

## 25 Applicazioni del Calcolo Differenziale

### 25.1 Cos'è molto o poco? Migliora o peggiora?

Il significato profondo delle derivate è che di una grandezza, sia essa  $f(t)$ , che varia (con continuità) nel tempo  $t$ , conta sia il valore,  $f(t)$  appunto, sia il fatto che stia aumentando o piuttosto diminuendo, cioè in pratica se la derivata  $f'(x)$  sia positiva o negativa.

L'uomo di un paese in via di sviluppo che prima viveva con 100 dollari all'anno e poi 110 e poi 120 e poi 130, magari è pure soddisfatto, nonostante la sua misera situazione economica. E su un piano più oggettivo, certamente se qualcosa del genere avviene non solo per lui ma per milioni di concittadini, qualcosa di buono può essere detto dei governanti di quella regione, le cui politiche di sviluppo stanno avendo un buon successo.

Una situazione di BMI 40.5 è gravissima considerata in sè ma un buon successo – eventualmente in parte anche farmacologico – se alla misurazione precedente era 41. (Per adesso è ancora un' *obesità di III classe*). (A livello personale potrà rattristarsi per la situazione o rallegrarsi per il miglioramento).

Se nella regione col tasso di positività al covid-19 più alto d'Italia quel valore diminuisce di giorno in giorno, qualcosa sta andando bene e (media permettendo) la gente magari ne sarà pure contenta – seppure la situazione vada ancora relativamente male (in confronto alle altre regioni).

Reciprocamente, nella regione col tasso più basso ma in aumento, la gente potrà venir spaventata dai media – per esempio affinché mantenga il distanziamento sociale – insistendo sul peggioramento.

In questa riproduzione parziale di una tabella della prestigiosa Fondazione<sup>(145)</sup>

---

<sup>145</sup>“si tratta di una fondazione nata nel 1996 con l'obiettivo di diffondere in Italia la medicina basata su prove di efficacia, attraverso iniziative di formazione, editoria e ricerca.” (<https://www.fondazioneobscuro.it/>)

Gimbe, l'Emilia Romagna ha una situazione piuttosto negativa rispetto ad altri relativamente al parametro considerato nella prima colonna, ma è segnata in verde perchè, come spiegato in nota, quel parametro è in miglioramento.

Tabella 1. Indicatori regionali: settimana 27 ottobre-2 novembre 2021

Regione	Casi attualmente positivi per 100.000 abitanti	Variazione % nuovi casi	Posti letto in area medica occupati da pazienti COVID-19	Posti letto in terapia intensiva occupati da pazienti COVID-19
Abruzzo	149	21,3%	5%	5%
Basilicata	148	43,3%	7%	0%
Calabria	164	2,0%	10%	3%
Campania	160	34,9%	8%	4%
Emilia Romagna	170	23,7%	4%	3%
Friuli Venezia Giulia	187	70,0%	6%	10%
Lazio	169	22,4%	7%	6%
Liguria	82	45,8%	5%	5%
Lombardia	98	16,0%	5%	3%

Figure 37: Da Gimbe, <https://coronavirus.gimbe.org/emergenza-coronavirus-italia/monitoraggio-settimanale.it-IT.html> (screenshot 9 novembre 2021).

***Bisogna imparare a vedere le grandezze che variano nel tempo in modo dinamico: sia valore che trend.***

## 25.2 De/crescenza, min/max, concavità, flessi

**Definizioni.** Si dice che  $f$  è *crescente in*  $x_0$  se in un intervall(in)o a sinistra di  $x_0$  vale meno che in  $x_0$  e in un intervall(in)o a destra di  $x_0$  vale più che in  $x_0$ . (In simboli è alquanto complicato). Con ovvi mutamenti si definisce la funzione decrescente in un punto. Si dice che  $f$  è *crescente in un insieme*  $E$  se  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ . Se  $E$  è un intervallo ciò equivale (si dimostra) alla crescita in ogni punto di  $E$ . Simile equivalenza con la decrescenza,  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ , sugli intervalli.

Il punto  $x_0$  si dice di *punto minimo relativo* per  $f$  se essa in un intervall(in)o a sinistra di  $x_0$  e in un intervall(in)o a destra di  $x_0$

vale *più* che in  $x_0$ . Se *meno*, si ha un *punto di massimo relativo*.  
 Se  $\forall x \in \text{dom} f$  è  $f(x) \geq f(x_0)$ ,  $f(x_0)$  si dice *minimo assoluto* di  $f$ ,  
 e *massimo assoluto* se  $\forall x \in \text{dom} f$  è  $f(x) \leq f(x_0)$ .

Attenzione a distinguere  $x_0$  punto di massimo relativo da  $f(x_0)$  massimo relativo. E similmente coi minimi.

Per esempio per il coseno 0 è punto di massimo relativo (e anche assoluto) e 1 è massimo relativo (e anche assoluto).

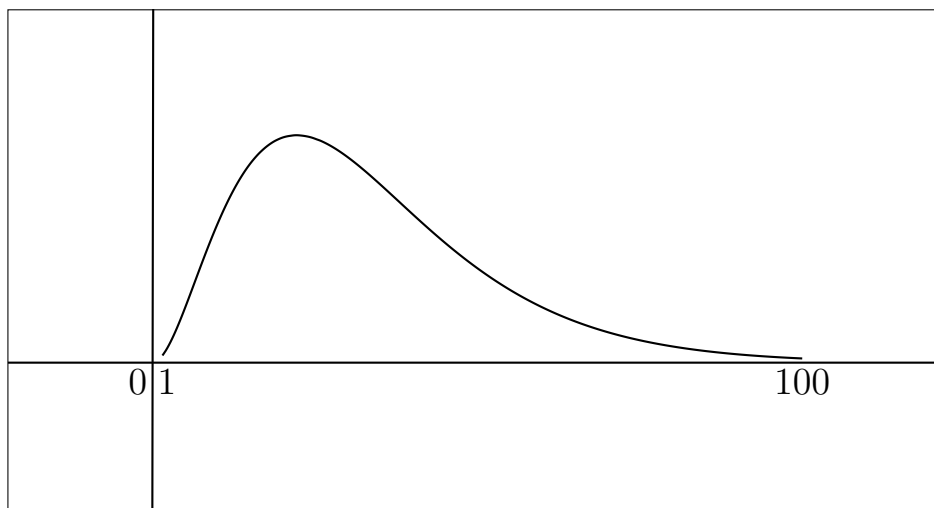
Il punto  $x_0$  si dice di *punto di flesso* per  $f$  se essa in un intervall(in)no a sinistra di  $x_0$  *volge la concavità verso l'alto* e in un intervall(in)no a destra verso il basso, oppure viceversa;  $(x_0, f(x_0))$  si dice *flesso*. Non diamo la complicata definizione analitica di *volgere la concavità*, concetto comunque ovvio se riferito al grafico.

**ESERCIZIO** <sub>$\mu_{2021}$</sub>  \* Il numero di morti di un'epidemia viene modellizzato approssimativamente da

$$d(t) := 20t^2 e^{-\frac{t}{10}} \quad 1 \leq t \leq 100$$

essendo  $t$  il tempo, in giorni, da 1 a 100. In quale giorno si ha il massimo numero di morti? (Più realisticamente, *intorno* a quale giorno; ma usiamo proprio il modello semplificato assegnato). (Ovviamente sono usati i nomi  $d$  come *deaths* e  $t$  come *time*; ma è irrilevante).

Si risolva con le derivate, sebbene si potrebbe risolvere calcolando i 100 valori di  $d(t)$  per  $t$  da 1 a 100. Sarà utile ricordare che  $D e^{ct} = c e^{ct}$  (che comunque si troverebbe subito con la regola di derivazione della funzione composta).



**SVOLGIMENTO**

Ricordando la derivazione del prodotto

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

e ricordando la derivazione di  $t^2$  che dà  $2t$ , deriviamo la funzione  $d(t)$  che è il prodotto  $(20t^2) \cdot (e^{-\frac{t}{10}})$  ottenendo la disequazione  $d'(t) > 0$

$$d'(t) = (40t) \cdot (e^{-\frac{t}{10}}) + (20t^2) \cdot \left(-\frac{1}{10} e^{-\frac{t}{10}}\right) > 0$$

$$/ : t > 0 \quad (\text{dividiamo per } t > 0 \text{ nel dominio})$$

$$40 e^{-\frac{t}{10}} - 2 e^{-\frac{t}{10}} > 0 \quad / : e^{-\frac{t}{10}} > 0$$

$$40 - 2t > 0$$

$$40 > 2t$$

$$t < 20$$

allora il numero di morti  $d(t)$  in  $[1, 100]$  cresce per  $t < 20$  e decresce per  $t > 20$  e allora raggiunge il massimo

al giorno 20

**Nota.** Il modello darebbe circa 1083 morti in quel giorno, calcolando  $d(20)$ , più precisamente 1082.68: ovviamente la funzione modella approssimativamente il numero di morti, che in generale sarà da aspettarsi con ampie fluttuazioni intorno al valore teorico.

**25.3 Retta tangente a un grafico in un punto**

**Teorema 1.** La **tangente** al grafico di  $f(x)$  in  $(x_0, f(x_0))$  è

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

e allora si ha l'*approssimazione lineare*

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x \approx x_0$$

ovvero con  $x = x_0 + h$  per  $h$  piccolissimo in valore assoluto

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h \quad |h| \ll .$$

Per esempio per  $x \approx 0$  è  $\sin x \approx x$ ,  $\ln(1+x) \approx x$ ,  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ .

**Teorema 2.**  $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$  **crescente** in  $x_0$

$$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ decrescente in } x_0 .$$

(Se  $f'(x_0) = 0$  allora  $f$  in  $x_0$  può essere crescente o decrescente o nè crescente nè decrescente: si considerino  $x^3, -x^3, x^2$ ).

**Teorema 3.** Se  $f$  è crescente prima di  $x_0$  e decrescente dopo  $x_0$  allora  $x_0$  è un punto di massimo relativo. Similmente scambiando *crescente* e *decrescente* si ha un **punto di minimo relativo**.

**Teorema 4.** Se  $f''(x) > 0$  in un intervallo, in esso  $f(x)$  *volge la concavità verso l'alto*, e verso il basso se  $< 0$ .

## 25.4 Approssimazioni delle potenze presso l'unità

L'approssimazione lineare prima detta

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h \quad |h| \ll$$

applicata in  $x_0 = 1$

$$f(1+h) \approx f(1) + f'(1) \cdot h \quad |h| \ll$$

per le potenze della  $x$

$$x^\alpha \text{ che in } 1 \text{ vale } 1 \quad \text{Derivata: } \alpha x^{\alpha-1} \quad \text{che in } 1 \text{ vale } \alpha$$

dà

$$(1+h)^\alpha \approx 1 + \alpha \cdot h \quad |h| \ll$$

ottenendosi queste approssimazioni dei quadrati e dei cubi, e avanti  $x_0$  quadrato cubo

1.01 1.02 1.03

1.001 1.002 1.003

1.0001 1.0002 1.0003

1 parte su  $n$  2 parti su  $n$  3 parti su  $n$ .

Più in generale una funzione

$$c x^\alpha$$

in cui la  $x$  si assoggetti a un aumento percentuale di *pochi* punti percentuali, diciamo  $m$  punti percentuali, per esempio 2,

aumenta circa di  $\alpha m$  punti percentuali

per  $\alpha$  piccolo in valore assoluto. Similmente con le diminuzioni. Per esempio  $\frac{4}{3} \pi r^3$  aumenta (o rispettivamente diminuisce) circa del 12% all'aumentare (o rispettivamente al diminuire) del 4% della  $r$ .

Tutto questo vale anche con  $\alpha$  negativo, salvo che un aumento, per esempio, del -6%, è in effetti una diminuzione; per esempio  $c x^{-2}$  diminuisce circa del 6% all'aumentare del 3% della  $x$ .

**L'approssimazione è tanto migliore quanto più  $m$  e  $|\alpha|$  sono piccoli.** Con  $m = 10$  e  $\alpha = 3$  dà 30 invece di 33.1.

Tutto similmente coi "per mille", con maggior precisione.

Per piccolo  $m$

aumentando/diminuendo del  $m\%$  il lato di una farmacia quadrata, l'area aumenta/diminuisce circa del  $2m\%$

Per piccolo  $m$

aumentando/diminuendo del  $m\%$  il raggio ovvero il diametro di una compressa, il volume ovvero il peso aumenta/diminuisce circa del  $3m\%$

Per piccolo  $m$

aumentando/diminuendo del  $m\%$  l'area di una farmacia quadrata, il lato aumenta/diminuisce circa del  $\frac{1}{2}m\%$  (radice quadrata,  $\alpha = 1/2$ )

Per piccolo  $m$

aumentando/diminuendo del  $m\%$  il volume di una compressa sferica, il diametro ovvero il raggio aumenta/diminuisce circa del  $\frac{1}{3} m\%$  (radice cubica,  $\alpha = 1/3$ )

Fissato  $\alpha$  coi valori usuali 2, 3, 1/2 oppure 1/3, e i loro opposti, tutto questo rimane vero coi "per mille", e ogni altra proporzione, purché la variazione sia complessivamente piccola; con 1 parte su 20 funziona bene, e diventano

2 parti su 20 (meglio detto 1 parte su 10) col quadrato,

3 parti su 20 col cubo,

1 parte su 40 con la radice quadrata,

1 parte su 60 con la radice cubica.

Per esempio, aumentando il volume di una sfera di 1 parte su 20, il raggio, che è proporzionale alla radice cubica del volume, aumenta di circa 1 parte su 60.

Invece con 1 parte su 3 l'approssimazione non funziona bene. Diciamo – tanto per dire – da 1 parte su 10 "in poi", che corrisponde al 10%, per potenze in valore assoluto non superiori a 3; e già qua la bontà dell'approssimazione è dubbia: col 10% e  $\alpha = 3$  dà 30% invece di 33.1%.

Tutto questo rimane vero, salvo modificazioni linguistiche, anche per forme diverse, purché si conservi la similitudine geometrica, cioè tutte le dimensioni variano allo stesso modo.

Così un flacone di medicinale, all'aumentare del 10% delle sue dimensioni lineari (diametro, altezza) conservando la forma, vedrà aumentare il suo volume circa del 30%. Similmente per il diminuire. Un calcolo più preciso per il 10%, che non è poi tanto piccolo numero, darebbe circa 33%. Con 1% viene abbastanza bene 3%.

E non solo i flaconi: anche capsule "a forma di pillola" (invece che compresse sferiche), e anche cavie e altri animali: un gatto del

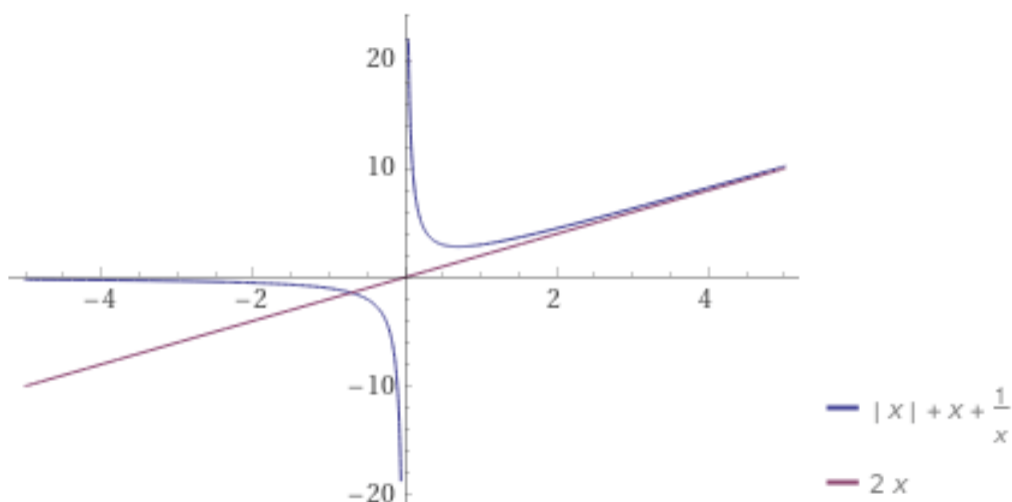
5% più lungo di una gatto "di ugual forma" pesa circa il 15% in più. Ma un gatto disegnato richiede il 10% di inchiostro in più. 🐱

## 25.5 Asintoti

*L'asintoto è una sorta di retta tangente a un grafico in punti infinitamente lontani dall'origine.*

**Impariamo a riconoscerli per via grafica (con tutte le incertezze del caso).** In questo disegno (screenshot da WolframAlpha) del grafico di  $|x| + x + \frac{1}{x}$  vediamo

- l'asintoto verticale  $x = 0$ ,
- l'asintoto orizzontale sinistro  $y = 0$
- l'asintoto obliquo destro  $y = 2x$ .



Nei Complementi a questa Lezione molti dettagli.

## 25.6 sup e inf

Se una funzione ha un massimo assoluto  $\max f$ , esso è l'*estremo superiore*  $\sup f$ . Tuttavia, consideriamo la funzione  $\arctan x$ . Essa per  $x \rightarrow +\infty$  tende a  $\frac{\pi}{2}$  ma senza mai raggiungerlo: vi si avvicina indefinitamente rimanendo sempre minore. In questo caso  $\frac{\pi}{2}$  non è certo  $\max$  – infatti per essere  $\max$  ci vorrebbe un  $x_0$  tale che  $\arctan$

là vale proprio quel valore, il che non succede mai – ma si dice che è estremo superiore:

$$\sup \arctan = \frac{\pi}{2}$$

Similmente, si potrebbe definire l'estremo inferiore  $\inf f$ ; in questo caso  $\inf f = -\frac{\pi}{2}$ . Ovvio poi è il significato di  $\sup f = +\infty$ , e di  $\inf f = -\infty$ . Per esempio

$$\sup \tan = +\infty$$

Le definizioni formali di  $\sup$  e  $\inf$  sono complicate e non le daremo.

## 25.7 Esempio: zeri, asintoti, limiti, derivata, sup

Il potenziale di Lennard-Jones

$$f(x) := \frac{1}{x^{12}} - \frac{2}{x^6} \quad x > 0$$

è una funzione della Termodinamica, collegata alla Legge di van der Waals.

– Dominio

$$x \neq 0$$

– Zeri [equazione  $f(x) = 0$ ]

Equazione

$$\frac{1}{x^{12}} - \frac{2}{x^6} = 0$$

$$\frac{1}{x^{12}} = \frac{2}{x^6} \quad / \cdot x^{12} \neq 0 \text{ nel dominio}$$

$$1 = 2x^6 \quad / : 2$$

$$x^6 = 2^{-1} \quad / \wedge^{\frac{1}{6}} \text{ Attenzione: in } \mathbb{R}^+$$

$$x = (2^{-1})^{\frac{1}{6}}$$

$$x = 2^{-\frac{1}{6}}$$

– Segni [disequazione  $f(x) > 0$ ]

$$\frac{1}{x^{12}} - \frac{2}{x^6} > 0$$

$$\frac{1}{x^{12}} > \frac{2}{x^6} \quad / \cdot x^{12} > 0 \text{ per } x > 0$$

$$1 > 2x^6 \quad / : 2$$

$$x^6 < 2^{-1} \quad / \wedge^{\frac{1}{6}} \text{ Attenzione: in } \mathbb{R}^+$$

$$x < (2^{-1})^{\frac{1}{6}}$$

$f(x) > 0$  per  $0 < x < 2^{-\frac{1}{6}}$  (e poi sarà simmetricamente per  $x < 0$ )

– Limiti [negli “estremi” (in senso lato) del dominio (**ora**  $\mathbb{R}^+$ )]

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^{12}} - \frac{2}{x^6} \right) (= +\infty - \infty) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^6} \cdot \left( \frac{1}{x^6} - 2 \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

– Asintoti

$x = 0$  asintoto verticale

$y = 0$  asintoto orizzontale per  $x \rightarrow +\infty$

– Derivata prima

$$D \left( \frac{1}{x^{12}} - \frac{2}{x^6} \right) =$$

$$= D \left( x^{-12} - 2x^{-6} \right) =$$

$$= -12x^{-13} - 2 \cdot (-6)x^{-7} =$$

$$= -\frac{12}{x^{13}} + \frac{12}{x^7}$$

– Crescenza/decrecenza, max/min, sup/inf [diseq.  $f'(x) > 0$ ]

$$-\frac{12}{x^{13}} + \frac{12}{x^7} > 0 \quad / \cdot \frac{x^{13}}{12} > 0 \text{ per } x > 0$$

$$-1 + x^6 > 0$$

$$x^6 > 1 \quad \bigg/ \wedge^{\frac{1}{6}} \quad \text{Attenzione: in } \mathbb{R}^+$$

$$x > 1$$

*"schema formale di crescita e decrescenza"*

0.....1.....  
 |-----|+++++ f'(x) > 0  
 |..... ↘... |... ↗.....

$f'(x) < 0$  per  $0 < x < 1$ , funzione decrescente

$f'(x) > 0$  per  $x > 1$ , funzione crescente

$x = 1$  punto di min rel. e ass.

$$\min f = f(1) = \frac{1}{1} - \frac{2}{1} = -1$$

$$\sup f = +\infty$$

**Nota.** Nella Sezione di Complementi lo Studente interessato troverà una "ricetta" più completa per lo studio di funzioni, basato su tutti i concetti visti.

## 25.8 Cenni sulle equazioni differenziali

Nel caso più semplice<sup>(146)</sup> un'equazione differenziale è un'equazione che ci dà informazioni sulla derivata  $y'$  di una funzione  $y$  e ha come soluzione la funzione incognita  $y$  stessa.

Si noti che la soluzione è una funzione e non un numero.

Per esempio  $y' = -ky$  con  $k$  costante è un'equazione<sup>(147)</sup> classica della Farmacocinetica.

BOZZA - DRAFT

---

<sup>146</sup>Detto meglio e con più generalità, un'equazione differenziale è un'uguaglianza fra funzioni, di cui almeno una, sia essa  $y(t)$ , è incognita, e in tutta l'espressione compare almeno una volta  $y'(t)$  *vel* una derivata di ordine superiore.

Ecco 4 equazioni differenziali:

$y' = 9.81$  che dà la velocità di caduta di un grave presso la Terra

$y' = t$

$y'' = -y$  un'equazione classicissima in Fisica

$y''' = ty'^2$

<sup>147</sup>Con una notevole teoria, si trova che la soluzione è

$$y(t) = ce^{-kt} \quad c \text{ costante}$$

## 25.9 Sistema di equazioni differenziali: modello SIR

Il modello SIR dell'epidemiologia è un sistema di equazioni differenziali che lega fra loro suscettibili (S) e infetti (I) e risolti/rimossi (R).

(25 – 0)

Questo modello<sup>(148)</sup> è ragionevolmente predittivo per le malattie infettive che vengono trasmesse da uomo a uomo e in cui il recupero conferisce resistenza duratura.

**Il morbillo è il caso tipico di applicazione del modello SIR.**  
Ecco il classico sistema di equazioni differenziali dell'epidemiologia:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta IS}{N} \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta IS}{N} - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases}$$

nelle 3 funzioni incognite  $S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $R(t)$ , *susceptible*, *infectious*, *removed*, in italiano detti anche (ma non è l'esatta traduzione) Suscettibile, Infetto, Risolto/Rimosso (ma in Risolto/Rimosso stanno sia i guariti che i deceduti). Naturalmente  $\frac{dS}{dt}$  è solo una scrittura alternativa per  $S'$ , ovvero  $S'(t)$ .

<sup>148</sup>Wikipedia, l'enciclopedia libera, letto il 10 novembre 2021.

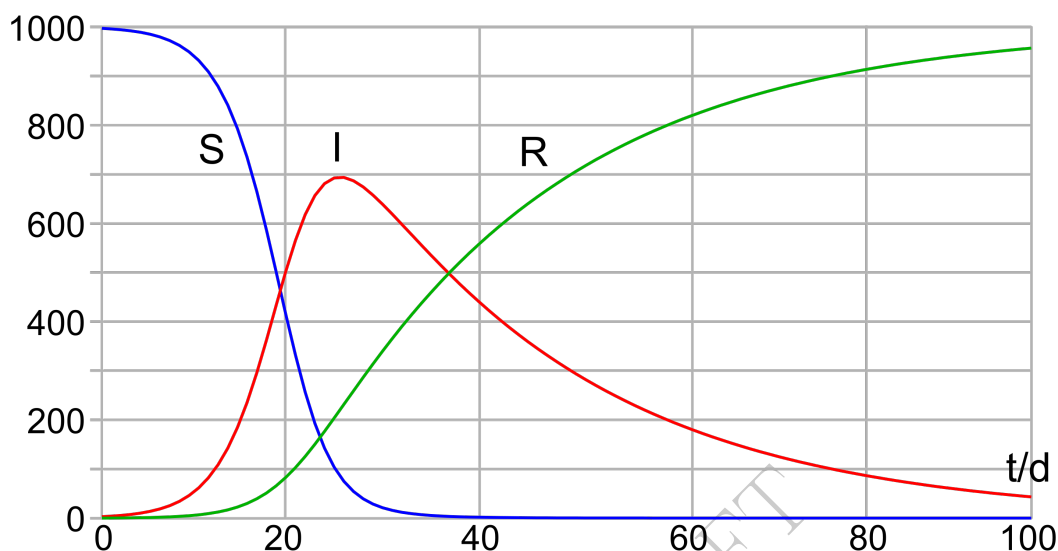


Figure 38: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:SIR-Modell.svg>, By Klaus-Dieter Keller. Valori iniziali  $S = 997$  e  $I = 3$ ,  $R = 0$  (cioè 3 infetti su 1000), con parametri  $\beta = 0.0004$ ,  $\gamma = 0.04$ .

Il modello SIR è un modello matematico usato in epidemiologia per descrivere la diffusione di una malattia infettiva in una popolazione chiusa (senza nascite, morti o migrazioni).

### Le tre curve principali

#### Curva dei Suscettibili (S)

Rappresenta il numero di persone che possono ancora essere infettate

All'inizio: è quasi tutta la popolazione.

Andamento: decresce nel tempo, perché man mano che il contagio si diffonde, sempre più persone passano da S a I.

Forma: una curva decrescente che tende a un valore minimo (mai zero del tutto).

Interpretazione: indica quante persone restano a rischio nel corso dell'epidemia.

#### Curva degli Infetti (I)

Mostra il numero di persone attualmente infette nel tempo.

All'inizio: è molto bassa (magari solo pochi casi).

Andamento: cresce rapidamente (fase esponenziale) finché il contagio si propaga, poi raggiunge un picco massimo e infine decresce quando i suscettibili diminuiscono.

Forma: una curva a campana (simile a una gaussiana, ma asimmetrica).

Interpretazione: il picco indica il momento di massima pressione sul sistema sanitario.

### **Curva dei Risolti/Rimossi (R)**

Rappresenta il numero cumulativo di persone che non possono più infettarsi o infettare, perché:

sono guarite e immuni, oppure

decedute o vanno considerate totalmente e perfettamente isolate.

All'inizio: è pari a zero.

Andamento: cresce sempre, perché una volta entrati in R non si torna indietro.

Forma: una curva crescente, che si stabilizza quando l'epidemia finisce.

Interpretazione: mostra la quota di popolazione che ha "superato" l'epidemia.

—

### **Relazioni tra le curve**

$$S(t) + I(t) + R(t) = N \quad (84)$$

vale In ogni momento, dove  $N$  è la popolazione totale (costante).

Quando  $I(t)$  scende a zero, la malattia si estingue.

L'altezza del picco di  $I(t)$  e la velocità di discesa dipendono da:

il tasso di infezione  $\beta$

e il tasso di guarigione  $\gamma$

Il rapporto  $\frac{\beta}{\gamma}$  è il famoso numero di riproduzione di base  $R_0$ , mezzo incubo giornalistico durante la pandemia del 2020.

**Nota.** Di questo Paragrafo [25.9](#) ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria la formula *contemporaneamente* numerata *et* riquadrata (25-0).

BOZZA - DRAFT

# Complementi

## 25.10 Complementi – Definizioni degli asintoti

**Definizione 1.**<sup>(149)</sup> Se  $x_0$  è un numero [finito] e

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \vee \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

allora la retta verticale  $x = x_0$  si dice **asintoto verticale** per  $f$ .

**Definizione 2.** Se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = cost$$

allora  $y = cost$  si dice **asintoto orizzontale sinistro** per  $f(x)$ , o per  $x \rightarrow -\infty$ , e similmente si definisce quello **destro**, ovvero per  $x \rightarrow +\infty$ .

La definizione analitica di **asintoto obliquo** è più complessa<sup>(150)</sup> e non la diamo. Riconosciamo – tentativamente – gli asintoti obliqui dal (disegno del) grafico. Ma con, per esempio,  $x + \ln x$  il rischio di sbagliare è notevole (perchè contrariamente all'impressione che in

<sup>149</sup>Alcuni Autori ritengono inutile, non significativa, questa definizione.

<sup>150</sup>Per il lettore interessato: se esistono 2 numeri [finiti]  $m$  e  $q$  tali che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = q$$

allora la retta  $y = mx + q$  si dice **asintoto destro** (oppure: per  $x \rightarrow +\infty$ ) per  $f$ , in particolare **obliquo** se  $m \neq 0$  e **orizzontale** se  $m = 0$ . Con  $x \rightarrow -\infty$  si definisce l'eventuale **asintoto sinistro**.

Si trova che  $y = 0$  è asintoto orizzontale sinistro per  $\ln(1 + e^x)$  e  $y = x$  è asintoto obliquo destro.

Per  $f(x) := \sqrt{x}$  si troverebbe  $m = 0$  ma  $q$  infinito e allora non esiste asintoto destro. (E sinistro non c'è perchè  $\text{dom} f = [0, +\infty[$ ).

Con la Regola di de l'Hospital per  $\ln x$  si trova  $m = 0$  ma  $q$  infinito e allora non esiste asintoto destro. (Sinistro escluso dal dominio).

**Esercizi.** Si trovino i 2 asintoti di questa funzione considerata da Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Asymptote*:

$$\frac{2x^2 + 3x + 1}{x}$$

e con essi e qualche valore si disegni un grafico approssimativo. Similmente per la reciproca, che ha 3 asintoti.

generale si ricava [disegnandone un grafico](#), non ha asintoto obliquo destro). Il riconoscimento "a occhio" degli asintoti obliqui (e anche orizzontali) è problematico.

**Esempi.**

La funzione  $f(x) := \frac{1}{x}$  ha asintoto verticale  $x = 0$  e asintoto orizzontale  $y = 0$ : si trovano coi limiti a  $-\infty$ ,  $+\infty$ , e  $0^+$  oppure  $0^-$ .

La funzione  $\tan x$  ha gli infiniti asintoti verticali  $x = k\frac{\pi}{2}$  per  $k \in \mathbb{Z}$ .

Si troverà che  $y = \frac{\pi}{2}$  è asintoto orizzontale destro per  $\arctan x$ , e  $y = -\frac{\pi}{2}$  è asintoto orizzontale sinistro.

Si troverà che  $y = 1$  è asintoto orizzontale destro per

$$\tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

e  $y = -1$  è asintoto orizzontale sinistro.

La funzione  $f(x) := e^{\frac{1}{x}}$  ha asintoto verticale  $x = 0$  che si trova col limite per  $x \rightarrow 0^+$ , e asintoto orizzontale [destro e sinistro]  $y = 1$ .

## 25.11 Complementi – Regola di de l'Hospital

In condizioni che non<sup>(151)</sup> approfondiamo, certi limiti del tipo

$$\frac{0}{0} \quad \text{oppure} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

si possono calcolare sostituendo

il numeratore con la sua derivata

e (anche!)

il denominatore con la sua derivata.

Ripetiamo: quoziente delle derivate. (Non derivata del quoziente).

### Esempio.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x+2} \left( = \frac{\infty}{\infty} \right) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

<sup>151</sup>Per lo studente interessato, qualche dettaglio.

Detti  $u_0$  e  $l$  due numeri o  $+\infty$  o  $-\infty$ , se per  $x \rightarrow u_0$

$$\begin{array}{c} f(x) \rightarrow 0 \\ \wedge \\ g(x) \rightarrow 0 \\ \wedge \\ \frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow l \end{array} \quad \vee \quad \begin{array}{c} f(x) \rightarrow \pm\infty \\ \wedge \\ g(x) \rightarrow \pm\infty \\ \wedge \\ \frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow l \end{array}$$

si dimostra (teorema detto Regola di de l'Hospital) che

$$\lim_{x \rightarrow u_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

se  $f$  e  $g$  sono "sufficientemente regolari" (come sono in genere le funzioni che ricorrono nelle Scienze Applicate, e negli esercizi elementari, anche di questa trattazione).

Si noti che l'eventuale inesistenza del limite del rapporto delle derivate non esclude l'esistenza del limite del rapporto iniziale.

### Esempi.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \left( = \frac{0}{0} \right) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1$$

che si chiama **secondo limite fondamentale** (e per esso non vale *come dimostrazione* il calcolo soprastante, esiste una dimostrazione specifica; e proprio da quel limite si dimostra che  $D \sin x = \cos x$ , che quassù viene utilizzato).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} \left( = \frac{\infty}{\infty} \right) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

Da questi 2 limiti si ha questa sequenza di funzioni "sempre più infinite" in  $+\infty$ , cioè tali che il rapporto di una di esse con una precedente tende a  $+\infty$ : (lentissima)  $\ln x$ ,  $x$ ,  $e^x$  (velocissima). Il  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 5e^x + \pi}{7x^3 + 3x^2 + 1}$  si risolverà con 3 applicazioni successive del teorema. Invece  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x + \cos x}{5x - \sin x + 3 \cos x}$  semplificando per  $x$ .

## 25.12 Complementi – “Ricetta” per lo studio di funzione

Fermo restando che una funzione molto “capricciosa” non può essere studiata con metodi elementari, è però vero che un’infinità di funzioni del tipo di quelle che tendono a capitare nelle Scienze Applicate può validamente studiarsi coi metodi visti finora, venendosi in pratica a creare una sorta di “ricetta fissa” per il cosiddetto *studio di funzione*.

Per quanto possibile si cercherà di seguire questa “ricetta”:

- 1) Dominio
- 2) Simmetrie e periodicità
- 3) Zeri [equazione  $f(x) = 0$ ]
- 4) Segni [disequazione  $f(x) > 0$ ]
- 5) Limiti [negli “estremi” (in senso lato) del dominio]
- 6) Asintoti
- 7) Derivata prima
- 8) Limiti della derivata prima [non se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ ]
- 9) Crescenza/decrecenza, max/min, sup/inf [diseq.  $f'(x) > 0$ ]
- 10) Derivata seconda, e magari suo studio [talvolta proibitivo]
- 11) Valori calcolati, ed eventualmente tangente in essi
- 12) Disegno del grafico

Le funzioni  $2\pi$ -periodiche, si studino in  $[0, 2\pi[$  o meglio  $]-\pi, \pi]$ . Analoghe riduzioni del dominio si attuino per altre periodicità.

### Esempio: la campana gaussiana

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- 1) Dominio  
 $\mathbb{R}$
- 2) Simmetrie e periodicità

$f(-x) = f(x)$ , allora la funzione è pari e allora il grafico è simmetrico rispetto all'asse  $y$ .

(Da ora basterebbe studiarla per  $x \geq 0$ , volendo "risparmiare").

3) Zeri [equazione  $f(x) = 0$ ]

La funzione non ha zeri

4) Segni [disequazione  $f(x) > 0$ ]

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in \text{dom } f$$

5) Limiti [negli "estremi" (in senso lato) del dominio]

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

6) Asintoti

$y = 0$  asintoto orizzontale per  $x \rightarrow \pm\infty$

7) Derivata prima

$$\begin{aligned} f'(x) &= D \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} D e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} D \left( -\frac{x^2}{2} \right) = \\ &= -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

8) Limiti della derivata prima [non se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ ]

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{\sqrt{2\pi} e^{\frac{x^2}{2}}} = \left( = \frac{\infty}{\infty} \right) \stackrel{H}{<}$$

con de L'Hospital

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{2\pi} e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x} = 0$$

9) Crescenza/decrecenza, max/min, sup/inf [diseq.  $f'(x) > 0$ ]

$$-\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} > 0 \quad / \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{e^{-\frac{x^2}{2}}} > 0$$

$$-x > 0$$

$$x < 0$$

'schema formale di crescenza e decrecenza'

.....0.....  
 ++++++|-----  $f'(x) > 0$   
 ..... ↗ ... | ... ↘ .....

$f'(x) > 0$  per  $x < 0$ , funzione crescente  
 $f'(x) < 0$  per  $x > 0$ , funzione decrescente  
 $x = 0$  punto di max rel. e ass.  
 $\max f = f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$   
 $\inf f = 0$

10) Derivata seconda, e magari suo studio [talvolta proibitivo] Con qualche calcolo si trova

$$f''(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} (x^2 - 1)$$

Si risolve la corrispondente disequazione col  $> 0$

$$\left/ : \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} > 0 \right.$$

$$x^2 - 1 > 0$$

producendo lo schema di concavità e convessità e trovando l'unico flesso in  $x \geq 0$  ovvero, su tutto  $\mathbb{R}$ , i 2 flessi simmetrici.

11) Valori calcolati, ed eventualmente tangente in essi

12) Disegno del grafico

Lasciato al lettore. Si verifichi poi su WolframAlpha.

### 25.13 Complementi – Esercizi di studio di funzione

Studiare queste 3 **Funzioni Iperboliche**:

$$\begin{aligned} \sinh x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2} && \text{seno iperbolico} \\ \cosh x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2} && \text{coseno ip.} \\ \tanh x &:= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} && \text{tangente ip.} \end{aligned}$$

Le funzioni iperboliche hanno un interesse di per sè, tendendo a ricorrere nella Fisica, e hanno anche uno speciale interesse nel Calcolo Differenziale.

Studiare questa funzione di interesse nel Calcolo delle Probabilità:

•

$$f(x) := \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

Studiare queste altre funzioni:

•

$$f(x) := \frac{x}{2+x^2}$$

•

$$f(x) := \ln(x^2 - 1)$$

BOZZA - DRAFT

## **VI – Integrali e serie numeriche**

BOZZA - DRAFT