27 Introduzione al Calcolo delle Probabilità

27.1 Inquadramento della questione

Il calcolo delle probabilità è una branca della matematica.
Come tale tratta oggetti astratti, ma, a differenza di altre branche della matematica, gli enti che manipola sono in generale molto vicini o collegati alla realtà sensibile: in particolare troverete affermazioni su dadi e monete, che sono modelli “ideali" , “puliti", perfetti, per poi applicare le tecniche a fenomeni della realtà sensibile, in particolare sanitari e farmaceutici, inevitabilmente molto meno “ideali" e ben definiti: per esempio migliora/peggiora.

Il prodotto principale del Calcolo delle Probabilità è un numero che è *la probabilità di un evento*, come “la probabilità che la somma dei punti di 2 dadi sia 7 è $\frac{1}{6}$", che di per sè potrebbe voler dire poco ma può diventare preziosissimo per *scegliere* fra diverse alternative possibili, confrontandole numericamente; per esempio la probabilità che la somma (dei punti) di 2 dadi sia 8 è $\frac{5}{36}$ che è meno di $\frac{1}{6}$. Non solo per una scommessa sui dadi fra amici, ma anche per delicate scelte mediche o economiche o personali.
Cosa daranno i dadi è incerto ma che convenga scommettere sul 7 piuttosto che sull'8 è certissimo.
Pensate allora al confronto fra 2 terapie farmacologiche.

Gli enti teorici di base sono gli eventi e la loro probabilità, definita in 4 modi:

- Concezione frequentista della probabilità
- Concezione classica della probabilità
- Concezione soggettiva della probabilità
- Concezione assiomatica della probabilità

27.2 La concezione frequentista della probabilità

La concezione frequentista della probabilità è intuitiva e la vediamo con un esempio. Un farmaco è stato somministrato a 1000 persone con una certa diagnosi di malattia, e dopo 5 anni sono vive 700. Per l'uniformità delle condizioni e l'alto numero di *prove* si tende a ritenere che se quello stesso farmaco verrà somministrato ad altre 100 persone con quella stessa diagnosi di malattia, circa 70 saranno vive dopo 5 anni, ovvero, detto altrimenti, che somministrato a 1 persona c'è il 70% di *probabilità* che sia viva dopo 5 anni (ovviamente 70% cioè 0.7 è $\frac{700}{1000}$).
Se per quella stessa diagnosi di malattia un altro farmaco è stato somministrato a 2000 persone e dopo 5 anni sono vive 1200, si tenderà a ritenere che se quello stesso farmaco verrà somministrato ad altre 100 persone con quella stessa diagnosi di malattia, circa 60 saranno vive dopo 5 anni, ovvero, detto altrimenti, che somministrato a 1 persona c'è il 60% di *probabilità* che sia viva dopo 5 anni (ovviamente 60% cioè 0.6 è $\frac{1200}{2000}$), meno del primo farmaco.
Se per quella stessa diagnosi di malattia un altro farmaco è stato somministrato a 4 persone e dopo 5 anni sono vive 3, ne verrebbe una probabilità di sopravvivenza a 5 anni del 75%, cioè 3 su 4, cioè perfino meglio del primo farmaco, che però è stato provato su 1000 persone, mentre questo solo su 4; e qui siamo giunti al limite della validità di questa concezione, se non vengono fatti ulteriori approfondimenti.
Le probabilità così ottenute si chiamano *probabilità a posteriori*.

In pratica, detto semplificatamente, se finora è andata in un certo modo, con una certa quota di "successi" (ma si faccia attenzione che il successo può esere non solo la guarigione ma anche la morte o quant'altro, dipende da come si definisce), riteniamo che potrà continuare ad andare nello stesso modo, "proporzionalmente", e ciò definisce la probabilità (in senso) frequentista.

27.3 La mortalità

Semplificando, il numero, definito per uno stato o una regione geografica, relativamente a 1 anno,

$$m := \frac{\#\, morti}{\#\, abitanti}$$

si chiama mortalità. (E certo, qua semplificatamente consideriamo costante il numero di abitanti nell'anno).
Ultrasemplificatamente, nel terzo millennio è intorno all'1% in molti Stati. Ovvero intorno al 10 per mille.

Riferito al passato, può essere visto nel contesto della Statistica Descrittiva.
Ma in situazioni relativamente stabili – senza guerre o epidemie oltremodo devastanti – può essere visto nell'ottica delle probabilità soggettiva e frequentista:

$$P(\text{un soggetto preso a caso muore entro 1 anno}) = m$$

(E certo un pessimista, nella sua valutazione soggettiva di probabilità, potrà dare valori anche maggiori).

Naturalmente si possono considerare anche mortalità riferite a una singola causa di morte. Per esempio col covid-19 nei 32 mesi e mezzo dall'inizio (fine febbraio 2020) fino a oggi, metà novembre 2022, 3 per mille: circa 180mila morti su circa 60 milioni di abitanti; nel 2020, l'anno peggiore, quello dell'inizio del covid in Italia, 1.3 per mille, e poi meno.

E naturalmente si possono considerare mortalità riferite a fasce d'età e genere. Negli USA molte statistiche sanitarie sono fatte anche per gruppo razziale.

In https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_countries_by_mortality_rate si trova (15 novembre 2022) una lista dei tassi di mortalità per mille dei vari stati nella stima della CIA relativa al 2020. Ecco 3 stati/regioni, che sorprenderanno il lettore poco addentro alla Demografia, che sostanzialmente può essere considerata una branca della Statistica Descrittiva:

Italia 10.70
India 7.30
Uganda 5.30.

Si noti che, alquanto controintuitivamente, un italiano preso a caso aveva nel 2020 probabilità di morire entro un anno doppia di un ugandese preso a caso. Diventa meno sorprendente leggendo in https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_countries_by_median_age la stima della stessa CIA per lo stesso anno 2020 delle età mediane, 46.5 anni in Italia e 15.7 in Uganda. (Eppure in Niger l'età mediana è simile all'Uganda, anzi perfino minore, 14.8, e la mortalità è simile all'Italia, 10.20).
Umanità tutta: età mediana 31.0 anni, mortalità 7.70, circa 0.8%.

27.4 La concezione classica della probabità

La concezione classica della probabilità si basa su

un concetto primitivo che bisogna supporre noto: l'*equiprobabilità*;

e

questa definizione, valida solo per i casi equiprobabili:

$$\boxed{\text{probabilità} := \frac{\text{numero dei casi favorevoli}}{\text{numero dei casi possibili equiprobabili}}} \qquad (90)$$

Per esempio i 6 risultati del dado (regolare, non truccato) li riteniamo equiprobabili e allora la probabilità del risultato pari è

$$P(pari) = \frac{\#\{2,4,6\}}{\#\{1,2,3,4,5,6\}} = \frac{3}{6} =$$

$$= \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

Come ulteriore esempio, la probabilità che la somma dei punti di 2 dadi sia maggiore di 10 è $\frac{3}{36}$ cioè $\frac{1}{12}$ perché dei 36 casi possibili equiprobabili $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$,...,

$(6,6)$ sono 3 quelli favorevoli all'evento considerato (somma maggiore di 10) e cioè $(5,6)$, $(6,5)$, $(6,6)$.

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$\ast \approx \%$ Che probabilità c'è di ottenere un numero primo come somma dei risultati di 2 dadi regolari?

SVOLGIMENTO
Dei 36 casi equiprobabili, qua indicati con ovvio significato dei simboli,

```
1+1 1+2 1+3 1+4 1+5 1+6
2+1 2+2 2+3 2+4 2+5 2+6
3+1 3+2 3+3 3+4 3+5 3+6
4+1 4+2 4+3 4+4 4+5 4+6
5+1 5+2 5+3 5+4 5+5 5+6
6+1 6+2 6+3 6+4 6+5 6+6
```

con somme rispettive

```
02 03 04 05 06 07
03 04 05 06 07 08
04 05 06 07 08 09
05 06 07 08 09 10
06 07 08 09 10 11
07 08 09 10 11 12
```

(alcuni zeri sono scritti solo per buon allineamento) sono primi (P: 2, 3 5, 7, 11) e non primi (n: 4, 6, 8, 9, 10, 12) rispettivamente

```
P P n P n P
P n P n P n
n P n P n n
P n P n n n
n P n n n P
P n n n P n
```

avendosi così 15 casi favorevoli su 36 casi equiprobabili e allora

$$p = \frac{\#\, casi\, favorevoli}{\#\, casi\, possibili\, equiprobabili} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

e in definitiva

$$\boxed{\tfrac{5}{12} \approx 0.417 = 41.7\%}$$

oppure, con un decimale in più,

$$\boxed{\tfrac{5}{12} \approx 0.4167 = 41.67\%}$$

(e se ne potrebbero mettere anche di più, se fosse utile o desiderato).

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$\ast \approx \%$ Che probabilità c'è di ottenere un numero primo come somma dei risultati di 2 dadi regolari a 8 facce numerate da 1 a 8? (Hanno la forma di ottaedro regolare).

SVOLGIMENTO
Dei 64 casi equiprobabili, qua indicati con ovvio significato dei simboli,

```
1+1 1+2 1+3 1+4 1+5 1+6 1+7 1+8
2+1 2+2 2+3 2+4 2+5 2+6 2+7 2+8
3+1 3+2 3+3 3+4 3+5 3+6 3+7 3+8
4+1 4+2 4+3 4+4 4+5 4+6 4+7 4+8
5+1 5+2 5+3 5+4 5+5 5+6 5+7 5+8
6+1 6+2 6+3 6+4 6+5 6+6 6+7 6+8
7+1 7+2 7+3 7+4 7+5 7+6 7+7 7+8
8+1 8+2 8+3 8+4 8+5 7+6 8+7 8+8
```

con somme rispettive

```
02 03 04 05 06 07 08 09
03 04 05 06 07 08 09 10
04 05 06 07 08 09 10 11
05 06 07 08 09 10 11 12
06 07 08 09 10 11 12 13
07 08 09 10 11 12 13 14
08 09 10 11 12 13 14 15
09 10 11 12 13 14 15 16
```

(alcuni zeri sono scritti solo per buon allineamento) sono primi (P: 2, 3, 5, 7, 11, 13) e non primi (n: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16) rispettivamente

```
P P n P n P n n
P n P n P n n n
n P n P n n n P
P n P n n n P n
n P n n n P n P
P n n n P n P n
n n n P n P n n
n n P n P n n n
```

avendosi così 23 casi favorevoli su 64 casi equiprobabili e allora

$$p = \frac{\#\, casi\, favorevoli}{\#\, casi\, possibili\, equiprobabili} =$$

$$\boxed{\frac{23}{64} \approx 0.359 = 35.9\%}$$

oppure, con un decimale in più,

$$\boxed{\frac{23}{64} \approx 0.3594 = 35.94\%}$$

(e se ne potrebbero mettere anche di più, se fosse utile o desiderato).

27.5 Concezione soggettiva della probabilità

La definizione soggettiva della probabilità (di Leonard Jimmie Savage e Bruno([159]) de Finetti) la diamo implicitamente attraverso questo esempio. Supponiamo che io possa scommettere sulla vittoria della squadra dei Vispi Volpini della prima partita del campionato e abbia queste idee:

Metto 100 euro e se vince prendo 300 euro: accetto felicissimo
Metto 100 euro e se vince prendo 200 euro: accetto contento
Metto 100 euro e se vince prendo 126 euro: per un pelo accetto
Metto 100 euro e se vince prendo 125 euro: sono indifferente
Metto 100 euro e se vince prendo 124 euro: per un pelo ma rifiuto
Metto 100 euro e se vince prendo 110 euro: rifiuto
Metto 100 euro e se vince prendo 100 euro: ci mancherebbe!

Questo significa che io ritengo che la probabilità di vittoria della squadra è $\frac{4}{5} = 0.8 = 80\%$. In pratica nell'ipotesi intermedia in cui non ho nè interesse a scommettere nè a non scommettere ritengo che se l'evento si verificasse 5 volte, 4 volte la squadra vincerebbe e io avrei preso $4 \cdot 125$ euro cioè 500 euro, esattamente quanto avrei speso nelle 5 scommesse. È ovvio che a 126 euro considero vantaggiosa la scommessa (seppure di poco).

Il pareggiarsi della spesa con l'ipotetica vincita definisce la *probabilità soggettiva* che io attribuisco al verificarsi dell'evento considerato.

[159] Attuario presso le Assicurazioni Generali, lungamente docente all'Università di Trieste, fu anche uno degli ideatori del codice fiscale.

La formula è

$$p = \frac{costo\, della\, scommessa}{vincita\, nel\, caso\, indifferente}\,.$$

Nell'esempio $\frac{100}{125}$.

Con questa definizione, un esperto attuario può fissare il premio assicurativo per un evento per il quale non sia disponibile una casistica significativa, come l'immissione sul mercato di un farmaco da parte di una nuova azienda, o un viaggio su Marte; o esiste una casistica assolutamente non omogenea.

Il ricorso alla probabilità soggettiva è frequentissimo in Farmacia e Medicina.

Esempio 1.

Leggiamo([160]) per esempio sul sito dell'ECDC, European Centre for Disease Prevention and Control:

On the basis of the information currently available, ECDC considers that:

- the likelihood of infection for EU/EEA citizens residing in or visiting Hubei province is estimated to be high;
- the likelihood of infection for EU/EEA citizens in other Chinese provinces is moderate and will increase;
- there is a moderate-to-high likelihood of additional imported cases in the EU/EEA;
- the likelihood of observing further limited human-to-human transmission within the EU/EEA is estimated as very low to low if cases are detected early and appropriate infection prevention and control (IPC) practices are implemented, particularly in healthcare settings in EU/EEA countries;

Il soprastante testo non si spinge fino a dare stime numeriche dei valori di probabilità, ma molto chiaramente parla in termini di probabilità (o verosimigliana: *likelihood*) "alta", "moderata", "da-moderata-ad-alta", "da molto bassa a bassa".

[160] Letto il 4 febbraio 2020 in https://www.ecdc.europa.eu/sites/default/files/documents/novel-coronavirus-risk-assessment-china-31-january-2020_0.pdf

Le valutazioni di probabilità soggettiva prodotte da enti considerati autorevoli possono orientare significativamente i comportamenti, dei singoli e delle comunità, sia direttamente sia influenzando (e di fatto fungendo da base teorica) l'emanazione di regolamenti o leggi, a vari livelli di autorità.

Anche le norme antisismiche italiane a cui devono sottostare i nuovi edifici (coi relativi costi associati), comprese le farmacie e soprattutto gli ospedali, sono basate su valutazioni di probabilità soggettiva, che classificano il rischio sismico nelle varie zone. In particolare la "zona 1" è quella in cui *si ritiene* che probabilità che capiti un forte terremoto sia *alta* (in un prossimo futuro; idealmente, in via semplificata, si pensi a 50 anni). E poi vi sono le zone 2, 3, e 4. Con ovvie differenze nei costi di costruzione.
Mappe che le leggi possono cambiare nel tempo, in base a valutazioni soggettive mutevoli sia per nuovi dati (fra cui i terremoti) che cambiamenti delle composizioni delle commissioni scientifiche che di pensieri di singoli esperti nel corso del tempo, si veda per esempio l'articolo scientifico *Italy's new seismic hazard map is back to square one* (2023)

Naturalmente nel corso della storia un'infinità di volte gli *esperti* hanno sbagliato le stime, anche in un modo clamoroso; si veda per esempio lo spassoso libro *La parola all'esperto.* Tuttavia questo fenomeno si riduce se si distinguono i *sedicenti* esperti dagli esperti deputati da organismi già di per loro, in qualche modo, di alto livello. (Eppure anche qua, c'è stato talvolta *da mettersi le mani nei capelli.*)

Se invece scendiamo al livello dei profani relativamente ad un certo argomento specialistico, in generale le loro stime di frequenza o probabilità (il che è relativamente equivalente) in generale valgono, per così dire, *un po' meno di nulla*, con usuali sovrastime di parecchi ordini di grandezza – anche per la potenza della manipolazione mediatica – delle frequenze (e quindi delle associate probabilità) di fenomeni anche ampiamente considerati e discussi pubblicamente.

Le valutazioni di probabilità soggettiva ovviamente sono alla base della vita di tutte le persone, ma ad un livello basico, senza applicazione di formule, per esempio quando si ritiene più probabile una cosa di un'altra.

Ad un livello matematico più fine, le valutazioni di probabilità soggettiva governano molte scelte di tipo medico e sanitario.

Ad un livello matematico ancora superiore, esse sono alla base di buona parte dell'economia mondiale, governando la finanza speculativa, le assicurazioni, i bonds...
Con specifico riferimento alla Medicina e alla Farmacia, si considerino in particolare gli *ebola bonds*, che traggono il nome dal morbo ebola ma possono applicarsi ad altri, che sono vere e proprie scommesse sulle epidemie. Queste scommesse in teoria sono formulate *positivamente*, perché gli investitori nazionali guadagnano se l'epidemia *non* si verifica – e i danni li pagano organismi sovranazionali come la Banca Mondiale.
Ma distorsioni sono possibili, come vediamo in questo passaggio:

> *"to do so Ebola must kill at least 20 people in at least one other country. So far, neighbouring Uganda has only had two victims. (...) Congolese health authorities have an incentive to let the virus move into Uganda in order to unlock more aid."*(161)

[161] Reuters in https://www.reuters.com/article/us-worldbank-ebola-breakingviews/breakingviews-ebola-bonds-are-wonky-way-to-tackle-pandemics-idUSKCN1V30SW, consultato il 5 marzo 2020.

27.6 Concezione assiomatica della probabilità

Ω Lettera greca *omega* maiuscola, presente sulle banconote degli euro.

Le basi, gli assiomi

La concezione assiomatica della probabilità è astratta. Con definizioni e assiomi si crea la probabilità, interpretabile in modo compatibile con le altre 3 concezioni della probabilità viste:

• Ω: *evento certo*.
(Esempi: "il dado fa 1 o 2 o 3 o 4 o 5 o 6"; "sopravvive 5 anni o no").

• $\mathbb{A}$: *σ-algebra degli eventi*: tutti gli eventi *ragionevolmente* considerabili.
Tecnicamente: un sottoinsieme delle parti di Ω (cioè di $\mathbb{P}(\Omega)$) sufficientemente regolare, precisamente tale che:
◇ $\varnothing, \Omega \in \mathbb{A}$
◇ $(\forall A \in \mathbb{A})\ A^C \in \mathbb{A}$ (dove A^C è il complementare di A)
◇ $(\forall A_1, ..., A_n, ... \in \mathbb{A})\ \cup_{n=1}^{\infty} A_n, \cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{A}$.

• La *[funzione] probabilità* $P : \mathbb{A} \to [0,1]$ tale che
◇ $P(\Omega) = 1$ (l'evento certo ha probabilità 100%)
◇ $P(A_1 \cup^* A_2 \cup^* ... \cup^* A_n \cup^* ...) = P(A_1) + ... + P(A_n) + ...$
dove $\cup^*$ indica l'unione disgiunta cioè con intersezione vuota.

• Lo *spazio di probabilità*: la terna ordinata $(\Omega, \mathbb{A}, P)$.

• Si definisce la *probabilità condizionata*

$$P(B|A) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{91}$$

per la quale è apparsa conveniente l'interpretazione di probabilità che si verifichi B *sapendo* che si è verificato A. Per esempio con riferimeno a un dado (regolare)

$$P(\text{"}dispari\text{"}|\text{"}primo\text{"}) = \frac{P(\text{"}dispari\text{"} \wedge \text{"}primo\text{"})}{P(\text{"}primo\text{"})} =$$

$$= \frac{P(\{2,3,5\} \cap \{1,3,5\})}{P(\{2,3,5\})} =$$

$$= \frac{P(\{3,5\})}{P(\{2,3,5\})} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

- *L'evento impossibile*, che ha probabilità 0.

27.7 L'evento impossibile fa inghippi che fuggiremo

L'impossibilità logica è diversa dall'impossibilità probabilistica. Certi eventi di probabilità 0 *potrebbero* succedere dal punto di vista logico.

Leggiamo nel libro (Zanichelli, 2022) di Andrea Sgarro et. al. Statistica di base:

> Purtroppo se si ammettono le probabilità *estreme* zero e uno (...) il discorso diventa sottile

Non ci addentreremo nella questione. Lo scrivente garantisce personalmente al Lettore che un *prefissato* evento di probabilità 0 non capiterà comunque *mai*. Non[(162)] se ne preoccupi.

[162] Produciamo qua 2 esempi originali. Se Pierino Pazientino inizia a sommare i cubi degli interi positivi in un qualunque ordine che a lui piace

$1^3 + 1^3$

$1^3 + 2^3$

...

la probabilità che ottenga un numero cubo (come 27, o 1000) entro un anno, a qualunque velocità svolga i calcoli, è 0. Questa è un'impossibilità probabilistica e contemporaneamente logica, perché è stato dimostrato che la somma di 2 cubi interi positivi non può essere un cubo.

Invece che 2 persone che non si vedono scelgano lo stesso punto di un circolo disposto orizzontalmente e rotante – se mai fosse realizzabile tale in effetti non concretamente realizzabile esperimento – è evento possibile dal punto di vista logico ma con probabilità 0, cioè impossibile dal punto di vista probabilistico.

27.8 Mortalità e letalità di una malattia o infezione

Il concetto di probabilità condizionata è sottostante alla distinzione fra *mortalità* e *letalità* di una malattia, qua definibili ultrasemplificatamente così:

$$\text{mortalità} := \frac{morti}{abitanti} = P(morte)$$

$$\text{letalità} := \frac{morti}{malati} = P(morte\,|\,malato)$$

naturalmente in un senso frequentista (cioè in pratica contando i morti), e ovviamente (sia per la mortalità che per la letalità) bisognerà specificare un intervallo di tempo, per esempio dall'inizio alla “fine" di un'epidemia.
Per esempio leggiamo([163]) sulla peste del Trecento:

> Una volta giunta in Europa, la peste nera si diffuse rapidamente perdurando tra i sei e i nove mesi nelle aree colpite. Il tasso di mortalità medio fu di circa il 30% nel totale della popolazione, mentre il tasso di letalità fu circa il 60%.

Si noti che per il covid-19 è invalso di fatto lo standard di contare in *casi*, cioè gli infetti riconosciuti, e non quelli che in senso stretto sarebbero i *malati*, cioè malati in senso clinico, cioè con sintomi: sono conteggiati i sintomatici e gli asintomatici, il che li aumenta molto di numero, però semprechè riconosciuti, il che li diminuisce di numero. Una lunga dettagliata dissertazione sulla questione si trova nella pagina web OMS in https://www.who.int/news-room/commentaries/detail/estimating-mortality-from-covid-19, che infine conclude che... non è possibile stabilire quale sia la letalità del covid-19, più specificamente il *case fatality ratio* (CFR), per varie ragioni che elenca. Per farsi un'idea della distinzione fra IFR, *infection fatality rate*, e CFR, *case fatality rate*, si veda il testo – comunque discutibile – in https://en.wikipedia.org/wiki/Case_

[163] Da Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Peste nera*.

fatality_rate. La questione, sia teorica ovvero definizionale, che pratica ovvero numerica, è complessa, e, nel caso del covid, è stata sicuramente influenzata da ciclopici interessi economici, e altri indicibili.
Di fatto indurre nell'umanità la convinzione probabilistica che se ci si contagia molto probabilmente si muore, ha fatto accettare nel 2020 un rapidissimo mutamento nell'umanità, che ha fatto diventare i super-ricchi del pianeta ancora più spropositatamente ricchi – a danno([164]) di una parte considerevole degli altri 8 miliardi di esseri umani.
Il grandissimo epidemiologo Ioannidis in un articolo([165]) del maggio 2021 stimava in circa lo 0.15% l'IFR del covid-19 al febbraio 2021, "with substantial differences in IFR and in infection spread across continents, countries and locations.".
A metà novembre 2022, in Italia abbiamo quasi 180mila morti e quasi 24 milioni di casi diagnosticati, e il rapporto è 0.75%, 1 "morto covid" ogni 132 casi covid diagnosticati.

27.9 La letalità apre una finestra su un baratro teorico

La posizione epistemologica della probabilità è complessa, e vi si trovano molti paradossi (seppure spesso solo apparenti, e cioè in effetti spiegabilissimi).

Prendiamo non solo per buono ma anche valevole ancora adesso il valore – illustrato in 27.8 – di 0.75% della probabilità che ha avuto di morire ("morte covid", comunque sia stata determinata,

[164] È questione complessa ma per farsi un'idea si legga: "I miliardari a Davos potranno brindare all'incredibile impulso che le loro fortune hanno ricevuto grazie alla pandemia e all'aumento dei prezzi dei generi alimentari e dell'energia, – ha detto Gabriela Bucher, direttrice esecutiva di Oxfam International – ma allo stesso tempo decenni di progressi nella lotta alla povertà estrema rischiano di essere vanificati con milioni di persone lasciati senza mezzi per poter semplicemente sopravvivere" in https://www.oxfamitalia.org/davos-2022-crescono-le-disuguaglianze/.

[165] Ioannidis JPA. Reconciling estimates of global spread and infection fatality rates of COVID-19: An overview of systematic evaluations. Eur J Clin Invest. 2021 May;51(5):e13554. doi: 10.1111/eci.13554. Epub 2021 Apr 9. PMID: 33768536; PMCID: PMC8250317.

non apriamo qua un secondo baratro) un qualunque infettato italiano diagnosticato nel periodo dal 2020 al novembre 2022, preso oggi a caso (in effetti attualmente la probabilità di morire se diagnosticati contagiati è molto minore che all'inizio della pandemia, ma ora non consideriamo questo fatto).
Se dunque un italiano oggi si ritrova diagnosticato contagiato, ha lo 0.75% di probabilità di morire “di" questa infezione?
Sì e no. Se del soggetto sappiamo solo che è italiano e che è diagnosticato contagiato, allora sì, in base a quanto sopra detto si deve concludere che ha lo 0.75% di probabilità di morirne. Ma se sappiamo che ha meno di 30 anni, dobbiamo concludere che la probabilità di morte è circa 0% (vedi figura), e se sappiamo che ha più di 90 anni la probabilità risulta circa del 13%. D'altra parte, valori ancora diversi si otterrebbero considerando il genere, la presenza di un tumore attivo, eccetera. La probabilità dipende in modo sostanziale dall'*informazione*, non è un numero che viaggia appiccicato al soggetto, oppure, se lo è, se vogliamo dire diversamente, è tanto inconoscibile quanto tutte le condizioni che potrebbero influenzarlo. Nel prossimo paragrafo ritorneremo sulla questione con un notevole paradosso.

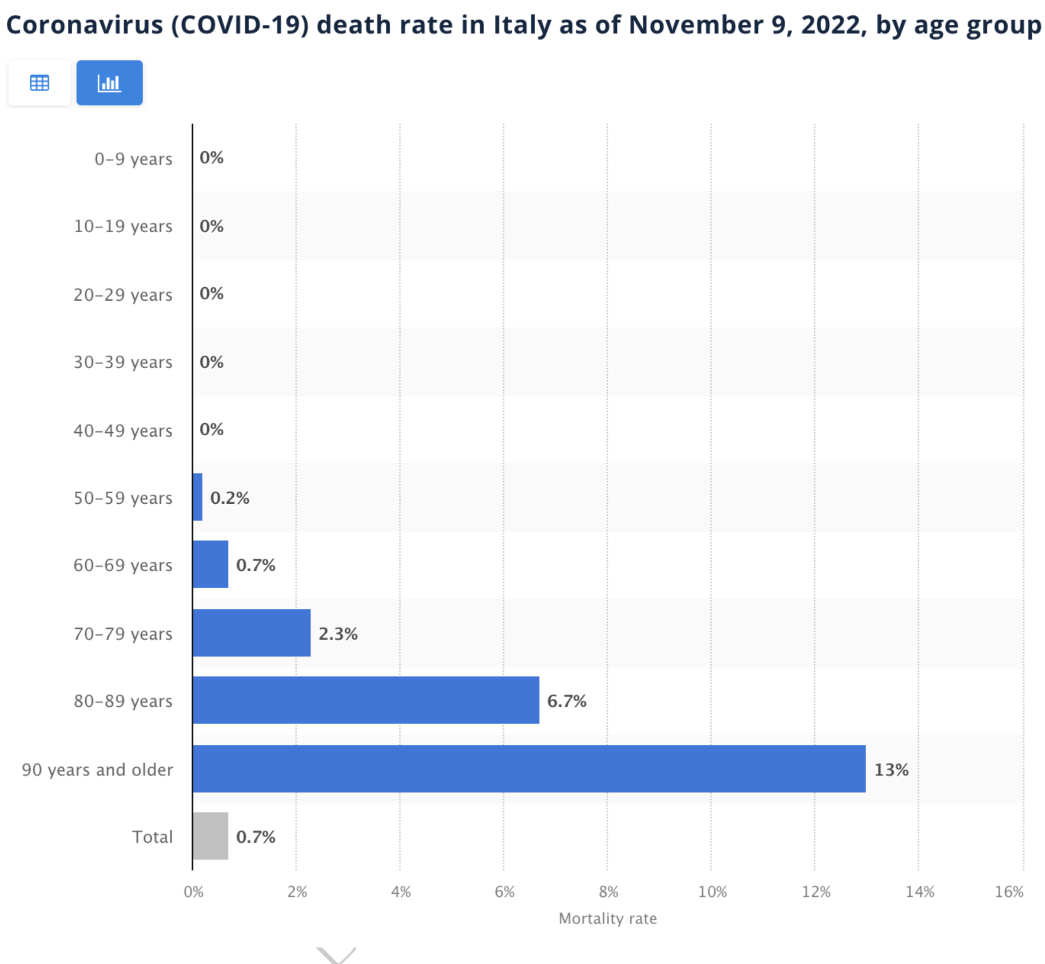

Figure 41: Letalità del covid-19 nelle classi d'età nel mondo. Screenshot da https://www.statista.com/statistics/1106372/coronavirus-death-rate-by-age-group-italy/

27.10 Mettiamo in dubbio l'esistenza della probabilità

Esempio che fa dubitare dell'esistenza della probabilità. Alessio e Berto sono due italiani, gemelli identici maschi. Alessio legge che l'1% degli italiani hanno un certo gene. Essendo italiano ritiene di avere l'1% di probabilità di avere quel certo gene. (Il che è sostanzialmente corretto in base alle informazioni che ha). Berto legge che il 10% dei maschi europei hanno quello stesso gene. Essendo un maschi europeo ritiene di avere il 10% di probabilità di

avere quel certo gene. (Il che è sostanzialmente corretto in base alle informazioni che ha). La cosa sorprendente è che essendo gemelli identici, entrambi hanno il gene, oppure non ce l'hanno.
Chissà qual è la probabilità che entrambi abbiano quel gene...

😐

Si noti che a seconda che si consideri il soggetto come italiano, o maschio europeo, si hanno valori diversi per la – sfuggente – *probabilità di avere quel gene.*

La valutazione (numerica) della probabilità dipende da ciò che si sa del soggetto, non è qualcosa di associato inesorabilmente al soggetto stesso – quel qualcosa <u>non esiste</u>.
Quel qualcosa non esiste!

27.11 Indipendenza degli eventi

Nel caso che sapere che si è verificato A non muti per noi la probabilità che si verifichi B, cioè $P(B|A) = P(B)$, si ottiene, da quest'equazione e dalla (91),

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad \text{eventi indipendenti}$$

e quest'equazione definisce assiomaticamente il caso di 2 *eventi indipendenti*. E si estende a 3 o più eventi, ma la questione è delicata.[166]
Questa degli eventi indipendenti è in qualche modo la formula più importante del Calcolo delle Probabilità fra le non ovvie.

Per esempio

$$P(\text{“la moneta dà testa"} \wedge \text{“il dado dà 4"}) =$$

$$= P(\text{“la moneta dà testa"}) \cdot P(\text{“il dado dà 4"}) =$$

[166] 3 eventi possono essere a 2 a 2 indipendenti senza che siano tutti indipendenti fra loro.

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \,.$$

Invece “dispari" e “primo" non sono indipendenti nel lancio di un dado: $P(dispari) = P(1,3,5) = \frac{1}{2}$ e $P(primo) = P(2,3,5) = \frac{1}{2}$ ma $P(dispari \wedge primo) = P(3,5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ che non è $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$.

27.12 Alcuni teoremi ovvi sulla probabilità

- Si dimostra (sono teoremi) che, per a e B eventi, valgono:
  - ⋄ $P(A^C) = 1 - P(A)$ da cui in particolare $P(\varnothing) = 0$
  - ⋄ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  - ⋄ $P(A \cup^* B) = P(A) + P(B)$ (unione disgiunta)
  - ⋄ $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^C)$
  - ⋄ $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Per le soprastanti 5 formule i disegni insiemistici chiariscono tutto. Poi, ce ne sono[167] di meno ovvie.

27.13 Formula di Bayes

Si dimostra (teorema) la Formula di Bayes: dati un $B \in \mathbb{A}$ e una partizione di Ω, cioè degli insiemi $A_1, \ldots A_n$ disgiunti con unione Ω, vale

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)}$$

$$i = 1, ..., n.$$

[167] Per esempio questa:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = 1 - P(A_1^C \cap A_2^C \ldots)$$

27.14 Legge delle Alternative

Anche la sola uguaglianza dei denominatori della formula precedente è interessante:

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)$$

e in particolare con $n = 2$, scrivendo A invece di A_1 ed essendo necessariamente $A_2 = A^C$ (avendosi una partizione) si ha la

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(A^C)P(B|A^C) \qquad (92)$$

Si faccia un disegno rappresentativo della situazione.

Esempio sulla Legge delle Alternative.

$$P(morte) =$$

$$= P(vaccinato)P(morte|vaccinato) +$$

$$+ P(non\,vaccinato)P(morte|non\,vaccinato)$$

ovviamente con riferimento a una popolazione (statistica) e un intervallo di tempo.

27.15 Alcune note finali

Per esempio uno spazio di probabilità si ottiene con un dado regolare, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, dove $\{1\}$,...,$\{6\}$ sono gli *eventi semplici*, possiamo fissare molto opportunamente $\mathbb{A} := \mathbb{P}(\Omega)$, e la funzione P vale costantemente $\frac{1}{6}$. Per esempio $A := \{2, 3, 5\}$ è l'evento “esce 1 o 3 o 5", ovvero “[esce] [un numero] dispari".
Si calcolino A^C, $P(A^C)$, $\{1, 2, 6\}^C =: B$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(B)$. Poi con lo stesso Ω si trovino altri 2 spazi di probabilità.

Esistono anche spazi di probabilità infiniti, per i quali nessuna uniformità è possibile, e in cui nella realtà sensibile possiamo aspettarci che in generale tenderà a ricorrere una *distribuzione* in qualche modo *a campana* – eventualmente troncata da una parte.

Si noti l'immediata (duplice) conseguenza della (91)

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B).$$

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule dei paragrafi

La concezione classica della probabitlià (1 formula)

Concezione assiomatica della probabilità (molte formule)

Mortalità e letalità di una malattia o infezione (2 formule)

Indipendenza degli eventi (1 formula)

Alcuni teoremi ovvi sulla probabilità

oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

27.16 ESERCIZI SULLA LEZIONE 27

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$\star$ $^{\%}$ Supponiamo che in una certa popolazione la mutazione RX1vis si presenti con probabilità 25% e, indipendentemente, la mutazione RS2vol con probabilità 40%. Che probabilità c'è che un soggetto di quella popolazione abbia la RX1vis e non abbia la RS2vol?

SVOLGIMENTO

$$P((\text{RX1vis})\, \textit{et}\, (\textit{non}\, \text{RS2vol})) =$$

l'avere o non avere la RS2vol è indipendente dall'avere o non avere la RX1vis

$$= P(\text{RX1vis}) \cdot P(\textit{non}\, \text{RS2vol}) =$$

con l'evento complementare

$$= P(\text{RX1vis}) \cdot (1 - P(\text{RS2vol})) =$$

coi dati numerici

$$= 0.25 \cdot (1 - 0.4) =$$

in definitiva

$$\boxed{0.15 = 15\%}$$

Fissiamo l'attenzione per esempio sullo *spazio di probabilità uniforme* $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ del lancio di 1 dado, con 6 *eventi semplici* di probabilità $\frac{1}{6}$, e $64 = 2^6$ eventi nella σ-algebra $\mathbb{A}$ delle parti di Ω:

$$\Omega := \{1,2,3,4,5,6\} \qquad P(k) = 1/6,\ k = 1, ..., 6$$

$$\mathbb{A} := \mathbb{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, ...\{6\}, \{1,2\}, ..., \{1,2,3,4,5\}, \Omega\}.$$

Per esempio $\{1,2\}$ è l'evento "esce 1" *vel* "esce 2"; $P(1,2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
Naturalmente esistono spazi di probabilità finiti non uniformi, per esempio ottenuti con dadi truccati.

Oppure con riferimento a una diagnosi e/o trattamento farmacologico, e un fissato intervallo temporale (per esempio 5 anni), e comunque in un'ottica frequentista, con *scores* da 1=morte a 6=ottimamente, potremmo avere per esempio:

$3\% = P(morte)$ ...
$5\% = P(molto\, male)$ .....
$12\% = P(male)$ ....
$20\% = P(stabile)$ ....
$40\% = P(bene)$ ....
$20\% = P(ottimamente)$ ....

(Si noti la forma più o meno a campana).

Calcoliamo per esempio

$$P(\text{“}migliora\text{”}) = P(\text{“}bene\text{”} \vee \text{“}ottimamente\text{”}) =$$

eventi disgiunti, somma delle probabilità:

$$= P(\text{“}bene\text{”}) + P(\text{“}ottimamente\text{”}) =$$

$$= 40\% + 20\% = 60\%.$$

Per 2 soggetti

$$P(\text{“}entrambi\, morti\text{”}) =$$

$$= P(\text{“}morte\, del\; 1\text{^}\; soggetto\text{”} \wedge \text{“}morte\, del\; 2\text{^}\; soggetto\text{”}) =$$

e nell'ipotesi di indipendenza

$$= P(\text{“}morte\, del\; 1\text{^}\; soggetto\text{”}) \cdot P(\text{“}morte\, del\; 2\text{^}\; soggetto\text{”}) =$$

$$= 0.03 \cdot 0.03 = 0.0009 = 0.09\%$$

(Poco meno dell'1 per mille). Ma se i soggetti sono legati affettivamente, l'ipotesi di indipendenza diventa alquanto inverosimile. (La morte dell'uno in generale aumenta la probabilità di morte dell'altro a prescindere dalla terapia seguita).

Si noti che appena si esce dalla modellizzazione “perfetta" dei dadi e delle monete, si introducono inevitabilmente problematiche che poi di fatto si trasformeranno in incertezze nei risultati statistici. (Dove l'indipendenza, e la normalità gaussiana dei dati – che vedremo – sono spesso ipotesi implicite, di fatto imperfette).
Nota. Il seguente esercizio richiede una calcolatrice con 8 cifre, o una moltiplicazione con carta e penna.
ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$\star \approx \%$ Ogni volta che una fissata persona fa una certa cosa, per esempio va in una zona infestata da insetti pericolosi, si espone ad un certo rischio sanitario, per esempio di subire una puntura d'insetto pericoloso, con probabilità 7%. Fissato questo esempio (ma ugualmente si potrebbe ragionare in un caso

generale) che probabilità c'è che andando 4 volte nella zona infestata – supponendo indipendenti gli eventi – quella persona venga punta da qualche insetto pericoloso?

SVOLGIMENTO

$$P(punto\, al\, 1^\wedge\, viaggio) = ... = P(punto\, al\, 4^\wedge\, viaggio) = 7\% = \frac{7}{100}$$

Evento complementare:

$$P(non\, punto\, al\, 1^\wedge\, viaggio) = ... = P(non\, punto\, al\, 4^\wedge\, viaggio) = 93\% = \frac{93}{100}$$

Evento composto:

$$P(mai\, punto\, nei\, 4\, viaggi) = \frac{93}{100} \cdot \frac{93}{100} \cdot \frac{93}{100} \cdot \frac{93}{100} = \left(\frac{93}{100}\right)^4$$

Evento complementare:

$$P(punto\, almeno\, 1\, volta\, nei\, 4\, viaggi) = 1 - \left(\frac{93}{100}\right)^4 =$$

$$= 1 - \frac{93^4}{100^4} = 1 - \frac{74\,805\,201}{100\,000\,000} = \frac{100\,000\,000 - 74\,805\,201}{100\,000\,000} =$$

$$\boxed{\frac{25194799}{100\,000\,000} \approx 0.252 = 25.2\%}$$

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

$\star$ Ogni volta che una fissata persona fa una certa cosa, per esempio va in metropolitana, si espone ad un certo rischio sanitario, per esempio di entrare in contatto coi pidocchi, con probabilità p. Fissato questo esempio (ma ugualmente si potrebbe ragionare in un caso generale) che probablità c'è che in 10 viaggi in metropolitana – supponendo indipendenti gli eventi – quella persona sia entrata in contatto coi pidocchi?

SVOLGIMENTO

$$P(contatto\, nel\, 1^\wedge\, viaggio) = ... = P(contatto\, nel\, 10^\wedge\, viaggio) = p$$

Evento complementare:

$$P(non\, contatto\, nel\, 1^\wedge\, viaggio) = ... = P(non\, contatto\, nel\, 10^\wedge\, viaggio) = 1 - p$$

Evento composto:

$$P(nessun\, contatto) = (1-p) \cdot ... \cdot (1-p) = (1-p)^{10}$$

Evento complementare:

$$\boxed{P(almeno\, un\, contatto) = 1 - (1-p)^{10}}$$

ESERCIZIO$_{\mu 2019}$
$*$ % In via semplificata, consideriamo qua terapie che possono avere solo esito fatale (morte) o successo (non si considerano diversi gradi di successo).
Per un certo paziente si stanno ipotizzando 4 procedure:
terapia T1 e poi terapia T2
terapia T2 e poi terapia T4
terapia T3 e poi terapia T4
terapia T5.
Supponendo l'indipendenza degli eventi, trovare quale procedura conviene avendosi queste probabilità di esito fatale:
T1: 9%, T2: 12%, T3: 4%, T4: 11%, T5: 13%.
SVOLGIMENTO
Con gli eventi complementari, si hanno queste probabilità di successo:
T1: 91%, T2: 88%, T3: 96%, T4: 89%, T5: 87%.
Si ha

$$P(successo\, procedura\ 1\hat{}) = 0.91 \cdot 0.88 = 80.08\%$$

$$P(successo\, procedura\ 2\hat{}) = 0.88 \cdot 0.89 = 78.32\%$$

$$P(successo\, procedura\ 3\hat{}) = 0.96 \cdot 0.89 = 85.44\%$$

e allora conviene l'ultima procedura:

$$\boxed{\text{terapia T5}}$$

Esercizio$_{\mu}^{f}$ **risolto.** Un'urna U contiene 20 palline bianche e 40 nere, e un'urna V contiene 5 palline bianche e 6 nere. Si sceglie a caso un'urna e si estrae a caso una pallina che risulta bianca. Che probabilità c'è che sia stata scelta l'urna U?
Svolgimento$_{\mu}$
$U : 20b + 40n$
$V : 5b + 6n$
A_1: "scelta a caso l'urna U"
A_2: "scelta a caso l'urna V"
B: "estratta a caso una pallina bianca".
A_1 e A_2 costituiscono una partizione dell'evento certo.

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{20}{60}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{20}{60} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{11}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{11}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{5}{11}} =$$

moltiplicando numeratore e denominatore per $3 \cdot 11$

$$\frac{11}{11 + 5 \cdot 3} = \frac{11}{26} \approx 0.423 = 42.3\%.$$

(Osserviamo che allora con probabilità $\approx 58\%$ era stata scelta l'urna V e questo riflette il fatto che là c'erano proporzionalmente più palline bianche: visto che è venuta una pallina bianca, più probabilmente avevamo scelto quell'urna).
Esercizio$_\mu$ Costruire e risolvere un esercizio analogo.

In questa Lezione si fa riferimento alla concezione frequentista della probabilità, che detto molto semplificatamente ci fa ritenere che se finora le cose sono andate in un certo modo in un gran numero di casi, continueranno ad andare così. Con riferimento alla Farmacologia: se 3 014 soggetti sono morti di 10 000 a 5 anni dal trattamento, riteniamo che la *probabilità* di morte sia circa del 30% (a 5 anni, con quel trattamento, in una popolazione *simile*).