23 Derivate – I parte

23.1 Introduzione alle derivate

Molto operativamente, data una funzione numerica $f(x)$, se non è troppo capricciosa da essa si calcola una funzione DERIVATA $f'(x)$, che per ogni x ha il valore della pendenza m della tangente $y = m\,x + q$ al grafico nel punto $(x, f(x))$.

DERIVATA $f'(x)$ di $f(x)$ IN x
=
PENDENZA m DELLA TANGENTE AL GRAFICO DI $f(x)$
nel punto $(x, f(x))$

Anticipiamo un esempio chiarificatore.
La derivata di x^2 è $2\,x$; scriveremo $Dx^2 = 2\,x$; anche $(x^2)' = 2x$.
In 1 la $2\,x$ vale 2 che è la pendenza del grafico di x^2 in 1.
In -1 la $2\,x$ vale -2 che è la pendenza del grafico di x^2 in -1.
In 0 la $2\,x$ vale 0 che è la pendenza di x^2 in 0.
Per $x > 0$ la $2\,x$ è > 0 dal che là la x^2 cresce (in ogni punto).
Per $x < 0$ la $2\,x$ è < 0 dal che là la x^2 decresce (in ogni punto).

23.2 Esempio: derivata e retta tangente

x^2 ha derivata $2x$, che in 1, per esempio, vale 2, che è il coefficiente angolare della tangente di $y = x^2$ in $(1, 1)$.

Figura A — Funzione e dominio.
Contesto teorico. Consideriamo $f(x) = x^2$, continua e derivabile su $\mathbb{R}$. La derivata in un punto a è definita come

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

cioè il limite del rapporto incrementale (pendenza delle secanti) che fornisce la pendenza della **tangente** in $x = a$.

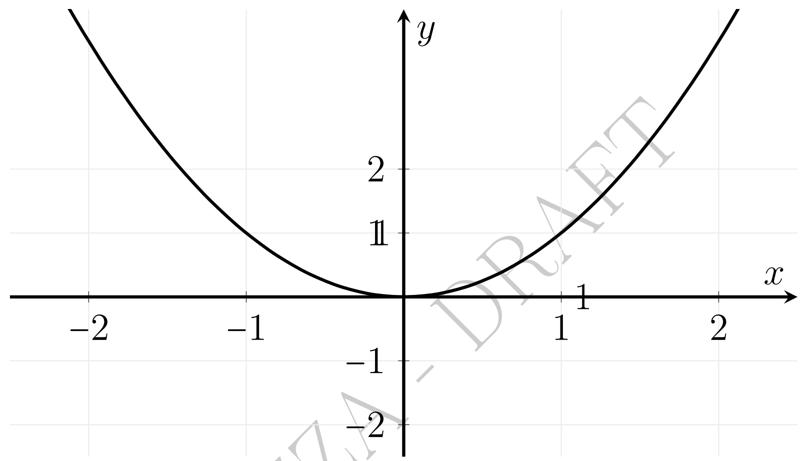


Figura B — Coordinate e "salita/corsa" (rise/run).
Contesto teorico. I punti $(1,1)$, $(1,0)$ e $(0,1)$ servono a fissare visivamente le unità di misura sugli assi. Il segmento verticale $(1,0) \leftrightarrow (1,1)$ rappresenta una *salita* unitaria; quello orizzontale $(0,1) \leftrightarrow (1,1)$ una *corsa* unitaria. Queste lunghezze elementari torneranno utili per interpretare il coefficiente angolare come $\Delta y / \Delta x$.

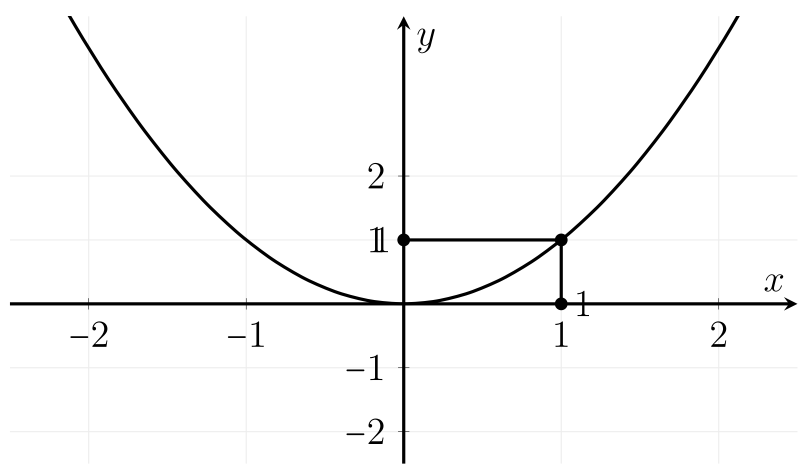


Figura C — La derivata come funzione: $f'(x) = 2x$.
Contesto teorico. Per $f(x) = x^2$ si calcola $f'(x) = 2x$. La derivata è essa stessa una funzione che ad ogni x associa la pendenza della tangente in quel punto. In particolare $f'(1) = 2$: la tangente in $(1, 1)$ avrà coefficiente angolare 2.

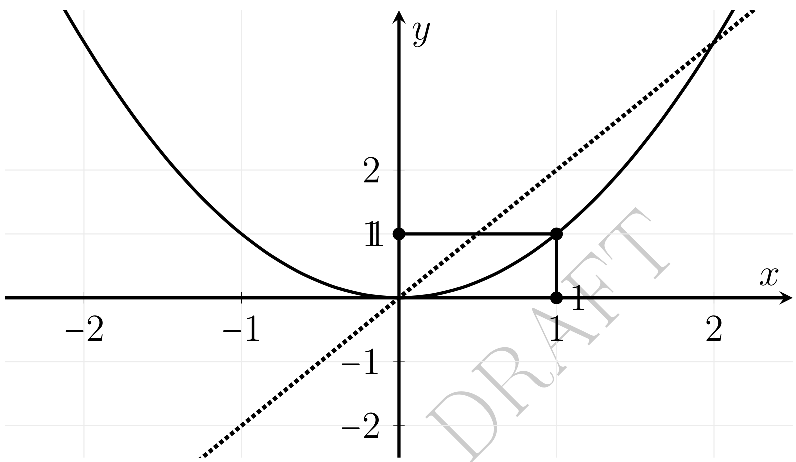


Figura D — Visualizzare il coefficiente angolare $m = 2$.
Contesto teorico. Il coefficiente angolare misura $\Delta y/\Delta x$. Con $\Delta x = 1$, una pendenza $m = 2$ significa $\Delta y = 2$. La retta orizzontale $y = 2$ e i punti $(0, 2)$, $(1, 2)$ aiutano a "leggere" sul reticolo una salita di 2 unità per una corsa di 1 unità attorno a $x = 1$.

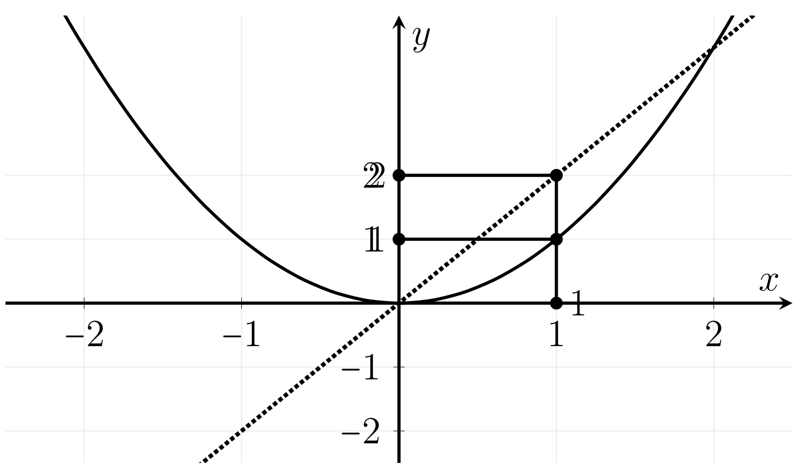
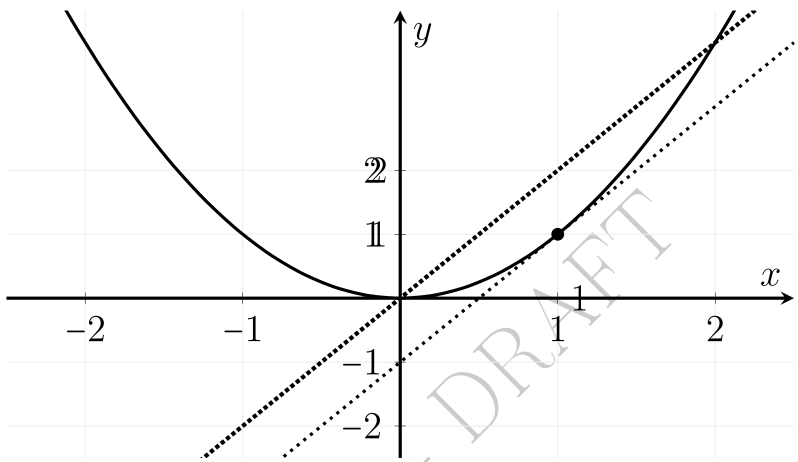


Figura E — Formula della tangente in $x = a$.
Contesto teorico. La **tangente** al grafico di f nel punto $x = a$ ha

equazione

$$y = f'(a)\,(x - a) + f(a).$$

Per $f(x) = x^2$ e $a = 1$ si ha $y = 2\,(x - 1) + 1 = 2x - 1$. La retta $y = 2x - 1$ è la tangente a $y = x^2$ in $(1, 1)$ e ha coefficiente angolare $f'(1) = 2$.



23.3 Notazioni per la derivata prima

Ecco le principali notazioni usate per la derivata prima di $f(x)$:

$$f'(x) \qquad D\,f(x) \qquad \frac{d}{d\,x}\,f(x) \qquad \dot{f}(x)$$

L'ultima è usata per derivata rispetto al tempo.

23.4 Derivate delle funzioni elementari reali

Tutte queste formule[140] valgono nell'intersezione dei domini della funzione derivanda e della funzione derivata. Per esempio $D\ln x = \frac{1}{x}$ vale solo per $x > 0$ sebbene $\frac{1}{x}$ esista anche per $x < 0$.

$$\boxed{\begin{array}{llcll}
\forall c & D\,c & = & 0 & \\
& D\,x & = & 1 & \\
& D\,x^n & = & n\,x^{n-1},\ n \text{ intero}, & \text{in particolare} \\
& & & & Dx^2 = 2x \text{ e } D\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \\
& D\,x^\alpha & = & \alpha\,x^{\alpha-1} \text{ con } x > 0 & \text{e } \alpha \text{ reale non intero,} \\
& & & \ \text{in particolare} & D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
& D\sin x & = & \cos x & \\
& D\cos x & = & -\sin x & \\
& D\arctan x & = & \frac{1}{1+x^2} & \\
& D\,\mathrm{e}^x & = & \mathrm{e}^x & \\
& D\,\ln x & = & \frac{1}{x} & \text{e vale anche } D\ln|x| = \frac{1}{x} \\
& D\,\Phi(x) & = & \phi(x) & \text{ma } \Phi(x) \text{ non è elementare.}
\end{array}} \tag{82}$$

La funzione $\Phi(x)$ verrà trattata in Calcolo delle Probabilità.

[140] Per lo studente interessato, ad un livello superiore si considerano anche:

$$\begin{array}{llcll}
& D\,10^x & = & \frac{10^x}{\lg \mathrm{e}} & \\
\forall a > 0 & D\,a^x & = & a^x \ln a & \\
& D\,\lg x & = & \frac{\lg \mathrm{e}}{x} & \text{e vale anche } D\lg|x| = \frac{\lg \mathrm{e}}{x} \\
\forall\, 0 < b \neq 1 & D\,\log_b x & = & \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln b} & \\
& D\tan x & = & \frac{1}{\cos^2 x} & = 1 + \tan^2 x \\
& D\,\mathrm{cotan}\, x & = & -\frac{1}{\sin^2 x} & = -1 - \mathrm{cotan}^2 x [= -\mathrm{cosec}^2\, x] \\
& D\arcsin x & = & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \\
& D\arccos x & = & -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \\
& D\sinh x & = & \cosh x & \\
& D\cosh x & = & \sinh x & \\
& D\tanh x & = & \frac{1}{\cosh^2 x} & [= 1 - \tanh^2 x = \mathrm{sech}^2\, x] \\
& D\,\mathrm{arsinh}\, x & = & \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} & \\
& D\,\mathrm{arcosh}\, x & = & \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} & \\
& D\,\mathrm{artanh}\, x & = & \frac{1}{1-x^2} & [= D\,\mathrm{arcoth}\, x] \\
& D\,|x| & = & \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x} & [= \mathrm{sgn}\, x,\ \forall\, x \neq 0]
\end{array}$$

23.5 Derivata in un punto e funzione derivata

In questa trattazione elementare considereremo solo le derivate delle funzioni reali di variabile reale.

Essenzialmente, la derivata $f'(x)$ di una funzione f in un punto x, è un numero oppure $+\infty$ o $-\infty$ che se esiste rappresenta la pendenza del grafico in $(x, f(x))$. E se non esiste vuol dire che in quel punto il grafico non ammette retta tangente, per qualche sorta di sua non liscezza. La derivata positiva o $+\infty$ corrisponde (con precisazioni che faremo) alla crescenza di f nel punto x e quella negativa o $-\infty$ alla decrescenza.

Al variare di x nel dominio di f si ottiene una funzione $f'(x)$ ovvero $Df(x)$ che si chiama [funzione] derivata.

La derivata $f'(x)$ in un punto x uguaglia contemporaneamente,
— se finita:

• il coefficiente angolare m della retta tangente in $(x, f(x))$

• la tangente (goniometrica) $\tan\alpha$ dell'angolo della (retta) tangente con l'asse x:

$$\tan\alpha = f'(x) = m$$

— e sia se finita che infinita:

• questo limite, che usualmente viene preso per definirla:

$$f'(x) := \lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \quad ovvero \quad := \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

per ogni x per cui i limiti (equivalenti) esistono, anche se infiniti. (Questa è la definizione della derivata intesa come valore).

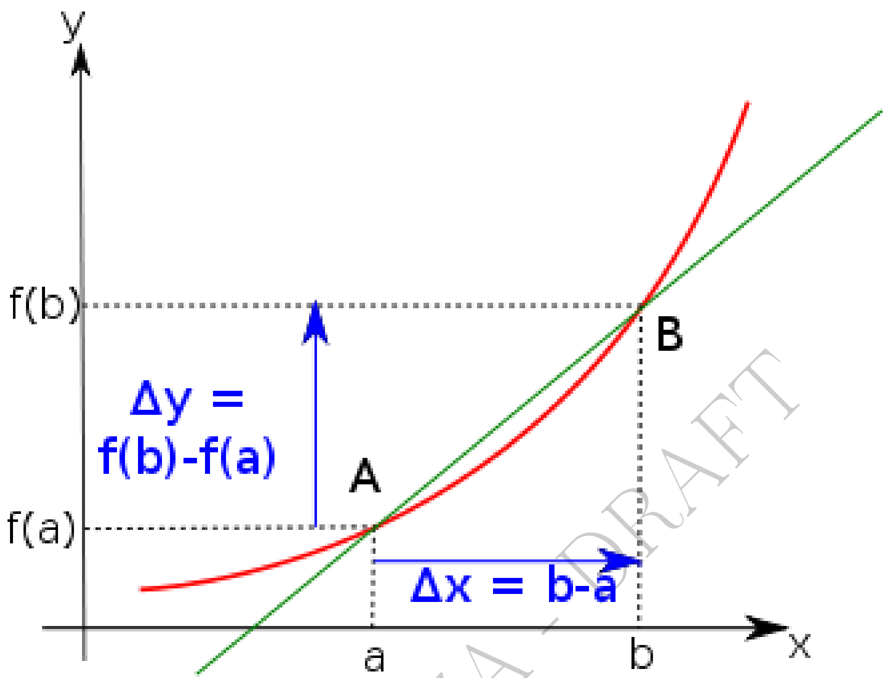


Figure 35: By Xzapro4 (2009), in Wikimedia Commons

La *funzione* derivata ha la stessa definizione ma solo per ogni x per cui i limiti esistono *finiti*.

L'argomento del secondo limite qua sopra si chiama *rapporto incrementale* di f in x.

(La maggioranza dei testi, trattando più separatamente le derivate come numero e come funzione, per il primo caso scrive $f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ovvero $:= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, derivata in x_0).

Si dimostra (teorema) che se in $(x, f(x))$ esiste la tangente al grafico essa forma con l'asse x un angolo orientato α tale che $\tan \alpha = f'(x)$.
Da ciò segue, lasciando per adesso all'intuizione il significato di funzione crescente o decrescente in un punto, che

$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ **crescente** in x_0

$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ decrescente in x_0

(si tratta della crescenza e decrescenza **puntuali**, non quelle globali del paragrafo 6.6) e lasciando per adesso all'intuizione il significato di funzione “liscia" e di punto di massimo relativo e di minimo relativo

x_0 punto di massimo relativo di funzione liscia $\Rightarrow\ f'(x_0) = 0$
x_0 punto di minimo relativo di funzione liscia $\Rightarrow\ f'(x_0) = 0$

La derivata di $f'(x)$ è la *derivata seconda* $f''(x)$ o $f^{(2)}(x)$ eccetera.

Lasciando all'intuizione il significato di *concavità di una funzione*

fz liscia con $f''(x) > 0$ su un intervallo $\Rightarrow$ concavità verso l'alto
fz liscia con $f''(x) < 0$ su un intervallo $\Rightarrow$ concavità verso il basso

Detto flesso un punto in cui si inverte la concavità, com'è l'origine per x^3,

x_0 punto di flesso di funzione liscia $\Rightarrow\ f''(x_0) = 0$

infatti la derivata seconda di x^3 si vedrà esser $6\,x$ che in 0 è 0.

Esempi.
Si trova facilmente che la derivata di $|x|$ è $\frac{x}{|x|}$ corrispondentemente all'inesistenza della tangente al grafico in 0 (ovvero, in $(0,0)$).

La funzione $\sqrt[3]{x}$ ha derivata $+\infty$ in 0, e corrispondentemente in $(0,0)$ il grafico ha tangente verticale.

Nota. Dopo $Dx^2 = 2\,x$, che lo studente è invitato a calcolare col limite del rapporto incrementale, non calcoleremo più le derivate col limite del rapporto incrementale: ciò è già stato([141]) fatto, secoli fa: oggi usiamo tabelle e regole di derivazione.

23.6 Epidemie, curve sigmoidi, a campana, derivata

Le curve sigmoidi e le curve a campana , che così bene modellizzano in un'epidemia il numero cumulativo di morti e rispettivamente il numero di morti giornaliero, sono strettamente legate fra loro dalla derivata. Detto ultrasemplificatamente,
la derivata di una curva sigmoide è una curva a campana
(affermazione che per essere matematicamente rigorosa richiederebbe varie ipotesi aggiuntive).

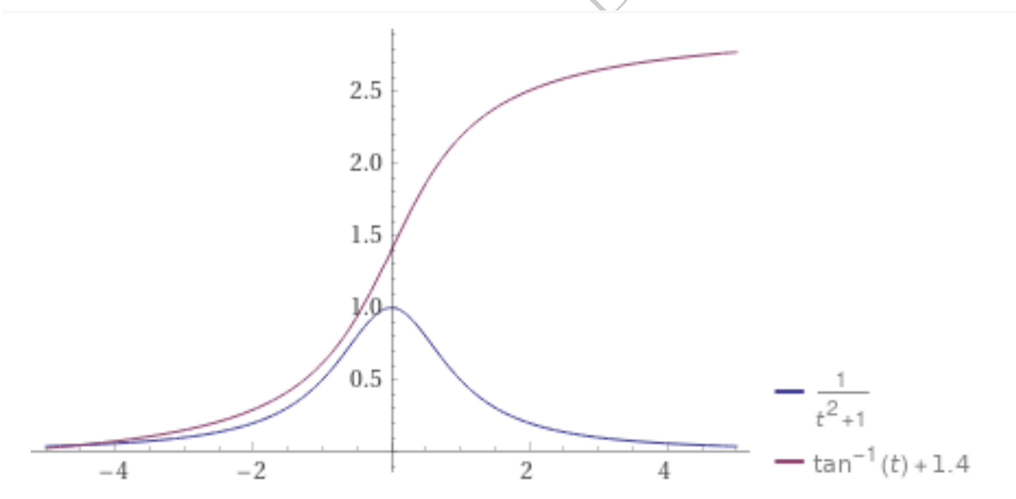


Figure 36: Una curva sigmoide e la sua derivata a campana (WolframAlpha)

In una curva sigmoide sufficientemente regolare riconosciamo:

crescita sempre più rapida, con la *concavità* verso l'alto	$f'(x) > 0$	$f''(x) > 0$
flesso	$f'(x_0) > 0$	$f''(x_0) = 0$
crescita sempre più lenta, con la *concavità* verso il basso	$f'(x) > 0$	$f''(x) < 0$

In una curva a campana sufficientemente regolare riconosciamo:

[141] per le funzioni base di utilità pratica in Farmacia, non per tutte le funzioni, che sono infinite.

crescita sempre più rapida, con la *concavità* verso l'alto	$f'(x) > 0$	$f''(x) > 0$
flesso	$f'(x_1) > 0$	$f''(x_1) = 0$
crescita sempre più lenta, con la *concavità* verso il basso	$f'(x) > 0$	$f''(x) < 0$
la fz raggiunge un max (ordinata) in un punto di max (ascissa)	$f'(x) = 0$	$f''(x) < 0$
di decrescita sempre più rapida, con *concavità* verso il basso	$f'(x) < 0$	$f''(x) < 0$
flesso	$f'(x_2) < 0$	$f''(x_2) = 0$
decrescita sempre più lenta, con *concavità* verso l'alto	$f'(x) < 0$	$f''(x) > 0$

Complementi

Esercizio$_{\mu 2023}$ ≈ Calcolare un'approssimazione della derivata di $\lfloor x \rfloor^x$ (che è definita con la parte intera) in 2.5 con la formula approssimata

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad h \ll \text{ (cioè molto piccolo)}$$

(approssimazione della formula esatta, col limite, $f'(x) \coloneqq \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$) usando il valore $h \coloneqq 0.25 = \frac{1}{4}$ (che non può essere considerato "molto piccolo" in assoluto ma in questo caso garantisce un'approssimazione entro il 10%).
Nell sovolgimento si potrebbe incontrare il numero $2^{2.5}$ che ovviamente è
$2^2 \cdot 2^{0.5} = 4\sqrt{2}$ (oppure equivalentemente $2^{5/2} = \sqrt{2^5} = \sqrt{32}$).

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard del punto decimale.

Con i valori dati $x = 2.5$ e $h = 0.25$

$$f'(2.5) \approx \frac{f(2.5 + 0.25) - f(2.5)}{0.25} =$$

$$= \frac{f(2.75) - f(2.5)}{0.25} =$$

con la funzione data $f(x) \coloneqq \lfloor x \rfloor^x$

$$= \frac{\lfloor 2.75 \rfloor^{2.75} - \lfloor 2.5 \rfloor^{2.5}}{0.25} =$$

e con la parte intera (che ai numeri positivi "toglie i decimali")

$$= \frac{2^{2.75} - 2^{2.5}}{0.25} =$$

per le proprietà delle potenze

$$= \frac{2^{2.5}\,(2^{0.25} - 1)}{0.25} =$$

ricordando, come è ovvio e anche ci viene detto nel quesito, che $0.25 = \frac{1}{4}$,

$$= \frac{2^{2.5}\,(2^{\frac{1}{4}} - 1)}{0.25} =$$

che per le proprietà delle potenze e delle radici, come anche ci viene detto nel quesito, è

$$= \frac{4\sqrt{2}\,(2^{\frac{1}{4}} - 1)}{0.25} =$$

per le proprietà delle radici riconosciamo una radice quarta

$$= \frac{4\sqrt{2}\,(\sqrt[4]{2} - 1)}{0.25} =$$

e con la nota formula di riduzione della radice quarta $\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}$

$$= \frac{4\sqrt{2}\,(\sqrt{\sqrt{2}} - 1)}{0.25} \approx$$

con una calcolatrice (dotata di radice quadrata)

$$\boxed{\approx 4.281}$$

$$\boxed{\approx 4.28}$$

$$\boxed{\approx 4.3}$$

(Il valore esatto è $2^{2.5}\ln 2 = 4\sqrt{2}\ln 2 \approx 3.921$).