24 Derivate – II parte

24.1 Regole per limiti finiti, e derivate

Sia il passaggio al limite nel caso di limiti finiti, sia la derivazione, "passano sopra" (linearità) alla somma, alla differenza, alla moltiplicazione per una costante; il passaggio al limite ma non la derivazione, anche al prodotto di funzioni.

$$(24-0)$$

Tutto ciò è esposto tecnicamente nelle 7 formule seguenti:

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) \qquad (f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) \qquad (f-g)'(x) = f'(x)-g'(x)$$

$$\lim_{x\to a}[k\,f(x)] = k\cdot\lim_{x\to a} f(x) \qquad (kf)'(x) = k\cdot f'(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)\,g(x)] = \Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big)\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big) \qquad ------$$

Derivazione di $f(k\,x)$, per esempio $D\sin(2\,x) = 2\,\cos(2\,x)$:

$$\boxed{(f(k\,x))' = k\,f'(k\,x)} \qquad (83)$$

Esistono poi altre[142] formule per le derivate.

---

[142]In tutta questa Lezione, la somma è somma di funzioni, e così il prodotto e il quoziente: per esempio $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$.
La derivata della somma [di 2 funzioni] è la somma delle derivate [di quelle 2 funzioni]:

$$(f+g)' = f'+g'$$

che potremmo anche scrivere $D(f+g) = Df+Dg$ ma continueremo con la notazione dell'apice per la derivata prima.
La derivata del prodotto <u>non</u> è il prodotto delle derivate bensì

$$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'\,.\ \text{Da cui subito } (cf)' = cf',\ c \text{ costante}\,.$$

Derivata della [funzione] reciproca:

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

e da questa e dalla precedente si ricava subito la derivata del quoziente:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}\,.$$

24.2 Esempi di calcolo di derivate

$$D\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

la derivazione "passa sopra" la moltiplicazione per -1

$$= (-1) \cdot D\frac{1}{x^2} =$$

$$= -D\, x^{-2} =$$

$$= 2\, x^{-3} =$$

$$= \frac{2}{x^3}$$

Con la derivata della somma:

$$D\left(\sin x + \cos x + \mathrm{e}\right) = \cos x - \sin x$$

e ovviamente e essendo una costante ha derivata 0.

Un'altra derivata in nota[144] ma con la complessa formula di derivazione della funzione composta.

Derivata della funzione composta:[143]

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Esempi. Con la prima, terza e quinta formula, ricordando la derivata dell'arcotangente, si troverà $D\left(\mathrm{arctg} x + \mathrm{arctg}\, \frac{1}{x}\right) = 0$.

Dalla quinta formula $D f^{\alpha} = \alpha \cdot f^{\alpha - 1} \cdot f'$ per ogni $\alpha \in I\!R$.

144

$$D\sqrt{1 + x^2} =$$

$$= D\,(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}(1 + x^2)^{\frac{1}{2} - 1} \cdot D(1 + x^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\, x =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

24.3 Le funzioni elementari in Farmacia, e i modelli

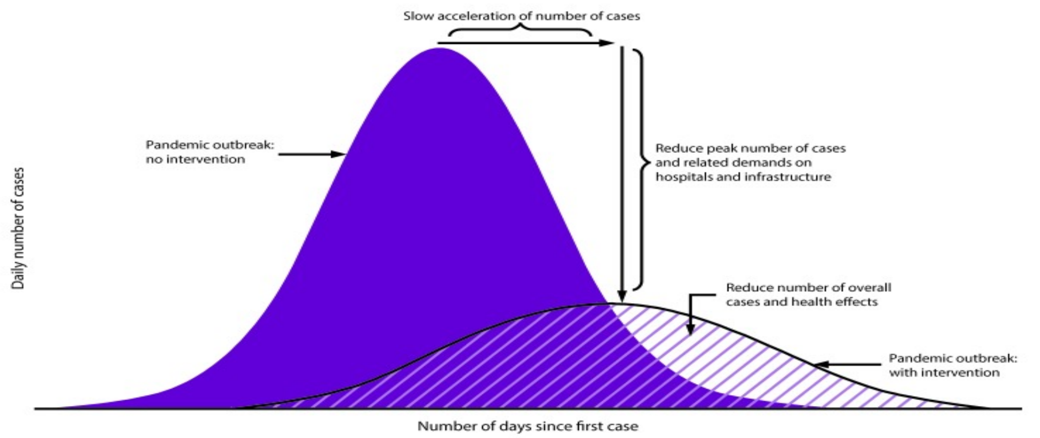
L'uso delle funzioni elementari nella ricerca farmaceutica e in generale biomedica è *enorme*, per **modellizzare** i fenomeni.

Avere in mano dei numeri, risultato di un esperimento, è *qualcosa*. Avere una funzione che li modellizza – anche se non rende conto *esattamente* di tutti i casi riscontrati – è *immensamente di più*. Per esempio perchè nel modello ci saranno dei parametri, come la concentrazione di qualche sostanza in un liquido di coltura, per fare un esempio, che si potrà ipotizzare di modificare, in un successivo esperimento, e così si procede.
Oppure, consideriamo un altro caso: in una regione hanno raccolto circa 20mila dati (peso, età in mesi) di bambini. Possiamo avere un file Excel con 2 colonne di dati, che potrà servire per future ricerche, ma sarà inutilizzabile in farmacia per valutare quanto è normale il peso di un bambino di quella regione che entri in quella farmacia. Un enorme tabulato cartaceo sarebbe ancora più inutilizzabile. Invece è più utile una formula, col suo dominio di validità, come

$$height(\text{cm}) = 78 \times age(\text{months}) + 76(\text{cm}) \quad (0 \leq age(\text{months}) \leq 72)$$

che approssimi tutti quei valori, seppure imperfettamente.

Ecco per esempio nella figura una modellizzazione di epidemie:



From: Qualls N, Levitt A, Kanade N, Wright-Jegede N, Dopson S, Biggerstaff M, Reed C, Uzicanin A; CDC Community Mitigation Guidelines Work Group. Community Mitigation Guidelines to Prevent Pandemic Influenza - United States, 2017. MMWR Recomm Rep. 2017 Apr 21;66(1):1-34. doi: 10.15585/mmwr.rr6601a1. PMID: 28426646; PMCID: PMC5837128.

Come abbiamo già detto, nel suo progredire nel tempo e approfondirsi, in linea molto gene-
rale possiamo dire che ogni Scienza Applicata attraversa successivamente queste fasi:

qualitativa ("bollendo *un po'* otterrai *un po' di* precipitato")
numeri
operazioni (numeriche)
funzioni (numeriche)← **qua siamo**
analisi statistica dei dati (numerici)

È allora fondamentale conoscere il comportamento – verrebbe quasi da dire la *psicologia* se non l'*anima* – delle varie funzioni elementari, il loro *modo* di crescere e decrescere e tendere all'infinito eccetera... Limiti e derivate ne sanno molto, dell'anima delle funzioni.

Rivediamo una questione di importanza fondamentale.

Praticamente dietro quasi ogni fenomeno della realtà sensibile c'è

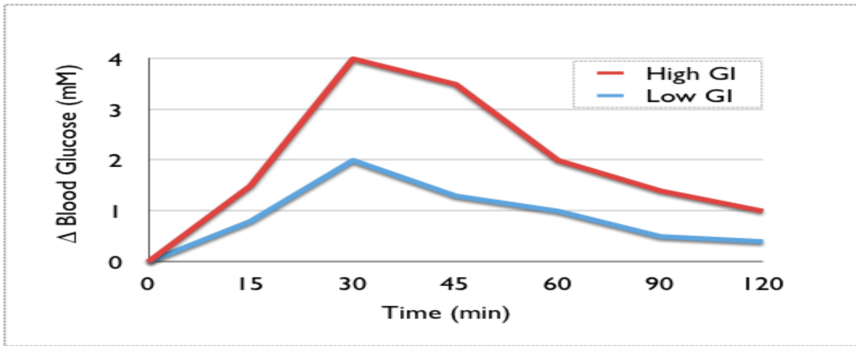
in qualche modo una funzione più o meno a campana. Imparare a riconoscere queste configurazioni a campana aumenta enormemente la comprensione della realtà.

La campana può avere 2 significati principali: una densità, coi suoi casi estremi rari e quelli medi più comuni, oppure, se in ascissa abbiamo il tempo, talvolta rappresenta (quantitativamente) la classica "parabola della vita", valida anche per una comunità microbica, per la potenza dell'Impero Romano, per la concentrazione di un farmaco immesso nel sangue, o quant'altro: sorgere, ascendere, declinare, finire.

Qua stiamo parlando di curve "più o meno a campana" mentre con "curva a campana" *di solito* si intende proprio la *campana gaussiana*, grafico della *densità normale standard* $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Curve più o meno a campana del primo tipo, cioè densità, (della Microbiologia) sono in questo link->.

Curva più o meno a campana del secondo tipo, cioè evoluzioni di una quantità nel tempo, è in questa figura



Un'altra, (della Microbiologia) è in questo link-> e un altro (della Farmacocinetica) in questo link-> e un altro a pagina 44 di questo link->.