Foglio 1

Esercizio 1 Si considerino le seguenti funzioni $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Stabilire per ciascuna di esse se il limite per $(x, y) \to (0, 0)$ esiste e in tal caso calcolarlo.

(i) $\dfrac{x^2 y}{x^2 + 2y^2}$;

(ii) $\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

(iii) $\dfrac{y - \sqrt[3]{x}}{\sin \sqrt[3]{x}}$;

(iv) $\dfrac{y^2 \log |x|}{x^2 + y^2}$;

(v) $\dfrac{y^2 \log(1 + x)}{(x - 1)^2 + y^2}$;

(vi) $\dfrac{x \log(1 + x^3)}{y(x^2 + y^2)}$;

(vii) $\dfrac{x^2 y}{x^4 + 2y^2}$;

(viii) $\dfrac{2x + 4y}{3x - y}$;

(ix) $\dfrac{\sin(y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

(x) $\arctan(y^2/x)$.

Esercizio 2 Sia (X, d) uno spazio metrico, $x \in X$ e $r > 0$. Dimostrare la seguente inclusione

$$\overline{B(x, r)} \subseteq \overline{B}(x, r).$$

Esercizio 3 Sia (X, d) uno spazio metrico e $p \in X$. Mostrare che la funzione $f \colon X \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = d(x, p)$ è continua. Stabilire se è anche uniformemente continua.

Esercizio 4 Si consideri $\mathbf{R}^2$ come spazio metrico con la distanza euclidea. Determinare interno, chiusura e frontiera dei seguenti sottoinsiemi. Dire inoltre se sono chiusi, aperti o limitati.

(i) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$;

(ii) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(3, 4)\}$;

(iii) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon x^2 + 3y^2 \leq 4\} \setminus \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon y = 0\}$;

(iv) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon xy = 1\}$;

(v) $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon x, y \in \mathbf{Z}\}$.

Esercizio 5 Sia $f \colon X \to Y$ una funzione continua tra spazi metrici. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) f è continua;

(ii) per ogni $x_0 \in X$ e per ogni intorno V di $f(x_0)$, $f^{-1}(V)$ è un intorno di x_0;

(iii) per ogni aperto $V \subseteq Y$, l'insieme $f^{-1}(V)$ è aperto;

(iv) per ogni chiuso $C \subseteq Y$, l'insieme $f^{-1}(C)$ è chiuso.

Esercizio 6 Stabilire se le seguenti funzioni sono uniformemente continue su $[0, +\infty)$ e su $[0, 1]$:

(i) $f(x) = x$;

(ii) $f(x) = e^x$;

(iii) $f(x) = e^{-x}$;

(iv) $f(x) = x^2$;

(v) $f(x) = \sin(x)$ (*Possibile suggerimento:* ricordare la formula $\sin(x + h) = \sin(x) \cos(h) + \cos(x) \sin(h)$).

Esercizio 7 Sia $I \subseteq \mathbf{R}$ un intervallo aperto e $f\colon I \to \mathbf{R}$ una funzione differenziabile.

(i) Dimostrare che, se f' è limitata, allora f è uniformemente continua.

(ii) Dimostrare che le funzioni $f(x) = e^{-x^2}$ e $f(x) = \log(1 + x^2)$ sono uniformemente continue su $\mathbf{R}$.

(iii) Una funzione limitata è uniformemente continua? Dimostrare o fornire un controesempio.

Esercizio 8 Sia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione uniformemente continua. Dimostrare che esistono delle costanti $b, c \in \mathbf{R}$ tali che per ogni $x \in \mathbf{R}$ valga la disuguaglianza

$$|f(x)| \leq b + c|x|.$$

Esercizio 9 Si consideri $I = [0, 1]$ e sia $X := \mathcal{C}(I; \mathbf{R})$ l'insieme delle funzioni continue definite su I a valori reali. Sia poi $d\colon X \times X \to \mathbf{R}$ la funzione

$$d(f, g) := \sup_{t \in I} |f(t) - g(t)|.$$

(i) Dimostrare che d è una distanza su X.

(ii) Sia $B(\underline{0}, 1)$ la palla di raggio 1 centrata in $\underline{0}$, dove indichiamo con $\underline{0}$ la funzione $I \to \mathbf{R}$ che vale identicamente 0. Trovare due funzioni che appartengono a $B(\underline{0}, 1)$ e altre due che non vi appartengono.

(iii) Dimostrare che la funzione $f \in X$ definita da $f(t) = t$ appartiene alla chiusura $\overline{B(\underline{0}, 1)}$.

(iv) Si consideri la funzione $T\colon X \to \mathbf{R}$ definita da $T(f) = \int_0^1 f(t)dt$. Mostrare che T è continua.

Esercizio 10 Sia $Y := \{p, q\}$ un insieme con due elementi, dotato della distanza d_Y così definita:

$$d_Y(p, p) = d_Y(q, q) = 0, \quad d_Y(p, q) = 1.$$

Sia (X, d_X) uno spazio metrico e $f\colon X \to Y$ una funzione. Dimostrare che f è continua se e solo se è *localmente costante*, ossia tale che ogni punto di X possieda un intorno su cui è f è costante.