22 Limiti di successioni e serie geometrica

Detto semplificatamente, ogni volta che un veleno o un farmaco entra nel sangue, il corpo cerca di eliminarlo il prima possibile, o nell'urina, o distruggendolo nel fegato.
Tipicamente, ogni tot tempo (l'emivita) la sostanza residua dimezza (sia la concentrazione, sia la quantità assoluta).
Questo ci dà modo di introdurre il concetto di limite di una successione, almeno nel caso del limite nullo, ossia 0.
Per una sostanza con tempo di dimezzamento di 24 ore, di cui all'inizio si abbia una concentrazione – per esempio – 800, con qualche unità di misura, nei vari giorni si avranno queste concentrazioni:

| 0 | 800 | giorno 0, ovvero iniziale
1	400
2	200
3	100
4	50
5	25
6	12.5
7	6.25
8	3.125
9	1.5625
10	0.78125
11	0.390625	$\lim_{n\to+\infty} \frac{800}{2^n} = 0$
12	0.1953125
13	0.09765625
14	0.048828125
15	0.0244140625
16	0.01220703125
17	0.006103515625
18	0.0030517578125
19	0.00152587890625
20	0.000762939453125	qua è quasi 0: nel tempo **tende a 0.**

22.1 Limite della concentrazione plasmatica

La successione

$$y_n = 8 \cdot 2^{-3\,n}$$

potrebbe bene rappresentare la concentrazione decrescente di un farmaco nei giorni 0, 1, 2... con qualche unità di misura. (Precisiamo: magari somministrato alle 6:00 di mattina del giorno 0 e misurato al mezzogiorno di ogni giorno).

Per la concentrazione del farmaco nel sangue sopra considerata sarà

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = 0$$

come già possiamo intuire.

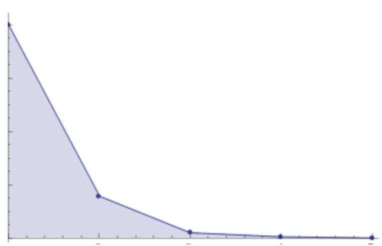


Figure 33: Screenshot da WolframAlpha. Le linea e l'ombreggiatura servono solo per migliorare la lettura del diagramma, ma solo i puntini sono significativi.

Si noti che il soggetto sarà già morto, e quindi privo di concentrazione sanguigna, molto prima non solo dell'inesistente giorno $+\infty$, ma anche del milionesiomo giorno: nondimeno, il fatto che la concentrazione di quella sostanza *tende a zero*, è molto significativo.

Ambiguità notazionale. Altri $n \to \infty$ invece di $n \to +\infty$

22.2 Una triste storia di infermità a lieto fine e una no

Alcibiade, soggetto A, alle ore 00:00 si sega alcune dita della mano destra con la sega elettrica, ed essa cade sullo stesso dito della mano destra di Berengario, soggetto B: gli fa un tremendo male ma niente di più.

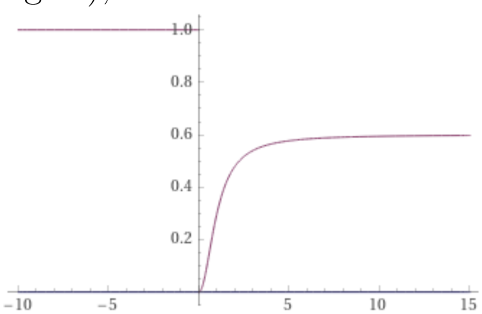
Detto t il tempo, per esempio in giorni, e 0 è l'istante (giorno) dell'incidente,

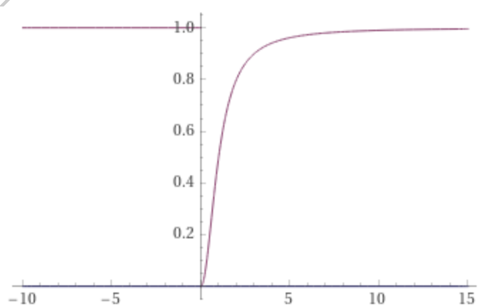
la funzionalità della mano destra di A, sia essa $\alpha(t)$

e la funzionalità della mano destra di B, sia essa $\beta(t)$

che per $t < 0$ erano 1 ovvero 100%, precipitano entrambe a 0.

Ma nel tempo B tende a recuperare al 100% la funzionalità della mano infortunata, mentre ad A, che pure recupera via via molto nei giorni successivi all'incidente, tende a rimanere sul lungo periodo un'invalidità residua permanente (avvicinandoci qua alla Medicina Legale), diciamo del 40%:





$$\lim_{t\to+\infty} \alpha(t) = 0.6 \qquad \lim_{t\to+\infty} \beta(t) = 1$$

Tutto questo rimane vero considerando 1 singolo valore per giorno, alle 00:01, ottenendosi successioni a_n e b_n invece delle funzioni $\alpha(t)$ e $\beta(t)$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.6 \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = 1$$

e i grafici verrebbero "a puntini" invece che con archi di curva.

Medicina legale. L'invalidità permanente residua è la percentuale di danno fisico o funzionale che resta dopo la guarigione da un infortunio o una malattia. Per esempio un pollice perduto vale 18% di invalidità permanente secondo le tabelle medico-legali INAIL.

22.3 Un limite banale ma illuminante

Consideriamo la funzione, in effetti successione (funzione definita in $\mathbb{N}$ o una sua semiretta destra), che potremmo indicare $f(n)$ variando n nei numeri naturali, ma proprio per questo motivo preferiamo indicare con a_n o y_n o simile, come si usa per le successioni,

$$y_n := \text{valore della costante di gravitazione universale al giorno } n$$

essendo n il numero ordinale del giorno, per esempio a partire dal 1 gennaio (calendario giuliano) dell'anno 1, oppure in qualunque altro calendario.
Per quanto attualmente se ne sa (ma ci sono varie ipotesi, di cui non ci occupiamo assolutamente), il valore della costante di gravitazione universale è, per l'appunto, costante nel tempo, in tutti i giorni della storia dell'universo, e fatte salve le unità di misura che non riportiamo, vale nel Sistema Internazionale delle unità di misura $6.67... \times 10^{-11}$. (È una delle costanti universali della Fisica meno precisamente determinata, cosa che non ci interessa).
Ora vorremmo chiederci (in quest'ipotesi della costanza) quanto vale al giorno $+\infty$. Certo, un giorno con tale numero ordinale mai esisterà, perchè $+\infty$ non è un numero; nondimento, chiunque capisce il senso reale della domanda: quanto varrà in un tempo "infinitamente futuro"? Ovviamente, in quest'ipotesi della costanza, ancora $6.67... \times 10^{-11}$, proprio come il 1 gennaio (calendario giuliano) dell'anno 1, e perfino... oggi.
Abbiamo allora, per ogni costante reale c:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} c = c} \tag{71}$$

Nota. Finora abbiamo trattato i limiti di successioni e funzioni senza cautele col linguaggio comune, e dal prossimo paragrafo formalizziamo la questione dei limiti delle successioni.

22.4 Successioni (di numeri reali)

Mentre passaggio al quadrato, exp, sin, cos... a numeri reali associano numeri, il fattoriale SOLO A NUMERI NATURALI associa numeri. Cioè, esistono 2.5^2 ed $e^{2.5}$ ma $2.5!$ non([138]) esiste.

Questo tipo di funzioni numeriche definite solo su $\mathbb{N}$ o su una sua semiretta (per esempio $\{1, 2, 3...\}$ senza lo 0) si chiamano

SUCCESSIONI (di numeri reali).

Invece che indicarle con simboli come $f(x)$ oppure $g(n)$ si preferisce indicarle con a_n oppure y_m oppure z_k e simili, per esempio $y_n := n!$ e il fattoriale è definito così:

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Un'altra è la successione di Fibonacci:

$$a_n \ldots \text{ successione di Fibonacci}$$

e poi abbiamo queste altre, dei reciproci e dei quozienti:

$$r_n := \frac{1}{a_n} \quad a_n \text{ successione di Fibonacci, } n = 1, 2\ldots$$

$$q_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad a_n \text{ successione di Fibonacci, } n = 1, 2\ldots$$

Naturalmente si possono ottenere successioni anche restringendo il dominio di funzioni elementari ai soli numeri naturali, per esempio

$$z_n := \frac{e^n + e^{-n}}{2}$$

ma non vogliamo occuparci di queste in questa Lezione.

[138] A un livello superiore viene definito, con la funzione gamma.

22.5 Limite finito delle successioni

Ecco alcuni valori delle successioni a_n e q_n del paragrafo precedente:

Indice n di a_n	Fibonacci a_n	Quoziente $q_n = a_{n+1}/a_n$	Scrittura decimale esatta o approx
0	0		
1	1	1/1	1
2	1	2/1	2
3	2	3/2	1.5
4	3	5/3	1.66667
5	5	8/5	1.6
6	8	13/8	1.625
7	13	21/13	1.61538
8	21	34/21	1.61905
9	34	55/34	1.61765
10	55	89/55	1.61818
11	89	144/89	1.61798
12	144	233/144	1.61806
13	233	377/233	1.61803
14	377	610/377	1.61804
15	610	987/610	1.61803

Ci viene l'idea che q_n "tende" a 1.618... per n che "tende" all'infinito. In effetti tende alla sezione aurea $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618...$ ma non possiamo dimostrarlo al livello di questo testo elementare.

Scriveremo

$$\lim_{n\to+\infty} q_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618...$$

e leggeremo: "limite per n che tende a $+\infty$ di q_n uguale", eccetera.

La teoria dei limiti viene svolta in Analisi Matematica a un livello piuttosto complesso ma noi ci accontenteremo di RAGIONAMENTI EURISTICI: in pratica di ragionamenti approssimativi basati sul guardare i numeri e i grafici, e su poche formule.

22.6 Limite nullo delle successioni

Ecco alcuni valori delle successioni a_n e r_n del paragrafo 22.4:

Indice n di a_n	Fibonacci a_n	Reciproco $r_n = 1/a_n$	Scrittura decimale esatta o approx
0	0		
1	1	1/1	1
2	1	1/1	1
3	2	1/2	0.5
4	3	1/3	0.333333
5	5	1/5	0.2
6	8	1/8	0.125
7	13	1/13	0.0769231
8	21	1/21	0.047619
9	34	1/34	0.0294118
10	55	1/55	0.0181818
...	...	...	...
25	75025	1/75025	$1.33289 \cdot 10^{-5}$
26	121393	1/121393	$8.23771 \cdot 10^{-6}$
27	196418	1/196418	$5.09118 \cdot 10^{-6}$
28	317811	1/317811	$3.14652 \cdot 10^{-6}$
29	514229	1/514229	$1.94466 \cdot 10^{-6}$
30	832040	1/832040	$1.20187 \cdot 10^{-6}$
31	1346269	1/1346269	$7.42794 \cdot 10^{-7}$
32	2178309	1/2178309	$4.59072 \cdot 10^{-7}$

Ipotizziamo ed è vero e si potrebbe dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$$

Naturalmente il limite 0 è un caso particolare del caso del limite finito considerato nel paragrafo precedente. Tuttavia, in vista di varie formule che vedremo, il limite 0 va considerato separatamente dagli altri limiti finiti. Similmente

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$$

22.7 I 2 possibili limiti infiniti delle successioni

Ci sono 2 limiti infiniti, il $+\infty$ e il $-\infty$, che adesso spieghiamo.

Guardando i valori a_n della successione di Fibonacci nella tabella del precede paragrafo, e magari anche alcuni successivi, ipotizziamo ed è vero e si potrebbe dimostrare che essi diventano definitivamente QUANTOMAI GRANDI, e più precisamente che fissata una qualunque soglia M, da un certo punto in poi $a_n > M$.
Diremo che il limite è $+\infty$ e scriveremo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \qquad a_n \text{ successione di Fibonacci}$$

Similmente avviene coi fattoriali:

$$\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$$

Analogamente si definisce anche il limite $-\infty$, per esempio

$$\lim_{n\to+\infty} \lg \frac{1}{n!} = -\infty$$

in particolare il logaritmo decimale di $1/70!$ è già circa -100.

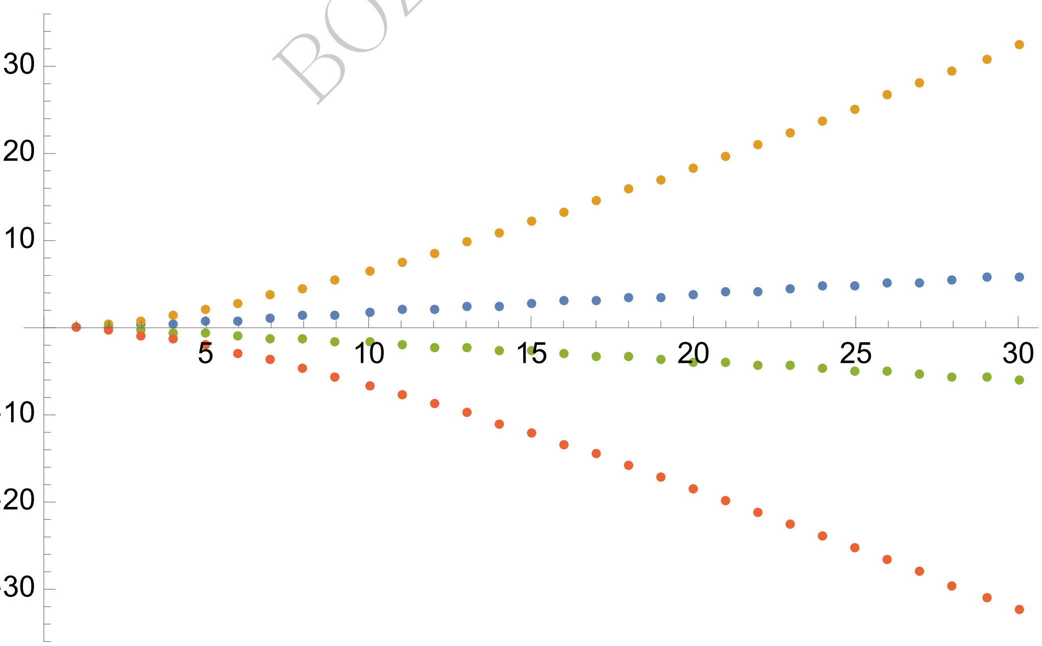


Figure 34: Dall'alto verso il basso, in scala logaritmica, grafici dei valori di $n!$, a_n, $1/a_n$ e $1/n!$ essendo a_n la successione di Fibonacci.

22.8 Sulla rapidissima crescita del fattoriale

Il fattoriale va all'infinito

$$\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$$

rapidamente, perfino più dell'esponenziale, e per $n \geq 25$ supera 10^n.

(La rapidissima crescita del fattoriale ha profonde implicazioni combinatorie, probabilistiche, e in Analisi Matematica).

22.9 Il Modello Malthusiano

La popolazione – di microbi o quant'altro – si espande nel tempo scandito da n, proporzionalmente alla sua numerosità (detto semplificatamente: a molti microbi seguono quegli stessi microbi più molti figli di microbi, proporzionalmente al tasso di accrescimento):

$$a_{n+1} := a_n + c \cdot a_n \qquad a_0 := \text{popolazione iniziale}$$

con c il *tasso di accrescimento*. Ecco per esempio il caso $c := 2$:

$$a_0,\ 3\,a_0,\ 9\,a_0,\ 27\,a_0...$$

per esempio con $a_0 := 1000$

$$1\,000, 3\,000, 9\,000, 27\,000...$$

Si può dimostrare che la successione a_n ammette una rappresentazione *in forma chiusa*

$$a_n = (c+1)^n\, a_0$$

(che è funzione "di tipo esponenziale", in inglese si parla di *exponential functions*) e se $c > 0$ si ha un vero e proprio accrescimento verso $+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \qquad \text{se } c > 0$$

e il senso del limite $+\infty$ è quello prima detto.
Invece se $-1 < c < 0$ il comportamento è molto diverso, per esempio con $c := -\frac{1}{2}$ abbiamo i valori

$$a_0,\ \frac{1}{2}a_0,\ \frac{1}{4}a_0,\ \frac{1}{8}a_0 \dots$$

Ci *sembra*, ed è vero e si potrebbe dimostrare (quando si definisce come più sotto), che a_n *tende a 0 per n che tende all'infinito*:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0\,.$$

e il senso del limite 0 è quello prima detto per L, numero.

Si provi con stessa successione del Modello Malthusiano a scrivere i primi 7

valori numerici con $a_0 := 100\,000$, prima con $c := -0.3$ e poi con $c := 0.3$.

E ovviamente con $c := 0$ abbiamo un equilibrio fra nati e morti ovvero tasso di accrescimento nullo e in quel caso la popolazione resta costante:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a_0 \qquad \text{se } c = 0.$$

Nota sull'accrescimento di Fibonacci o Malthus. Una popolazione microbica o altra, che si espandesse con quelle leggi, tenderebbe ad un'espansione infinita; nella realtà ad un certo punto interverranno meccanismi che di fatto sospenderanno la validità della legge di Malthus o di Fibonacci nel rappresentare la numerostà della popolazione. Questo avviene, se non altro, perché gli organismi da un certo punto in poi inevitabilmente si ostacolano a vicenda in modo significativo, anche per mancanza di spazio.
Così, piuttosto che tendere all'infinito esponenzialmente, ad un certo punto l'accrescimento in generale rallenterà, producendo un tratto di sigmoide. Ed eventualmente poi decrescerà, fino ad estinguersi o quasi, producendo un grafico piò meno a campana: si veda la figura a questo link->.

22.10 Serie geometrica di ragione fra 0 e 1

Le *serie* possono essere viste come una sorta di “somma infinita", ottenuta come limite delle somme finite iniziali.

Ci interessa, per $a, r \in \mathbb{R}$, il limite di questa successione numerica:

$$
\begin{aligned}
&a \\
&a + a\,r \\
&a + a\,r + a\,r^2 \\
&a + a\,r + a\,r^2 + a\,r^3 \\
&\ldots \\
&a + a\,r + a\,r^2 + a\,r^3 + \ldots + a\,r^k
\end{aligned}
$$

che definisce la **serie geometrica** di *ragione* r (mentre a potremmo chiamarlo “fattore moltiplicativo").

Ci occuperemo approfonditamente della sola *serie geometrica di ragione r compresa fra 0 e 1 esclusi*, che ricorre ampiamente nel Calcolo delle Probabilità:

$$
\boxed{\begin{aligned}
&a + a\,r + a\,r^2 + \ldots + a\,r^k + \ldots = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} a\,r^k = \frac{a}{1-r} \\
&a \in \mathbb{R} \\
&0 < r < 1
\end{aligned}} \tag{72}
$$

(La formula vale anche per $-1 < r < 1$ ma ci interessano solo i valori $0 < r < 1$, e poi il caso $r = 0$ è ovvio).
Nel Calcolo delle Probabilità è sempre $a > 0$, e comunque questo è il caso più significativo in tutto l’ambito Farmaceutico e Biomedico.

Esempio.

$$3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{3}{2^k} + \ldots \text{ ovvero } \sum_{k=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^k \tag{73}$$

è una (particolare) *serie geometrica* di *ragione* $\frac{1}{2}$. E in base alla (72) con $a = 3$ (la sua somma) vale

$$\frac{3}{1-1/2}$$

cioè 6.

ESERCIZIO$_{\mu 2025}$ $\star$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 0.\bar{3}^n$$

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard del punto decimale.

È una serie geometrica

$$a + a\,r + a\,r^2 + \ldots + a\,r^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a\,r^n$$

di ragione $r = 0.\bar{3}$ che è un numero fra 0 e 1 esclusi

$$0 < r < 1$$

(o, più in generale e con le stesse conseguenze, $-1 < r < 1$) con $a = 1$ e allora è convergente con somma

$$\frac{a}{1-r} =$$

$$= \frac{1}{1-0.\bar{3}} =$$

che è il cercato risultato esatto, molto malamente espresso. (Ma è già qualcosa). Ora ricordiamo che $0.\bar{3}$ ovvero 0.3333... è $\frac{1}{3}$ e continuiamo

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{2}{3}} =$$

$$\boxed{\frac{3}{2}}$$

ovvero meglio, visto che il quesito è espresso con la scrittura decimale e non quella frazionaria,

$$\boxed{1.5}$$

Complementi

22.11 Complementi – Problema aperto: Collatz

Dato un qualsiasi numero intero $n > 1$, considera la seguente successione:
Se n è pari, allora dividilo per 2.
Se n è dispari, allora moltiplicalo per 3 e aggiungi 1.
Ripeti questo processo indefinitamente per ogni nuovo valore di n.
Si arriverà sempre al numero 1 prima o poi?
Nota. La *Congettura di Collatz* risponde sì, ma non si ancora.

22.12 Complementi – Problema aperto: Feigenbaum

Una complessa costruzione analitica definisce una successione che numericamente, col computer, si vede tendere al numero

$$\delta = 4.6692...$$

detto costante di Feigenbaum, che ricorre ampiamente nelle Scienze, in particolare nelle Teorie del Caos e dei Frattali. Tuttavia, non si è ancora trovata una forma chiusa per quel numero, che attualmente può solo calcolarsi sperimentalmente, per così dire, e potrebbe racchiudere misteri notevoli della Matematica.

22.13 Complementi – Esperienza pratica coi limiti

Si provi con la calcolatrice a fare la radice quadrata di un numero positivo scelto a piacere, poi a fare la radice quadrata del risultato, e così via: a quale limite tende la successione dei valori?

22.14 Complementi – 4 tipi di definizioni di successioni

Semplificando al massimo, le successioni di possibile interesse Farmaceutico e Biomedico hanno definizioni di 4 tipi che ora vedremo con riferimento al loro eventuale limite.

Esempio del tipo I: successioni ricorrenti. Consideriamo ora la successione a_n di Fibonacci, a suo tempo definita per ricorrenza:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...$$

Ci sembra, ed è vero e si potrebbe dimostrare, che i valori supereranno qualunque soglia, crescendo indefinitamente. Scriveremo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad (a_n \text{ successione di Fibonacci})$$

e il senso del limite $+\infty$ è

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\, M)\,(\exists\, \bar{n})\; n > \bar{n} \Rightarrow a_n > M.$$

Consideriamo ora lo spazio b_n che ha a disposizione ogni microbo nel volume iniziale fisso, diciamolo 1 in qualche opportuna unità di misura, per esempio il centimetro cubo, il pollice cubo, o una unità di misura da noi inventata in modo che valga proprio 1:

$$b_n := \frac{1}{a_n}$$

I valori sono

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{13} \dots \quad (a_n \text{ successione di Fibonacci})$$

Ci *sembra*, ed è vero e si potrebbe dimostrare (quando si definisce come più sotto), che b_n *tende a 0 per n che tende all'infinito*:

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 0\,.$$

Più in generale si dà il caso, con altra successione y_n, e $L \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = L \qquad \text{(o invece di n, qualunque variabile, p. es. } k\text{)}.$$

Il significato è di un indefinito avvicinamento, con o senza raggiungimento del limite L. Più precisamente

$$(\forall\, \varepsilon > 0)\,(\exists\, \bar{n})\; n > \bar{n} \Rightarrow |y_n - L| < \varepsilon\,.$$

Cioè, fissato un numer(ett)o positivo, chiamiamolo ε, da un certo punto in poi y_n dista dal limite meno di ε.

Esempio del tipo II: successioni definite "coi puntini". Il fattoriale

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

assume i valori

$$1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040 \ldots$$

Si ha

$$\forall\, n > 0 \qquad n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \geq n$$

e già n tende a $+\infty$, e allora anche $n!$ che come appena visto gli sta sopra:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty} \tag{74}$$

e il senso del limite $+\infty$ è quello sopra esposto, valido per qualunque successione.
(Il fattoriale ricorre ampiamente nel Calcolo Combinatorio, nel Calcolo delle Probabilità, nelle Serie Numeriche...).
Naturalmente altre successioni definite coi puntini tendono ad altri valori, per esempio

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1 + 2 + \ldots + n} = 0$$

com'è ovvio.

Esempio 1 del tipo III: successioni con $(-1)^n$. La successione $(-1)^n$ ha i valori

$$+1, -1, +1, -1, +1 \ldots$$

e non esiste il limite:

$$\boxed{\nexists \lim_{n\to+\infty} (-1)^n} \tag{75}$$

Questa successione consente nella programmazione informatica – per esempio con l'onnipresente in campo commerciale e scientifico Excel – di distinguere i numeri pari dai numeri dispari. (Esistono anche altri modi). In particolare

$$\frac{3 + (-1)^n}{2}$$

produce, a partire da $n := 1$, i valori

$$1, 2, 1, 2, 1, 2, 1...$$

che può consentire per esempio di produrre i turni in farmacia di Aldo e Bianca nei vari giorni dell'anno, alternandoli secondo il numero ordinale del giorno (per esempio al 1 febbraio corrisponde il numero 32, pari: lavora Bianca). Oppure per programmare con un software l'apertura automatizzata di sportellini 1 e 2, a giorni alterni, in un allevamento di animaletti.

Esempio informatico. Si consideri il display ai LED programmabile della farmacia *Al Cuore Vispo* che dispone della funzione

```
ordinalNumberOfDay
```

e vuole esporre a giorni alterni i messaggi

```
STRING(1):=Buongiorno, allegro ti sia il giorno!
STRING(2):=I nostri clienti campano cent'anni!
```

Ciò si potrà ottenere programmando qualcosa come

```
display(STRING((3+(-1)^ordinalNumberOfDay)/2))
```

Esempio 2 del tipo III: successioni con $(-1)^n$. La successione $(-1)^n \cdot n$ ha i valori

$$+1, -1, +2, -3, +4, -5, +6, -7, +8, -9, +10...$$

e alcuni Autori dicono che va a ∞, l'infinito senza segno, ma in questa trattazione elementare diremo invece che il limite non esiste

$$\nexists \lim_{n \to +\infty} (-1)^n \cdot n$$

e similmente per successioni che oscillano senza “assestarsi".

Esempio 3 del tipo III: successioni con $(-1)^n$. La successione $\frac{(-1)^n}{10^n}$ ha i valori, per $n \geq 1$,

$$-0.1, +0.01, -0.001, +0.0001...$$

e si capisce bene che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0.$$

Similmente

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$$

e similmente il limite è 0 se il numeratore è *limitato* (cioè si mantiene fra 2 numeri), e il denominatore $\to +\infty$.

Successioni del tipo IV: prolungabili ai numeri reali. Per successioni come

$$a_n := \frac{1}{n} \qquad b_n := 2^{-n} \qquad c_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

che potrebbero essere prolungate ovvero “estese" ai numeri reali

$$\alpha(x) := \frac{1}{x} \qquad \beta(x) := 2^{-x} \qquad \gamma(x) := \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$$

(si noti che ciò non si può fare banalmente per i tipi I, II e III) il limite a $+\infty$ sarà trattato nella prossima lezione; per quanto sia già ora ovvio, in base a tutta la trattazione svolta, che

$$\lim_{n \to +\infty} 2^{-n} = 0 \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Invece il limite di c_n e di $\gamma(x)$ non è ovvio per niente, e lo vedremo.

22.15 Complementi – Applicazione probabilistica

Seppure il Calcolo delle Probabilità lo tratteremo in seguito, ritenendo noto qualche concetto dagli studi scolastici vediamo un esempio di applicazione della serie geometrica, per mostrarne l'utilità.

ESCERCIZIO$_{\mu 2018\neq}$

$\star \approx$ $^{\%}$ Una certa affezione, quando insorge ha una durata in giorni (interi) con probabilità

$\frac{1}{2}$ probabilità di durare 1 giorno
$\frac{1}{4}$ probabilità di durare 2 giorni
$\frac{1}{8}$ probabilità di durare 3 giorni
...
$\frac{1}{2^n}$ probabilità di durare n giorni.

(Che si chiama *densità geometrica iniziante da 1 di parametro* $\frac{1}{2}$).
Qual è la probabilità che duri un numero pari di giorni?

Svolgimento

Detta X la durata dell'affezione, scriviamo (usando la notazione delle variabili aleatorie, che tratteremo in seguito, ma che comunque qua appare di interpretazione ovvia)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \dots & n \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \dots & \frac{1}{2^n} \dots \end{pmatrix}$$

$$P(X\, pari) = P(X \in \{2, 4, 6 \dots\}) =$$

$$= P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + \dots =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$$

che si riconosce esser serie geometrica di ragione $r = \frac{1}{4}$ (perché ogni termine è pari al precedente moltiplicato per $\frac{1}{4}$)

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n + \dots$$

con anche $a = \frac{1}{4}$ e allora somma

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} =$$

$$\boxed{\frac{1}{3} \approx 0.333 = 33.3\%}$$

(Si noti che allora è più probabile che duri un numero dispari di giorni. Questo rimane vero con qualunque valore di $p \in]0,1[$, non solo $\frac{1}{2}$, e perfino con qualunque densità decrescente definita su 1,2,3... A Trieste si dice che il vento bora tende a durare un numero dispari di giorni).

22.16 Complementi – Tecnicismi sui limiti di funzioni

Ci occupiamo del comportamento di una funzione $f(x)$

$$f : I \to \mathbb{R}$$

essendo I

intervallo (p.es. $]a, b[$ o $[a, b[$ con eventualmente b infinito) oppure unione finita di intervalli (per esempio l'unione di $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$) oppure

unione infinita non troppo "capricciosa" di intervalli (per esempio $\operatorname{dom}\tan x$)

quando $x \to +\infty$, com'era nelle successioni, oppure

$x \to -\infty$ oppure

$x \to x_0 \in \mathbb{R}$, cioè un "numero finito":

$$\lim_{x \to_{qualcosa}} f(x)$$

Esempi.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{10}{x} = 0 \qquad \text{esempio termodinamico: } V = \frac{cost}{p} \text{ (isoterma)}$$

al tendere all'infinito della pressione il volume andrebbe a 0, se il gas restasse ideale.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{10}{x} = +\infty \qquad \text{esempio termodinamico: } p = \frac{cost}{V} \text{ (isoterma)}$$

al tendere a 0 del volume la pressione andrebbe all'infinito, se il gas restasse ideale.

La scrittura $x \to x_0^+$, qua sopra, significa che x tende a 0 da destra ovvero da valori maggiori di x_0. E similmente esiste $x \to x_0^-$.

22.17 I limiti più significativi

Dai grafici – e per tutte esisterebbe una vera dimostrazione – apprendiamo questi:

$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ e similmente	$x^1, x^3 ... x^\alpha$ *con* $\alpha > 0, \sqrt{x}, \sqrt[n]{x}$
$\lim_{x\to+\infty} 10^x = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
$\lim_{x\to+\infty} b^x = +\infty, \qquad b > 1$	e 0 se $0 < b < 1$
$\lim_{x\to+\infty} \lg x = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
$\lim_{x\to 0} \lg x = -\infty$	$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$ (0^+ in effetti)
$\nexists \lim_{x\to+\infty} \sin x$	similmente cos, tan

(76)

e questi altri

$$\begin{array}{ll}
\lim_{x\to-\infty} 10^x = 0 & \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0 \\
\lim_{x\to-\infty} b^x = 0, \quad b > 1 \text{ e } +\infty \text{ se } 0 < b < 1 & \\
\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty & \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\
\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} & \lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \\
\lim_{x\to-\infty} x^{dispari\,positivo} = -\infty & \lim_{x\to-\infty} \sqrt[dispari\,positivo]{x} = -\infty
\end{array} \tag{77}$$

Esempio 1. Guardando il grafico, per la campana gaussiana vale

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\,\pi}} = 0$$

e similmente per $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\,\pi}} = 0$$

e scriveremo i 2 limiti insieme in questo modo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\,\pi}} = 0$$

Esempio 2. La concentrazione del piombo nelle ossa

$$u(t) = u_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t} \quad \text{essendo } u_0 = u(0)$$

al tendere del tempo t all'infinito:

$$\lim_{t\to+\infty} u_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t} =$$

per proprietà delle potenze

$$= \lim_{t\to+\infty} u_0 \cdot \left(\left(e^{\ln 2}\right)^{-1}\right)^{\frac{t}{10\,anni}} =$$

per proprietà dei logaritmi

$$= \lim_{t\to+\infty} u_0 \cdot \left(2^{-1}\right)^{\frac{t}{10\,anni}} =$$

per definizione della potenza con esponente intero negativo

$$= \lim_{t\to+\infty} u_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10\,anni}} =$$

ed essendo la base fra 0 e 1 esclusi, e l'esponente va a $+\infty$,

$$= 0$$

Cioè la concentrazione va a 0 al tendere del tempo t all'infinito.

22.18 Limiti verso un numero finito, e continuità

Consideriamo il limite di f per $x \to x_0$ con $x_0 \in \mathbb{R}$, anche distinguendo x_0^+ e x_0^-, e ci sono 2 casi:
⋄ $x_0 \notin \text{dom} f$, p. es. $\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
⋄ $x_0 \in \text{dom} f$ e ci sono 2 sottocasi:

$$\boxed{\bullet \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \ : \ \text{la funzione si dice continua}} \qquad (78)$$

e si noti che

$$\boxed{\text{le funzioni elementari sono continue nei loro domini}} \tag{79}$$

e allora per esse sempre limite = valore calcolato, per esempio

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$$

- $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$: la f si dice discontinua in x_0 e questo può essere con funzioni non elementari come $\operatorname{sgn}(x)$ e $\lfloor x \rfloor$.

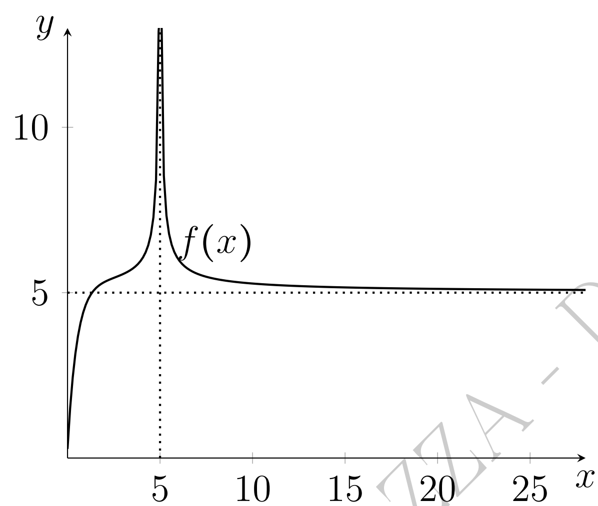
Allora per le funzioni elementari sono significativi solo i limiti dove la funzione "smette di esistere": gli estremi, finiti o no, degli intervalli che compongono il dominio, non appartenenti ad esso:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \text{ [forma 0 su 0] } \lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}} \text{ [funzione elementare, limite=valore] } = \frac{1}{2}\,.$$

ESERCIZIO$_{\mu 2025}$ (R) Dire quanto vale il sottostante limite, e ovviamente si supponga che la funzione non faccia strani capricci nella regione illimitata del piano cartesiano che non è rappresentata nel disegno, ovvero che il disegno del grafico mostri qual è sostanzialmente il comportamento della funzione:

$$\lim_{x \to 5} f(x)$$



$$\boxed{+\infty}$$

Nota. Si intuisce – supponendo che il disegno del grafico mostri qual è sostanzialmente il comportamento della funzione, escludendo strani capricci della funzione non rappresentati dal disegno del grafico – che la funzione tende a valori indefinitamente grandi all' avvicinarsi di x al valore 5.

22.19 Funzioni limitate, infinite, infinitesime

Si dice *limitata* una f tale che esistono 2 numeri M e N tali che $M < f(x) < N$, per esempio $\sin x$. Limitata $\not\Rightarrow \exists$ limite.

Si dice *infinita* una funzione che tende a $+\infty$ o $-\infty$ e *infinitesima* una che tende a 0 (per $x \to u_0$ finito o no).
Per esempio sono infinite per $x \to +\infty$ le b^x con $b > 1$, e infinitesime per $0 < b < 1$; viceversa per $x \to -\infty$. Infinite le $\log_b x$ per $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$.

22.20 Complementi – Teoremi algebrici sui limiti

Tutti questi teoremi algebrici sui limiti valgono anche per le successioni, e per buona chiarezza sarebbe meglio riscriverli con n al posto di x.
Naturalmente nel caso delle successioni n può tendere solo a $+\infty$ mentre nel caso delle funzioni la x può tendere a $+\infty$, $-\infty$ oppure a un numero.

Risolveremo i limiti un po' in modo intuitivo, come abbiamo già ampiamente fatto, anche guardando il grafico, e anche esaminando "a pezzetti" le espressioni delle funzioni; in questa trattazione elementare non possiamo fare una teoria dei limiti molto approfondita. Tuttavia qua formalizziamo alcune "regole" di calcolo dei limiti, che in parte abbiamo già usato.

Con le definizioni dei limiti (con ε, M...) si dimostra che:

(a)	$L_1, L_2 \in \mathbb{R}:$	*tende a* L_1+ $+$*tende a* $L_2 \to L_1 + L_2$	(*p.es* $\frac{1}{x} + \arctan x$ *per* $x \to +\infty$)
(b)	$L_1, L_2 \in \mathbb{R}:$	*tende a* $L_1\cdot$ $\cdot$*tende a* $L_2 \to L_1 \cdot L_2$	(*p.es* $\frac{1}{x} \arctan x$ *per* $x \to +\infty$)
(c)	$L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}:$	$\frac{1}{\textit{tende a } L} \to \frac{1}{L}$	(*p.es.* $1/\arctan x$ *per* $x \to +\infty$)

(80)

Per quanto gli infiniti non siano numeri e le espressioni seguenti siano scorrette matematicamente, valgono come mnemonici:

(a)		$+\infty + \infty \to +\infty$	(*p.es.* $x^3 + e^x$	*per* $x \to +\infty$)
(b)		$+\infty \cdot (+\infty) \to +\infty$	(*p.es.* $x^3 e^x$	*per* $x \to +\infty$)
(c)	$L \in \mathbb{R}:$	$+\infty + L \to +\infty$	(*p.es.* $x^2 + \arctan x$	*per* $x \to +\infty$)
(d)	$L \in \mathbb{R}^+:$	$+\infty \cdot L \to +\infty$	(*p.es.* $x^3 \arctan x$	*per* $x \to +\infty$)
(d)	$-L \in \mathbb{R}^+:$	$+\infty \cdot L \to -\infty$	(*p.es.* $-2x^3$	*per* $x \to +\infty$)
(e)		$\frac{1}{+\infty} \to 0$	(*p.es.* $1/x^3$	*per* $x \to +\infty$)
(f)		*limitata* $+ (+\infty) \to +\infty$	(*p.es.* $\sin x + x^3$	*per* $x \to +\infty$)
(g)		$\frac{\textit{limitata}}{+\infty} \to 0$	(*p.es.* $\sin x / x^3$	*per* $x \to +\infty$)

(81)

E anche:

- reciproca d'infinitesima > 0, $\to +\infty$, p.es. $\lim_{x\to\pi^-} \frac{1}{\sin x} = +\infty$
- reciproca d'infinitesima < 0, $\to -\infty$, p.es. $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\ln x} = -\infty$

Esempio: logistica. Consideriamo il caso ultra-semplificato:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-t}} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{e^t}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Una forma più generale dà, con costanti positive K, q, r,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{K}{1+q\,e^{-r\,t}} = K$$

(Si veda Wikipedia alla voce *Equazione logistica*).

22.21 Complementi – Forme di indecisione dei limiti

Restano fuori queste **forme di indecisione**, da risolvere caso per caso: $+\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, ∞^0, 1^∞, 0^0. Si veda nella sezione di Complementi.

Note. Tutte le funzioni considerate in questa lezione sono definite in singoletti o intervalli o unione (finita o non troppo "capricciosa" se infinita) di singoletti e/o intervalli.
I singoletti non hanno rilevanza per quanto riguarda i limiti.
Sono significativi solo gli intervalli del dominio delle funzioni.
Per esempio la funzione $\frac{1}{x}$ è definita nell'unione dei 2 intervalli $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$. Considereremo i limiti a quegli estremi: $-\infty$, 0^-, 0^+, $+\infty$.

Similmente consideremo quei 4 limiti, e soprattutto quelli a 0^+ e $+\infty$, per

$$\frac{1}{x^2}$$

Questa sopra è una funzione che ricorre ampiamente in Fisica, per esempio l'attrazione fra 2 cariche di segno opposto è([139])

$$F = C\,\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

essendo q_1 e q_2 i valori, senza segno, delle 2 cariche, ovvero come funzione della sola distanza (cioè per cariche fissate)

$$F(r) = C \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \frac{1}{r^2}$$

(E dal punto di vista fisico è significativa solo per $r > 0$). Si ha

$$\lim_{r\to+\infty} C \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \frac{1}{r^2} = 0 \quad \text{forza nulla a distanza infinita}$$

$$\lim_{r\to 0^+} C \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \frac{1}{r^2} = +\infty \quad \text{forza infinita a distanza nulla}$$

Nota. Con la teoria svolta, lo studente volonteroso potrà risolvere questi esercizi. Per $x\sqrt[3]{x}$, $\log_2|2^x - 1|$, $\ln|x|$, $\sin 2^x$, $\cos \pi x$,

$$\frac{x^3 - 8}{x^2 - 2x},\ \frac{4 + 3x - x^2}{x^2 - 2x - 8} \text{ questi 8 limiti: } \lim_{x\to\pm\infty},\ \lim_{x\to-2^\pm},\ \lim_{x\to 0^\pm},\ \lim_{x\to 4^\pm}.$$

$$\text{Gli stessi 8 limiti per queste 3 funzioni: } \frac{2^x - 2^{-x}}{3^x \pm 3^{-x}},\quad \lg\left|1 - \frac{2}{x}\right|.$$

[139] In modulo, non vettorialmente.

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule *contemporaneamente* numerate *et* riquadrate, oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

Complementi

22.22 Complementi – Forme di indecisione dei limiti

Restano fuori queste **forme di indecisione**, da risolvere caso per caso: $+\infty-\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, ∞^0, 1^∞, 0^0. Per esempio

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^x-x)=\\&[=+\infty-\infty]\\&=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}-1\right)=\\&=[+\infty\cdot(+\infty)=]\\&=+\infty.\end{aligned}$$

22.23 Complementi – Limiti di successioni prolungabili

Di successioni come

$$\ln n \qquad 2^n$$

$$\varphi^n \qquad \left(1-\tfrac{1}{n}\right)^n$$

cioè prolungabili ovvero “estendibili" da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$, per il limite a $+\infty$ considereremo il corrispondente limite delle funzioni prolungate

$$\ln x \qquad 2^x$$

$$\varphi^x \qquad \left(1-\tfrac{1}{x}\right)^x$$

cioè considereremo il limite in $\mathbb{R}$, ottenendo lo stesso risultato perché (teorema) è

$$\text{se}\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=u \quad \text{allora} \quad \lim_{n\to+\infty}f(n)=u$$

Per esempio esiste un limite classico, di difficile dimostrazione matematica e ampia ricorrenza in Calcolo delle Probabilità,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

spesso detto, in una delle 2 forme soprascritte (Primo, oppure Secondo) Limite Fondamentale, e da esso con complicati calcoli segue

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

che ritroveremo, nella prima forma, in questioni di Farmacia.

Esempio 1.

$$\lim_{x\to+\infty}(7\,x^2 - x + 1) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(7-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) =$$

che per "grandi" x è il prodotto di un numero "grande" per un numero prossimo a 7

$$= +\infty.$$

Esempio 2.

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) =$$

prodotto di 2 numeri "grandi"

$$= +\infty$$

oppure $= x\,(1-\frac{1}{\sqrt{x}})$, prodotto di un numero "grande" per un numero prossimo a 1: in ogni caso il limite è $+\infty$.

Tutto ciò costituisce il *calcolo dei limiti*, che comunque può raggiungere più alti livelli di sottigliezza:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4-5x^3+6-\mathrm{e}\sqrt{x}}{3x^3-\frac{1}{x}-2x^4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^4}-\frac{\mathrm{e}}{x^3\sqrt{x}}}{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^5}-2} = -\frac{3}{2}\,.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4-5x^3+6-\mathrm{e}\sqrt{x}}{3x^3-\frac{1}{x}-2x^4} = \ldots = -\frac{3}{2}$$

Si dimostrano

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{10^x}{x} = +\infty$$

e in effetti $\lim_{x\to+\infty} \frac{b^x}{x} = +\infty \qquad b > 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg x}{x} = 0$$

e in effetti $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_b x}{x} = 0 \qquad 0 < b \neq 1.$