f_{cd}} \quad \text{Riscrivendo} \quad 2 A_s f_{yd} = \frac{\omega_w f_{cd}}{2} b s$$



Dall'equilibrio alla traslazione:

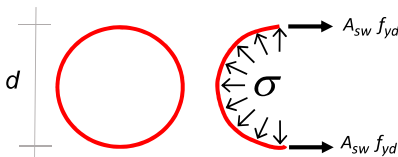
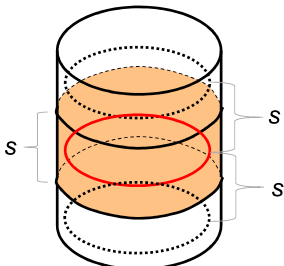
$$2 A_s f_{yd} = \sigma b s$$

Quindi:

$$\sigma = 0.5 \omega_w f_{cd}$$

Es. caso staffe circolari

$$\omega_w = \frac{4\pi b A_s f_{yd}}{\pi b^2 s f_{cd}} \quad \text{Riscrivendo} \quad 2 A_s f_{yd} = \frac{\omega_w f_{cd}}{2} b s$$



Legge di Boyle:

$$2 A_s f_{yd} = \sigma b s$$

Quindi:

$$\sigma = 0.5 \omega_w f_{cd}$$

L'efficacia è legata al passo e alla forma

$$\sigma = 0.5 \omega_w f_{cd} \longrightarrow \sigma = 0.5 \alpha_n \alpha_s \omega_w f_{cd}$$

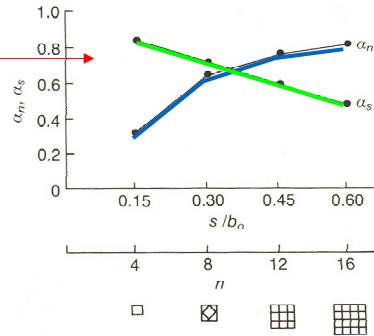
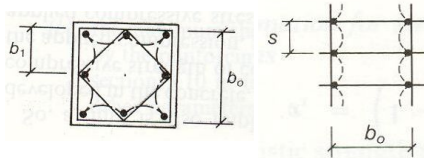
Coeff. forma
Coeff. passo

- Per pilastri rettangolari

$$\alpha_n \cong 1 - \frac{n b_1^2}{6 A_o}$$

n = numero barre longit. vincolate con staffe
 b1 = interasse barre longitudinali
 A_o = area del core (nucleo di cls interno alle staffe)

$$\alpha_s = 1 - \frac{s}{2 b_o}$$



- Per pilastri circolari e staffe circolari $\alpha_n = 1$ $\alpha_s = \left(1 - \frac{s}{2 b_o}\right)^2$

- Per pilastri cerchiati con spirale $\alpha_n = 1$ $\alpha_s = 1 - \frac{s}{2 b_o}$

Oss. Per le travi, l'asse neutro va considerato come se fosse presente una staffa trasversale

CAPACITA' PORTANTE di un PILASTRO IN C.A. CON CONTRIBUTO CONFINAMENTO

$$N_{Rd} = f_{cd} A_c + \sigma^* A_s$$

$$f_{cc} = f_c + \alpha \sigma$$

$$\sigma = 0.5 \alpha_n \alpha_s \omega_w f_{cd}$$

assumendo $\alpha = 4$

$$N_{Rd} = f_{cd} [A_c + 4(0.5 \alpha_n \alpha_s \omega_w)] + \sigma^* A_s$$

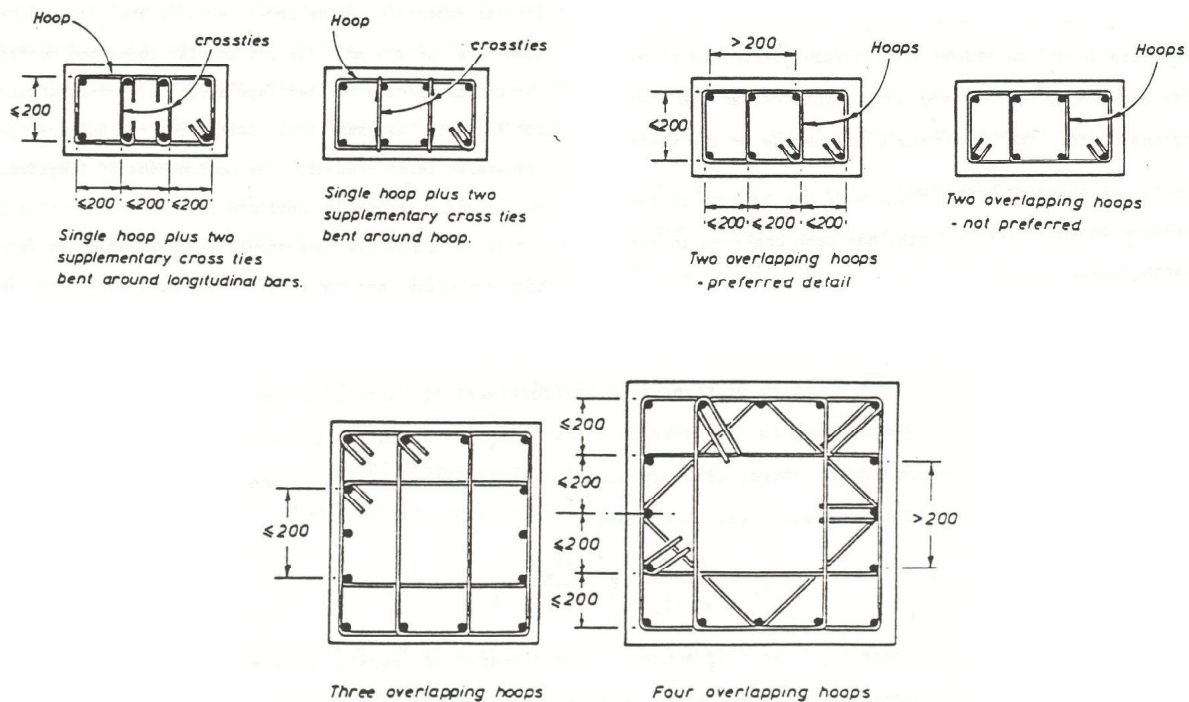
Se le barre sono snervate, ovvero $\epsilon_{yd} \leq \epsilon_{c2}$, si ha $\sigma^* = f_{yd}$ e si può scrivere:

$$N_{Rd} = f_{cd} (A_c + 2 \alpha_n \alpha_s \omega_w) + f_{yd} A_s$$

Contributo importante per staffe circolari o spirali

Contributo trascurabile per pilastri con staffe poligonali

Esempi di confinamento con staffe



ELEMENTI IN C.A. SOGGETTI AD AZIONE ASSIALE di TRAZIONE

Con la trattazione degli elementi tesi in calcestruzzo armato (tirante in c.a.) si introduce il fondamentale tema della fessurazione degli elementi in c.a.

Dando per scontata la sicurezza nei riguardi del collasso, la fessurazione ha tre ordini di conseguenze:

- riduzione della durabilità (protezione contro la corrosione delle armature);
- riduzione della funzionalità (incremento della permeabilità, rilevante in alcuni casi, in relazione ai requisiti funzionali - es. serbatoi, in altri gravemente pregiudizievole nei riguardi della durabilità - pb. gelo-disgelo);
- decadimento estetico (l'evidenza dello stato fessurativo induce un senso di apparente precarietà statica, che lo rendono inaccettabile all'utenza);

Il tema della fessurazione è complesso: per trattare il fenomeno si considerano criteri e metodi approssimati.

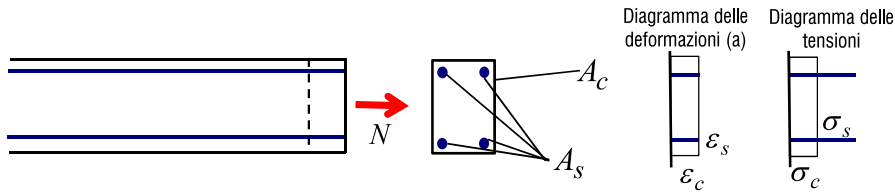
Analizziamo due differenti situazioni:

- 1) Elemento teso in c.a. **non fessurato** (sezione interamente reagente)
- 2) Elemento teso in c.a. **fessurato** (sezione fessurata)



1) Elemento teso in c.a. non fessurato (sezione interamente reagente) $\sigma_c \leq f_{ctd}$

- 3 ipotesi a) Conservazione delle sezioni piane (Ipotesi di Bernoulli)
 b) Perfetta aderenza acciaio-cla (congruenza)
 c) Cla elastico lineare, acciaio elastico lineare



Per b) $\varepsilon_s = \varepsilon_c$
 Per c) $\sigma_c = E_c \varepsilon_c$
 $\sigma_s = E_s \varepsilon_s$

$$\sigma_s = \sigma_c \frac{E_s}{E_c} = \sigma_c \alpha_e$$

Coefficiente di omogeneizzazione

$$\sigma_c = \frac{N}{A_c + \alpha_e A_s} = \frac{N}{A_i}$$

$$\sigma_s = \frac{\alpha_e N}{A_i}$$

Equilibrio alla traslazione tra forze interne ed esterne

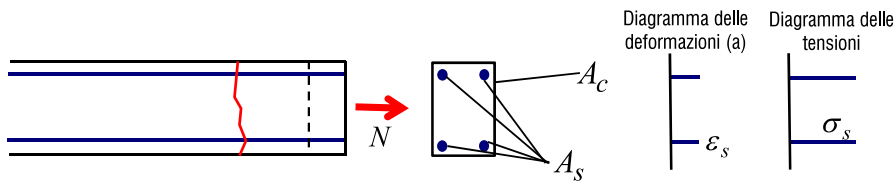
$$\sigma_c A_c + \sigma_s A_s = N$$

A_i sezione omogeneizzata

Per $\sigma_c = f_{ctd}$ si ha il limite di formazione delle fessure $N_{cr} = f_{ctd} (A_c + \alpha_e A_s)$

2) Elemento teso in c.a. fessurato (sezione fessurata) $\sigma_c \leq f_{ctd}$

- 3 ipotesi a) Conservazione delle sezioni piane (Ipotesi di Bernoulli)
 b) Perfetta aderenza acciaio-cla (congruenza)
 c) Cla fessurato, acciaio elasto-plastico



Equilibrio alla traslazione tra forze interne ed esterne

$$\sigma_s A_s = N$$

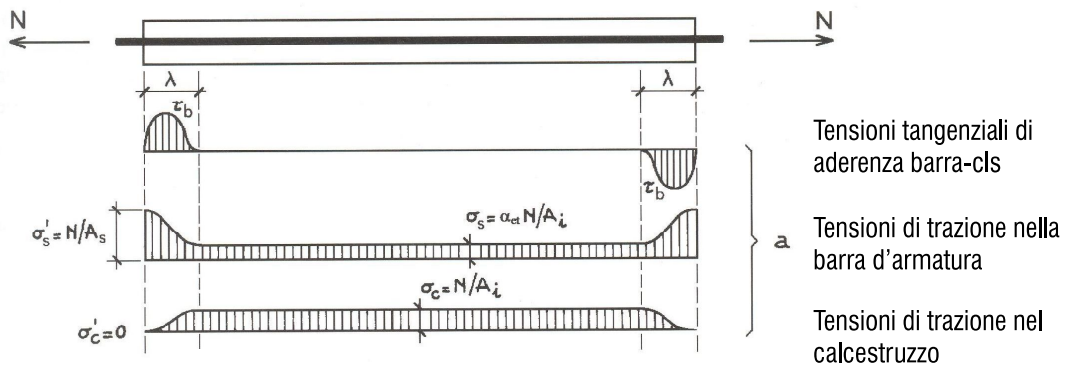
$$\sigma_s = \frac{N}{A_s}$$

Allo stato limite di esercizio

Allo stato limite ultimo, $\sigma_s = f_{yd}$ $N_{Rd} = f_{yd} A_s$

ANDAMENTO DELLE TENSIONI IN UN TIRANTE IN C.A.

Supponiamo di applicare N alla barre d'armatura: nei tratti estremi del tirante (per una lunghezza λ) avremo il trasferimento di parte delle tensioni della barra al cls, attraverso le tensioni tangenziali τ_b acciaio-barra



Finchè la tensione nel cls rimane inferiore alla sua resistenza a trazione, siamo in condizione di sezione interamente reagente. Nella zona centrale vale quindi:

$$\sigma_c = \frac{N}{A_c + \alpha_e A_s} \quad \sigma_s = \sigma_c \alpha_e$$

Quando la tensione nel cls supera la sua resistenza a trazione si forma una prima fessura e poi le altre:

Nelle zone di completa diffusione delle tensioni (sez. int. reagente)

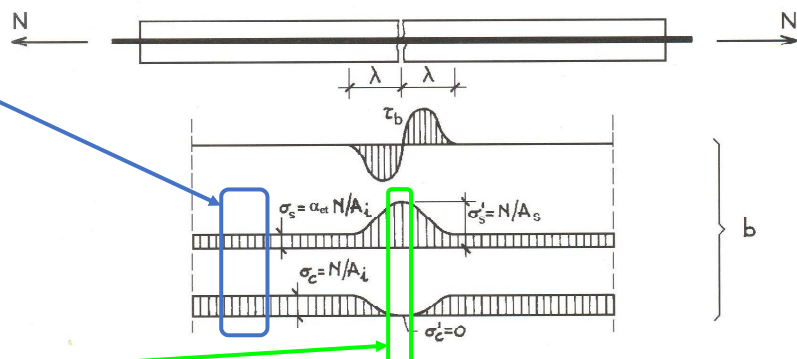
$$\sigma_c = \frac{N}{A_c + \alpha_e A_s}$$

$$\sigma_s = \sigma_c \alpha_e = \frac{\alpha_e N}{A_i}$$

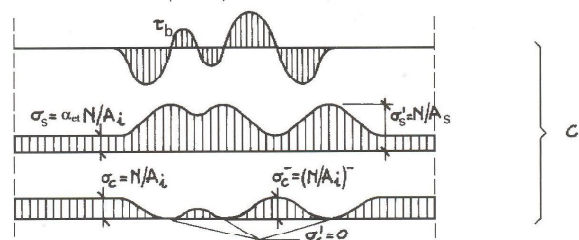
In corrispondenza della fessura (sez. fessurata)

$$\sigma'_s = \frac{N}{A_s}$$

$$\sigma'_c = 0$$



C'è una distanza minima (λ) tra le fessure



DISTANZA MINIMA TRA LE FESSURE

Consideriamo un tratto di tirante compreso tra due fessure

Approssimiamo: $\tau_b \sim \text{costante}$, $\sigma_s \sim \text{lineare}$

L'equilibrio alla traslazione di metà concio, ponendo la tensione nei cls pari a f_{ctd} , dà:

$$N = \sigma'_s A_s = \sigma_s A_s + f_{ctd} A_c$$

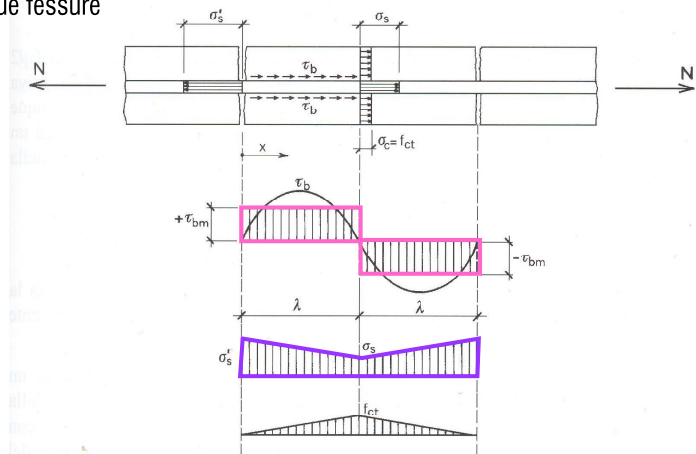
$$\Delta\sigma_s = \sigma'_s - \sigma_s = f_{ctd} \frac{A_c}{A_s}$$

L'equilibrio della semiparte di barra dà:

$$\Delta\sigma_s (A_s) = \tau_{bm} (\pi \phi \lambda)$$

Area barra Superficie laterale barra

$$\frac{\pi \phi^2}{4} \Delta\sigma_s = \pi \phi \tau_{bm} \lambda$$



$$\lambda = \frac{\phi A_c f_{ctd}}{4 A_s \tau_{bm}} = \frac{1}{4} \frac{\phi}{\rho_s} \frac{1}{\beta_b}$$

Si è già visto che l'aderenza barra-cls è proporzionale alla resistenza a trazione del cls ($\tau_{bm} = \beta_b f_{ctd}$)

OSS: Utilizzando diametri minori di barre si hanno fessure più ravvicinate

APERTURA DI FESSURA

$$w = 2(\Delta\lambda_s - \Delta\lambda_c)$$

Allungamento barra

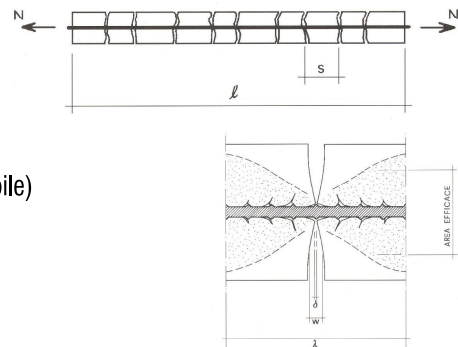
Allungamento cls

$$\Delta\lambda_s = \frac{\sigma'_s + \sigma_s}{2 E_s} \lambda = \frac{2\sigma'_s - \Delta\sigma_s}{2 E_s} \lambda$$

$$\Delta\lambda_c = \frac{f_{ctd}}{2 E_c} \lambda \quad (\text{trascurabile})$$

$$w = 2 \left(\frac{\sigma'_s}{E_s} - \frac{1}{2} \frac{\Delta\sigma_s}{E_s} \right) \lambda = 2 \frac{\sigma'_s}{E_s} \left(1 - \frac{f_{ctd} A_c}{2 \sigma'_s A_s} \right) \lambda$$

Effetto irrigidente del cls tra le fessure (effetto «Tension stiffening»)



L'ampiezza della fessura, w, dipende dalla distanza λ : a valore di λ più grande corrisponde un'ampiezza di fessura w maggiore. Quindi, **per contenere w, è necessario limitare λ** (vedi sopra)

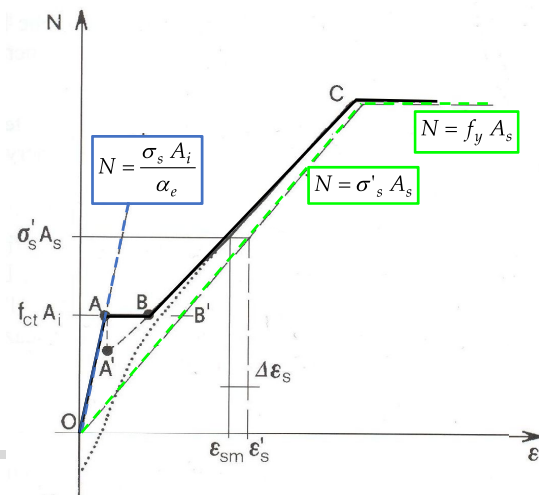
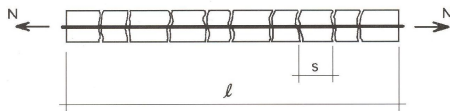
$$A_s \geq A_c \frac{f_{ctm}}{f_{yd}} \quad \text{Armatura minima (la sezione di armatura deve resistere più di quella di calcestruzzo)}$$

LEGAME N- ε DI UN TIRANTE IN C.A.

Il **comportamento complessivo del tirante in c.a.** è descritto dal **diagramma N- ε** (forza di trazione – deformazione media del tirante), dove:

- **Tratto OA:** tirante non fessurato;
- **Punto A:** condizione limite di formazione delle fessure;
- **Tratto AB:** fase di completa fessurazione del tirante;
- **Tratto BC:** tirante fessurato;
- **Linea tratteggiata verde:** comportamento che avrebbe la barra nuda (in assenza di cls);

Il gap orizzontale tra BC e la linea tratteggiata ($\Delta\varepsilon_s$) è l'**effetto irrigidente** offerto dai conchi di calcestruzzo presente tra fessura e fessura.



Bibliografia

- Toniolo G., Di Prisco M., "Cemento Armato – Calcolo agli stati limite", Vol. 2a, terza edizione, Ed. Zanichelli, 2010.
- Park R., Paulay T., "Reinforced Concrete Structures", John Wiley & Sons, New York, 1975.
- Mac Gregor J., "Reinforced Concrete – Mechanics and Design", Prentice Hall, New Jersey, 1988.
- Santarella L., "Prontuario del Cemento Armato", XXXVIII edizione, Ed. Hoepli, Milano.