26 L'integrale indefinito e definito

26.1 Introduzione all'integrale indefinito

Abbiamo visto come rispondere([152]) alla domanda

Qual è la derivata di questa funzione?

Ma nelle Scienze Applicate e in particolare in Fisica([153]) talvolta si deve rispondere a questa domanda in qualche modo inversa:

Di quale/i funzione/i è derivata questa funzione?

Per esempio

$$\text{accelerazione} = \mathrm{D}\ \text{velocità}$$

entrambe espresse in funzione del tempo.

Se conosciamo la velocità, derivando troviamo l'accelerazione.

Ricorrente problema in Fisica è invece trovare la velocità dall'accelerazione.

L'operazione inversa della derivazione è l'integrazione indefinita.

Se conosciamo l'accelerazione, integrando troviamo la velocità, con qualche precisazione che vedremo.

[152] In generale e salvo funzioni capricciose: già $|x|$ crea problemi, non avendo derivata in 0.
[153] Meno spesso in Chimica e poi in Farmacia.

L'integrale indefinito è l'"*anti-derivata*":

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$$

$$\Leftarrow \quad \frac{1}{1+x^2} = D\left(\arctan x + c\right).$$

Possiamo quasi dire che il segno d'integrale può fare il "salto dell'uguale" trasformandosi in derivata, come un ln fa il "salto" trasformandosi in exp, per esempio $\ln x^2 = 3$ equivale a $x^2 = e^3$.

L'integrale indefinito risponde alla domanda: "Di cos'è la derivata?"

Il termine "$+c$" ci ricorda che non solo $\arctan x$ ha derivata $\frac{1}{1+x^2}$, ma anche $\arctan x + 99$ o più qualunque numero reale c. Allora l'integrale indefinito è un insieme di funzioni.
Ciascuna di quelle funzioni si chiama *primitiva* di f.

26.2 Alcuni integrali indefiniti

Dalle note derivate bbiamo subito questi integrali indefiniti:

$$\begin{array}{llcll}
 & \int \frac{1}{1+x^2}\,dx & = & \arctan x + c & \\
\forall\, \alpha & \int \alpha\,dx & = & \alpha x + c & \text{in particolare:} \\
 & & & & \int 0\,dx = c \\
 & \int e^x\,dx & = & e^x + c & \\
 & \int \frac{1}{x}\,dx & = & \ln|x| + c & \\
\forall\, \alpha \neq -1 & \int x^\alpha\,dx & = & \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c & \text{in particolare} \\
 & & & & \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c \\
 & & & & \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c \\
 & & & & \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + c \\
 & & & & \int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c \\
 & \int \cos x\,dx & = & \sin x + c & Nota: non\,diamo\,alcun \\
 & \int \sin x\,dx & = & -\cos x + c & significato\,al\,termine\,dx.
\end{array}$$

26.3 La costante additiva dell'integrale indefinito

Al posto del $+c$ delle sopra dette formule d'integrazione definita, altri Autori scrivono $+k$ o $+cost$, o quant'altro, e senza errare troppo immaginiamo che vi sia 0, pur scrivendo formalmente $+c$. (La questione tecnicamente è più sottile).

Quella simbologia va intesa come la somma di una qualunque costante in ognuno degli intervalli massimali[154] contenuti nel dominio dell'integranda, che è questione un po' sottile, ma senza errare troppo immaginiamo che sia 1 stessa costante su tutto il dominio, liberamente scelta in $\mathbb{R}$. Per esempio 3, o -5, e spesso 0.

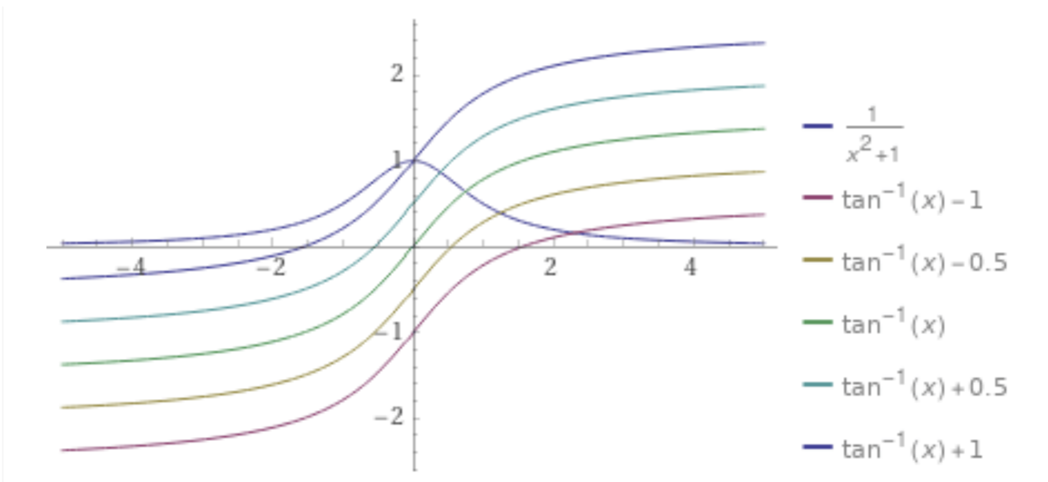


Figure 39: Disegno del grafico di $\frac{1}{1+x^2}$ e di alcune delle funzioni del suo integrale indefinito $\arctan x + c$, cioè alcune primitive. (Screenshot da WolframAlpha).

26.4 Le 2 formule della linearità dell'integrale

Queste 2 formule costituiscono la *linearità dell'integrale*:

$$\boxed{\int c\, f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}} \tag{85}$$

Cioè: Le costanti moltiplicative escono dall'integrale.

Esempio: $\int 5 \cos x\, dx = 5 \int \cos\, dx = 5 \sin x + c$

[154] Per esempio l'integrale indefinito di $\frac{1}{x}$ è $\ln|x| + c$ e il dominio dell'integranda è costituito dai 2 intervalli $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$ e per ciascuno di essi si avrà una costante da sommare a $\ln x$, in modo indipendente). Per esempio $\ln(-x) + 3$ per $x < 0$ e $\ln x + 5$ per $x > 0$.

$$\boxed{\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx} \qquad (86)$$

Cioè: L'integrale della somma è la somma degli integrali.

Esempio: $\int(5 + \cos x)\, dx = \int 5\, dx + \int \cos x\, dx = 5\, x + \sin x + c$

Nota 1 per il Lettore interessato. Nei Complementi si trovano altre formule, in particolare la bella *formula d'integrazione per parti*:

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'$$

Nota 2 per il Lettore interessato. Le sosprastanti proprietà (teoremi) degli integrali indefiniti e quelle riportate nella corrispondente sezione di Complementi seguono (non tutte in modo ovvio) dalle proprietà (teoremi) delle derivate.

Esempio 1

$$\diamond \qquad \int (x^3 + 2\, x^2 + 3\, x)\, dx =$$

$$\stackrel{(86)}{=} \int x^3\, dx + \int 2\, x^2\, dx + \int 3\, x\, dx =$$

$$\stackrel{(85)}{=} \int x^3\, dx + 2 \int x^2\, dx + 3 \int x\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\, x^4 + \frac{2}{3}\, x^3 + \frac{3}{2}\, x^2 + c\,. \qquad \text{[Verificare derivando]}$$

Esempio 2

$$\diamond \qquad \int (\sin x + 3 \cos x + 7)\, dx =$$

$$\stackrel{(86)}{=} \int \sin x\, dx + \int 3 \cos x\, dx + \int 7\, dx =$$

$$\stackrel{(85)}{=} (-\cos x + c_1) + 3 \int \cos x\, dx + (7x + c_2) =$$

$$= (-\cos x + c_1) + 3\, (\sin x + c_3) + (7x + c_2) =$$

chiamiamo c la somma delle 3 costanti d'integrazione c_1, c_2 e c_3

$$= -\cos x + 3 \sin x + 7x + c\,. \qquad \text{[Verificare derivando]}$$

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule *contemporaneamente* numerate *et* riquadrate, oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione, e le formule del paragrafo 26.2.

Complementi

26.5 Complementi – Altre formule sull'integrale indefinito

Integrazione per parti:

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx \qquad (87)$$

Esempio: $\int e^x\, x\, dx = e^x\, x - \int e^x \cdot 1\, dx = e^x\, x - e^x + c$

Integrazione per sostituzione $y := mx + q$:

$$\int f(m\,x+q)\,dx = \frac{1}{m}\Big(\int f(y)\,dy\Big)_{y=m\,x+q} \quad \forall\, m, q \in \mathbb{R}, m \neq 0. \qquad (88)$$

(Una formula più complicata che non diamo permette una sostituzione più generale $y := g(x)$, ed è là che si dà senso al dx).

Esempio:

$$\diamond \int \cos(2\,x+3)\,dx =^{(88)}$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\int \cos(t)\,dx\Big)_{t=2\,x+3} =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\sin(t) + k\Big)_{t=2\,x+3} =$$
$$= \frac{1}{2}\sin(2\,x+3) + c\,. \qquad \text{[Verificare derivando]}$$

26.6 La questione dell'area sotto una curva

In un'infinità di questioni interessa conoscere l'area compresa fra il grafico di una funzione $f(x)$ e l'asse delle ascisse, da un numero a a un numero b su quell'asse. (Al limite, pure valori a o b infiniti).

Questo problema verrà risolto dall'integrale definito: $\int_a^b f(x)\,dx$.

Nel Calcolo delle Probabilità il concetto è di uso amplissimo.([155])

È usato nella Termodinamica, scienza utile nella fabbricazione dei farmaci: `link->`

Veniamo alla Farmacia. Leggiamo su Wikipedia([156]) (in italiano), l'enciclopedia libera, alla voce *Area Under the Curve*,

> L'area sotto la curva concentrazione/tempo o AUC (dalla dicitura inglese area under the time/concentration curve, ovvero area sottesa alla curva) è un parametro farmacocinetico dato dall'integrale in un grafico concentrazione/tempo (...)
> Tale parametro è fondamentale per poter descrivere l'effetto dei farmaci poiché riflette l'esposizione dei tessuti al farmaco nel tempo.
> L'AUC (da zero a infinito) rappresenta l'esposizione totale al farmaco in funzione del tempo (...)
> Per indicare l'AUC riferita ad un particolare intervallo temporale si utilizzano i pedici, ad esempio AUC_{4-8h} indica l'area sotto la curva nell'intervallo di tempo che va da 4 a 8 ore.

[155] Nel Calcolo delle Probabilità l'area sotto il grafico di una *densità di probabilità di una variabile aleatoria* X, concetti che definiremo, rappresenterà la probabilità che $a \le X \le b$:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(t)\,dt$$

Si può cominciare a farsi un'idea con la *densità normale standard* $\phi(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$, considerando il suo grafico. Per esempio con WolframAlpha

```
Integrate[Exp[-t^2/2]/Sqrt[2Pi],{t,-2,2}]
```

ci dà circa 95%, e un'interessante figura.

[156] Letto il 3 febbraio 2020

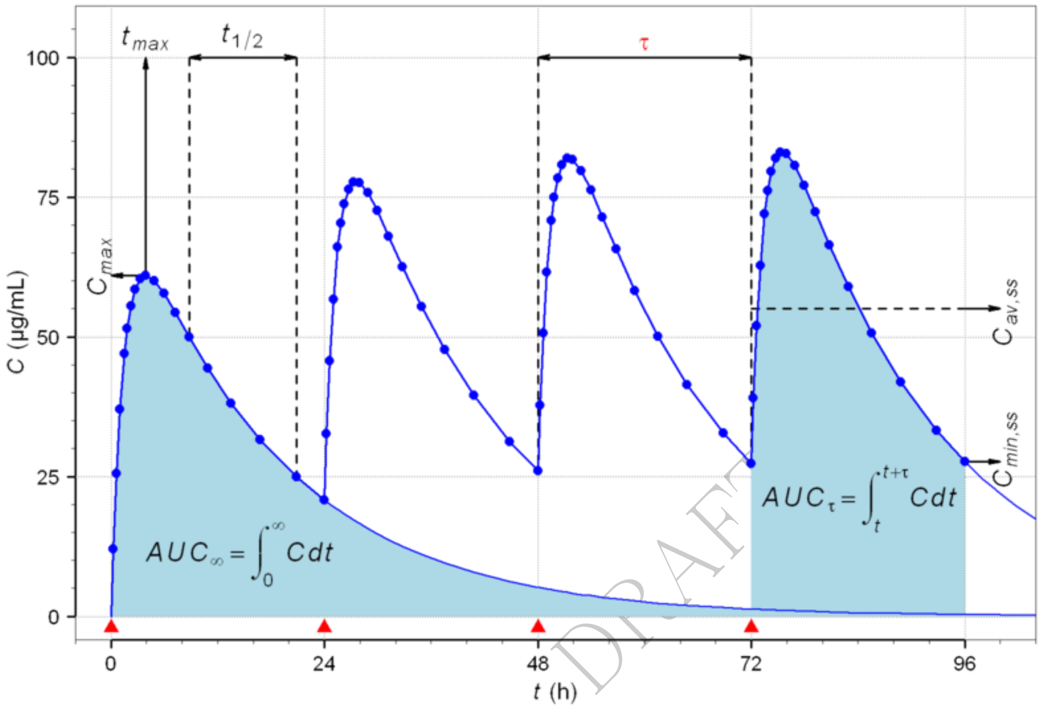


Figure 40: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Linear_PK_Example.png. By Helmut Schütz.

Cioè, e si veda la figura sulla citata pagina di Wikipedia,

$$AUC_\infty := \int_0^{+\infty} concentrazione(t)\, dt$$

26.7 L'indice glicemico e l'indice insulinico

Un'applicazione molto vicina alla Farmacia è l'area sotto il grafico che esprime la concentrazione di glucosio nel sangue all'avanzare del tempo dopo l'assunzione di un pasto; si veda questa figura di Wikimedia Commons: link->; ciò serve a definire l'indice glicemico degli alimenti:

> The glycemic index of a food is defined as the incremental area under the two-hour blood glucose response curve (AUC) following a 12-hour fast and ingestion of a food with a certain quantity of available carbohydrate

> (usually 50 g). (Da Wikipedia (in inglese), l'enciclopedia libera alla voce *Glycemic index*.)

Quel grafico viene certo da analisi del sangue, ma può anche essere modellizzato matematicamente con funzioni, per ulteriori ricerche: link->. (Il quel testo, si noti che *in silico* = col computer; è un aggiornamento dei classici *in vitro* e *in vivo*).

Similmente l'indice insulinico:

> Glucose (glycemic) and insulin scores were determined by feeding 1000 kilojoules (239 kilocalories) of the food to the participants and recording the area under the glucose/insulin curve for 120 minutes then dividing by the area under the glucose/insulin curve for white bread. The result being that all scores are relative to white bread. . (Da Wikipedia (in inglese), l'enciclopedia libera alla voce *Insulin index*.)

26.8 La clearance dei farmaci

Considerando una dose D di farmaco e la sua AUC che ne deriva, si definisce *clearance* del farmaco il loro rapporto:

$$\text{clearance:} \quad Cl = \frac{D}{AUC}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La clearance indica}\\ \text{quanto velocemente il plasma}\\ \text{si ripulisce da un farmaco}\end{array}}$$

Nota. In pratica:

Caso	**Cosa succede**	**Effetto sull'AUC**
Clearance alta	Eliminazione rapida	AUC piccola
Clearance bassa	Eliminazione lenta	AUC grande
Dose più alta	Più farmaco assorbito	AUC più grande (proporz.)

Ma le applicazioni degli integrali sono veramente innumerevoli.([157])

[157] In ambito Biomedico, si consideri la funzione $f(t)$ che esprime in millilitri all'ora il

26.9 Teoria ed esempi dell'integrale definito

Siano $F(x)$ e $f(x)$ due funzioni definite fra a e b, cioè sull'intervallo $[a,b]$ se $a \le b$ e sull'intervallo $[b,a]$ se $a > b$.

Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, cioè $F' = f$, e tale primitiva si può ottenere dall'integrale indefinito di f ponendo $c = 0$ o qualunque altro valore, in questa trattazione elementare – diversamente dall'uso consueto in Analisi Matematica – **definiremo l'*integrale definito* di $f(x)$ da a a b in questo modo**

$$\int_a^b f(x)\,dx := F(b) - F(a)_{\textit{scritto anche}}\,[F(x)]_a^b {}_{\leftarrow \textit{incremento di } F \textit{ da } a \textit{ a } b}$$

(ed è ovvio che qualunque primitiva si scelga, ovvero qualunque c, si ottiene lo stesso valore: c si elide nella sottrazione).

Si dimostra (teorema, complicato) che esso uguaglia l'area (consueta) fra l'asse x e il grafico di f fra a e b se $a < b$ e su $[a,b]$ è $f(x) \ge 0$. *(Sottografico).*

A un livello superiore, l'integrale definito viene definito sostanzialmente proprio con le aree, e questo consente di averlo anche per funzioni prive di primitiva come $\operatorname{sgn} x$, ma noi non considereremo tali integrali.

Si noti che

il sottografico è una figura piana (insieme di punti del piano),

l'integrale definito è un numero,

la primitiva è una funzione,

flusso di un liquido in un tubo, anatomico o artificiale: l'area in questione, da t_1 a t_2 in ore, rappresenta la quantità di liquido fluito, in millilitri; e ovviamente millilitri e ore possono essere cambiati con altre unità di misura di volume e tempo. Quella quantità sarà proprio $\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$.

Si consideri, ancora, la determinazione delle aree geometriche, di figure definite dal loro bordo inteso come grafico di una funzione: ciò può servire nella progettazione di protesi anatomiche (Ingegneria Biomedica) o di reattori chimici per la produzione di farmaci.

l'integrale indefinito è un insieme di funzioni.

Esempio 1. Calcoliamo l'area sotto una “campata" della sinusoide, da 0 a π:

$$\int_0^{\pi} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2.$$

Esempio 2. Calcoliamo l'area del sottografico dell'iperbole equilatera di equazione $y := \frac{1}{x}$ da 1 a 7:

$$\int_1^7 \frac{1}{x}\, dx = [\ln x]_1^7 = \ln 7 - \ln 1 = \ln 7$$

ed è ben evidente che il numero 7 si può sostituire con qualunque numero t, ottenendosi il significato geometrico del logaritmo. Se $0 < t < 1$ il logaritmo naturale è negativo, e infatti l'area del sottografico, da intendersi come *area con segno*, è negativa perché la base viene percorsa da 1 a t in verso contrario all'orientazione dell'asse x. Si disegni l'iperbole e si stimi (dall'area) $\ln 10$.

Esempio 3. Per un processo termodinamico isotermico reversibile vale

$$Lavoro = -\int_{V_{iniziale}}^{V_{finale}} \frac{n\,RT}{V}\, dV =$$

per linearità dell'integrale definito, come pure indefinito,

$$= -n\,RT \int_{V_{iniziale}}^{V_{finale}} \frac{1}{V}\, dV =$$

$$= -n\,RT\,[\ln V]_{V_{iniziale}}^{V_{finale}} =$$

$$= -n\,RT\,(\ln V_{finale} - \ln V_{iniziale}) =$$

$$= -n\,RT\,\ln\frac{V_{finale}}{V_{iniziale}}$$

Leggiamo su Wikipedia (in inglese), l'enciclopedia libera, alla voce *Isothermal process*:

> By convention, work is defined as the work on the system by its surroundings. If, for example, the system is compressed, then the work is positive and the internal energy of the system increases. Conversely, if the system expands, it does work on the surroundings and the internal energy of the system decreases.

26.10 Altri 3 teoremi sugli integrali

• Teorema fondamentale del Calcolo Integrale

$$D \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

• Scambio degli estremi di integrazione.
Dalla definizione – come l'abbiamo data – segue subito che

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$$

• Regola di Chasles.
Per ogni $a, b, c \in \operatorname{dom} f$, in qualunque ordine,

$$\boxed{\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b} \tag{89}$$

(dove si intendano completati i 3 simboli di integrale con $f(x)dx$, che per focalizzare il significato di questo teorema, non è stato scritto esplicitamente).

Esercizio. Con la Regola di Chasles si calcoli $\int_{-1}^2 |x|\, dx$, si faccia un disegno, e si ricalcoli quell'integrale con le aree della geometria elementare. (Si noti che di $|x|$ non abbiamo dato una primitiva, ma quella funzione coincide con $-x$ fino a 0, e con x da 0 in poi).

ESERCIZIO$_{\mu 2018\neq}$
$\ast$ Supponiamo che in un tubo (per esempio di un reattore chimico per la produzione di farmaci) passi un liquido nella misura di

$$p(t) := |t|\, dl/h$$

nel tempo t fra -1 e 2 (h, ore, unità di tempo; quella negativa indica un tempo anteriore a un tempo detto 0; si può ipotizzare, per esempio, che lo 0 sia una certa mezzanotte, e allora stiamo considerando il tempo dalle 23 alle 2 di notte, in effetti del giorno successivo). Calcolare

$$\int_{-1}^2 p(t)\, dt$$

che da un punto di vista fisico – ma non ce ne occuperemo – rappresenta la quantità totale di liquido fluito nel tempo considerato, e ha unità di misura dl, cioè decilitri, ma per semplicità si facciano i calcoli e si dia la soluzione senza unità di misura.

SVOLGIMENTO

Ricordando che
$$|x| := \begin{cases} x & se\, x \geq 0 \\ -x & se\, x < 0 \end{cases}$$
ora (eliminando le unità di misura)
$$\int_{-1}^{2} p(t)\, dt = \int_{-1}^{2} |t|\, dt =$$
per la Regola di Chasles
$$= \int_{-1}^{0} (-t)\, dt + \int_{0}^{2} t\, dt =$$
per la linearità dell'integrale (cioè per le formule (85) e (86))
$$= -\int_{-1}^{0} t\, dt + \int_{0}^{2} t\, dt =$$
ricordando la primitiva elementare $\int t\, dt = t^2/2 + c$
$$= -\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{2} = -\left(0 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{4}{2} - 0\right) = \frac{5}{2} =$$
esattamente
$$\boxed{2.5}$$
oppure anche validamente (ma in effetti meno bene, visto il significato fisico)
$$\boxed{\tfrac{5}{2}}$$
(Si tratta di due decilitri e mezzo, dal punto di vista fisico, molto meglio espressi – almeno come risultato finale – come 2.5 che $\frac{5}{2}$).

Esercizio$_\mu$ Si consideri la funzione
$$f(t) := \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2} \quad \text{(che si chiama } \textit{densità di Cauchy}\text{)}$$
e si calcoli
$$\int_{0}^{1} f(t)\, dt$$

e si troverà $\frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$ che rappresenta – anticipando un argomento di Calcolo delle Probabilità – la probabilità che una variabile casuale (o meglio detta aleatoria) che ha quella densità assuma un valore fra 0 e 1. Si faccia un disegno della funzione ombreggiando il sottografico relativo all'area trovata.
Con analogo calcolo, o semplicemente per simmetria, ne viene che

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

che rappresenterà la probabilità che una variabile aleatoria che ha quella densità assuma un valore fra -1 e $+1$.
Si calcoli poi

$$\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt$$

e ovviamente l'estremo $+\infty$ va inteso nel senso del limite([158]). Si troverà $\frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$ che rappresenterà la probabilità che una variabile aleatoria che ha quella densità assuma un valore fra 0 e $+\infty$ ovvero non negativo.
Infine si calcoli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$$

e si troverà 1 cioè 100% e questo valere 1 dell'integrale su tutto $\mathbb{R}$ avviene per tutte le densità di probabilità (che, poi, hanno anche la caratteristica di essere ≥ 0).

Questa dell'esercizio soprastante grafico di

$$f(t) := \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

non è la curva a campana che più ricorre nelle applicazioni come densità, che invece è la campana gaussiana già accennata, ma ha il pregio di essere più facilmente trattabile pur esibendo comportamenti in parte simili. (I valori $f(t)$ si possono bene calcolare approssimatamente con le 4 operazioni).

ESERCIZIO$_{\mu 2021}$ ≈ Approssimando $\arctan(20)$ con $\arctan(+\infty)$, calcolare

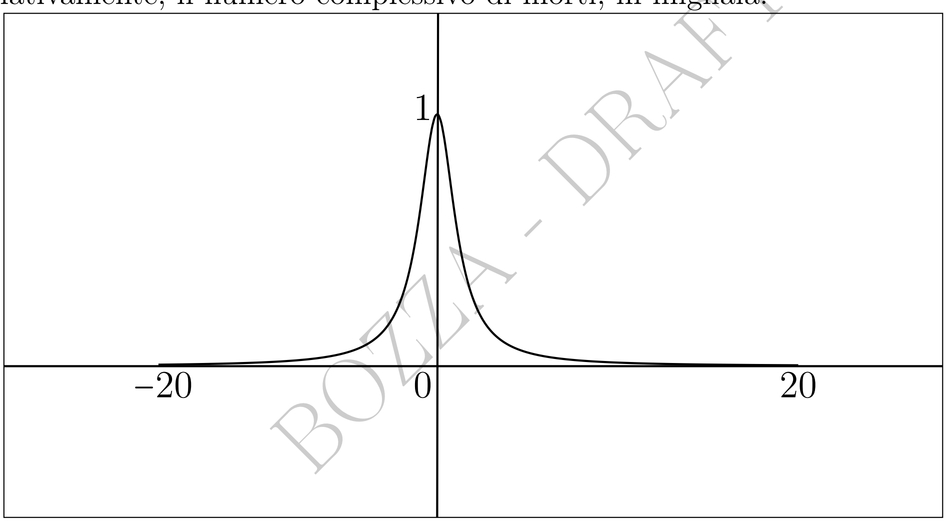
$$\int_{-20}^{20} f(t)\,dt, \qquad f(t) := \frac{1}{1+t^2}$$

[158]Per le funzioni molto regolari che ci interessano in pratica, questo non creerà alcun problema, e nei trattati di Calcolo delle Probabilità si scrivono tranquillamente cose come $\arctan(+\infty)$, formalmente scorrette dal punto di vista matematico.

e potrà essere utile questa tavola di valori, dove ovviamente l'infinito va inteso nel senso del limite: somma di una qua

x	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$	
$\arctan x$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$(\arctan(-x) = -\arctan x)$

Di questa questione possiamo dare un'interessante interpretazione, seppure non serva per risolvere il quesito. Il numero di morti di un'epidemia, in migliaia, sia approssimatamente modellizzato dalla $f(t)$ considerata, per $-20 \le t \le 20$ essendo t il tempo, dal giorno $t = -20$ (per esempio 11 dicembre 2020) al tempo $t = 20$ (20 gennaio 2021). (Per esempio, vediamo che nel giorno di picco $t = 0 =$ 31 dicembre 2020 il modello dà 1000 morti).
Allora ovviamente l'area espressa dall'integrale considerato dà, molto approssimativamente, il numero complessivo di morti, in migliaia.



SVOLGIMENTO

$$\int_{-20}^{20} \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= [\arctan t]_{-20}^{20} =$$

$$= \arctan(20) - \arctan(-20) =$$

per la disparità dell'arcotangente ricordata nella tavola

$$= \arctan(20) - (-\arctan(20)) =$$

$$= 2\arctan(20) \approx 2\arctan(+\infty) = 2\,\frac{\pi}{2} = \pi \approx$$

$$\boxed{\approx 3.14}$$

(e nell'interpretazione dell'epidemia corrisponde a circa 3140 morti, diciamo pure "circa 3000 morti" a causa delle grossolane approssimazioni).

Nota 1. È stata un'epidemia molto intensa solo per breve tempo, con un'ascesa verso il picco e una discesa in certo qual modo rapidissime, con buona parte dei morti concentrati in una settimana, molto diversa dalla pandemia attuale (2020-2021), per la quale – nemmeno per la sola Italia – una formula semplicissima come quella dell'esercizio non può bastare. Ecco alcuni valori dati dalla funzione dell'esercizio:

31 dicembre 1000 morti
1 gennaio 500 morti
2 gennaio 200 morti
3 gennaio 100 morti

Nota 2. Se invece dell'integrale, con un computer (o a mano con molta pazienza) sommiamo i morti previsti dal modello per i 41 giorni dell'epidemia, si ha, molto più precisamente,

$$\sum_{t=-20}^{20} \frac{1}{1+t^2} \approx 3.056$$

cioè ≈ 3056 morti.

26.11 Complementi – Integrale del logaritmo naturale

Con la formula di integrazione per parti, intendendo $\ln x$ come $1 \cdot \ln x$, si può trovare l'integrale di $\ln x$:

$$\int \ln x \, dx = \quad \text{moltiplichiamo per 1}$$

$$= \int 1 \cdot \ln x \, dx = \quad \text{riconosciamo } D\,x = 1$$

$$= \int (D\,x) \cdot \ln x \, dx =$$

con la (87)

$$= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$

$$= x \ln x - \int 1 \, dx =$$

$$= x \ln x - x + c\,. \quad \text{[Verificare derivando]}$$

Con questo procedimento e con la formula di cambiamento di base e con la (85) si calcoli l'integrale del logaritmo decimale.

26.12 Complementi – Note sulle equazioni differenziali

Già sappiamo risolvere la

$$(1+t^2)\,y'(t) = 1 \qquad \text{altrimenti scritta } (1+t^2)\,y' = 1$$

cioè la

$$y'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

trovando

$$y(t) = \arctan t + c$$

Con WolframAlpha: `Solve[(1+t^2)y'=1]` dà $y(t) = c_1 + \tan^{-1}(t)$

Equazioni differenziali risolubili con un'integrazione Talvolta nelle Scienze Applicate si è interessati a trovare una funzione del tempo, sia essa $y(t)$, di cui per motivi fisici (in senso lato) si conosce la derivata, sia essa $g(t)$:

$$y'(t) = g(t) \quad y \text{ } \textit{incognita} \quad g \text{ } \textit{nota}$$

Se g è sufficientemente regolare ovvero non "capricciosa", ovviamente le infinite soluzioni dell'*equazione differenziale* sopra scritta costituiscono l'integrale indefinito di g:

$$y(t) = \int g(t)\,dt$$

che, detta $G(t)$ una qualunque primitiva di $g(t)$, sono le infinite

$$= G(t) + cost$$

Per esempio per un oggetto che cade verticalmente presso la Terra in assenza di aria si sa che la derivata della velocità $v(t)$, cioè l'accelerazione, è ≈ 9.81:

$$v'(t) = 9.81$$

$$\Rightarrow v(t) = \int 9.81\,dt$$

$$\Rightarrow v(t) = 9.81\,t + c$$

e ponendo in quest'ultima $t = 0$, cioè il tempo d'inizio della caduta, si trova

$$c = v(0)$$

che magari vorremo indicare con $v_{iniziale}$ ottenendosi infine

$$v(t) = 9.81\,t + v_{iniziale}$$

e similmente sulla Luna, già di suo priva di aria,

$$v(t) = 1.62\,t + v_{iniziale} \qquad \text{(Luna)}$$

(e ovviamente entrambe le formule sono inevitabilmente approssimate, non essendo esatte le 2 costanti numeriche).

Esercizio$_{\mu}$ Risolvere la $t^3\,y' - 5 = 0$.

SVOLGIMENTO

È un'equazione differenziale e si risolve con questi passaggi:

$$t^3\,y' = 5$$

$$y'(t) = \frac{5}{t^3}$$

$$y(t) = \int 5\,t^{-3}\,dt = 5\int t^{-3}\,dt = 5\,\frac{t^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{5}{2\,t^2} + c$$

Con WolframAlpha: `Solve[t^3y'=5]` dà $c_1 - \frac{5}{2\,t^2}$

Note sulle notazioni. Nell'ambito della teoria delle equazioni differenziali, è abbastanza comune usare il nome x per la funzione incognita, il che potrebbe generare fraintendimenti, per esempio

$$x'(t) = x(t) \qquad \text{ovvero } x' = x$$

Ed è abbastanza comune indicare la derivazione col punto soprascritto, per esempio

$$\dot{x}(t) = x(t) \qquad \text{ovvero } \dot{x} = x$$

e 2 punti soprascritti per la derivata seconda: $\ddot{x}$.
Anche il nome u è molto usato per la funzione incognita.
Classicissima in Fisica è l'equazione differenziale del pendolo

$$\ddot{u} = -u$$

e si capisce che è una soluzione è $\cos t$, e più in generale $\cos(t + c)$.

26.13 Complementi – Note finali sulle funzioni elementari

Le regole della Natura sono scritte in linguaggio matematico, ci insegna Galileo Galilei.

Particolarmente efficaci in questo senso sono le *funzioni elementari*: potenze, logaritmi, esponenziali, valore assoluto, funzioni trigonometriche... (Una completa elencazione sarebbe difficile).

È spettacolare quanti fenomeni si possono descrivere con formule fatte di funzioni elementari con le 4 operazioni più l'elevamento a potenza – in particolare la potenza 0.5 che dà la radice quadrata.

Un modello matematico può approssimativamente essere definito come una relazione matematica – diciamo pure in generale una funzione o meglio un'equazione con più variabili – che cattura certi aspetti della realtà sensibile, quantificati da quelle variabili.
Per esempio

$$funzione(variabile_1, ..., variabile_n) = 0$$

come la $pV - nRT = 0$ della Termodinamica.
E, sorprendentemente spesso, quella funzione o equazione è fatta con funzioni elementari combinate con le 4 operazioni e l'elevamento a potenza. (Talvolta ci sono funzioni *non elementari*).

Entusiasmati dal successo, c'è il rischio di esagerare.

(E “trasformare tutto in un numero").

Osserviamo due limitazioni:

1) la relazione matematica è quasi sempre approssimata;

2) smette di valere al di fuori di certi range (domini) in generale non ben specificati, perdendo progressivamente bontà.

Esempio 0, di Microbiologia: l'accrescimento microbico.
Abbiamo già ben detto, che il numero di microbi in una coltura non cresce per sempre esponenzialmente, ma solo – e comunque approssimativamente – all'inizio. Similmente con qualunque altra popolazione; come pure non c'è epidemia che non finisca.

Esempio 1, di Fisica e Chimica: i vasi comunicanti.
Definito un certo sistema fisico, detto dei vasi comunicanti, com'è noto vale la relazione

$$h_1 = h_2$$

Fin dall'inizio c'è l'approssimazione della non perfetta planarità delle superfici liquide nelle immediate vicinanze dei bordi, per complessi fenomeni fisici. Ma poi, è ovvio che tale formula non avrà senso per altezze maggiori del diametro dell'universo. E anche su scale umane, la relazione non vale molto bene se uno dei due vasi è “molto" sottile, per il (complesso) fenomeno fisico della capillarità: via via che uno dei due vasi si assottigliasse, la formula perderebbe precisione. Eppure, la Legge dei Vasi Comunicanti rimane del massimo valore, teorico e applicativo, e il fenomeno è modellizzato proprio dalla semplice equazione sopra scritta. Con tutte le cautele del caso, quindi.

PARTE B – MATEMATICHE DELL'INCERTEZZA

Sezione B1 – Calcolo delle probabilità

VII – Probabilità assiomatica ed elementare