29 Introduzione alle variabili aleatorie

29.1 Variabili aleatorie discrete e continue

Una funzione (che ad eventi semplici associa numeri reali)

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

si chiama *variabile aleatoria* (purché sia sufficientemente regolare[168] come sono tutte quelle che capitano a un livello elementare).

Per esempio una variabile aleatoria è il risultato del lancio di un dado, che potremo rappresentare così in 2 diversi casi:

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^{\textit{dado equilibrato}}_{\textit{ovvero regolare}} \qquad Y := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}^{\textit{qua un certo}}_{\textit{dado truccato}}$$

ed entrambe potrebbero rappresentare anche le durate di due malattie in giorni, alquanto irrealistiche per la lontananza da distribuzioni a campana – si disegnino i bar chart delle probabilità – come pure quest'altra

$$Z := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$$

decisamente più realistica, che potrebbe anche rappresentare il punteggio da 1 (morte) a 5 (ottimo), esito (per esempio a 3 anni) di un intervento farmacologico.

Si noti che nel caso delle durate in giorni, 5 è effettivamente quintuplo di 1, mentre "ottimo" non è quintuplo di "morte": in quel caso i numeri sono solo simboli senza valore quantitativo.

La variabile aleatoria del dado va vista come il risultato del lancio del dado <u>prima di lanciare il dado</u>. Dopo averlo lanciato invece avremo un numero, che è tutt'altra cosa. E dopo averlo lanciato più volte avremo un dataset, che è un'altra cosa ancora.

[168] Precisamente deve essere $\{\omega | X(\omega) \leq t\} \in \mathbb{A}$ per ogni t reale; questione sottile.

Allora, finora, niente di nuovo nella sostanza, solo una diversa impostazione di fenomeni già considerati.

Un'altra variabile aleatoria, non così facilmente rappresentabile, è il peso in kg del primo bambino che nascerà vivo il 1 gennaio 2020, ora locale del luogo. Potrebbe essere 3.412..., 4.576..., eccetera. Ragionevolmente parlando, ognuno dei singoli valori ha probabilità 0: perché mai il primo bambino dovrebbe pesare *esattamente* (con infiniti decimali) 3.18452785356... kg? Scriveremo

$$\{X < 3.5\} \text{ intendendo l'evento } \{\omega | X(\omega) < 3.5\}$$

e similmente con $\leq$ e $>$ e $\geq$.
E ancora con tutte le possibili variazioni di $<$ e $\leq$

$$\{2.5 < X \leq 3.5\} \text{ intendendo l'evento } \{\omega | 2.5 < X(\omega) \leq 3.5\}$$

e per questi eventi, e altri del tipo $X \in I \subset \mathbb{R}$, con I insieme sufficientemente regolare (in Farmacia quasi solo intervalli), possiamo invece attenderci probabilità diverse da 0, per esempio
$P(X < 20) = 1$ il bambino peserà sicuramente meno di 20 chili,
$P(X < 0.1) = 0$ il bambino nato vivo non peserà meno di 100 g, e – ipotizziamo qua – con probabilità 50% peserà meno di 2.1 kg: $P(X \leq 2.1) = 0.5$. E magari ancora $P(X \leq 2.5) = 0.7 = 70\%$.

La funzione

$$\boxed{F_X(t) := P(X \leq t) \text{ si chiama funzione di ripartizione}} \qquad (93)$$

della variabile aleatoria X, *cumulative distribution function*:

$$F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

In effetti i valori di essa sono in $[0, 1]$ e il grafico ha più o meno vagamente una forma sigmoide, da 0 in $-\infty$ a 1 in $+\infty$.

Nei grafici (uno è in figura) delle funzioni di ripartizione delle v.a. X e Y inizialmente considerate si osserverà che i salti hanno ampiezze pari alle corrispondenti probabilità. E questo è un fatto generale che succede per tutte le variabili aleatorie discrete:

$$\forall\, x \text{ punto di salto } P(X = x) = \textit{salto}$$

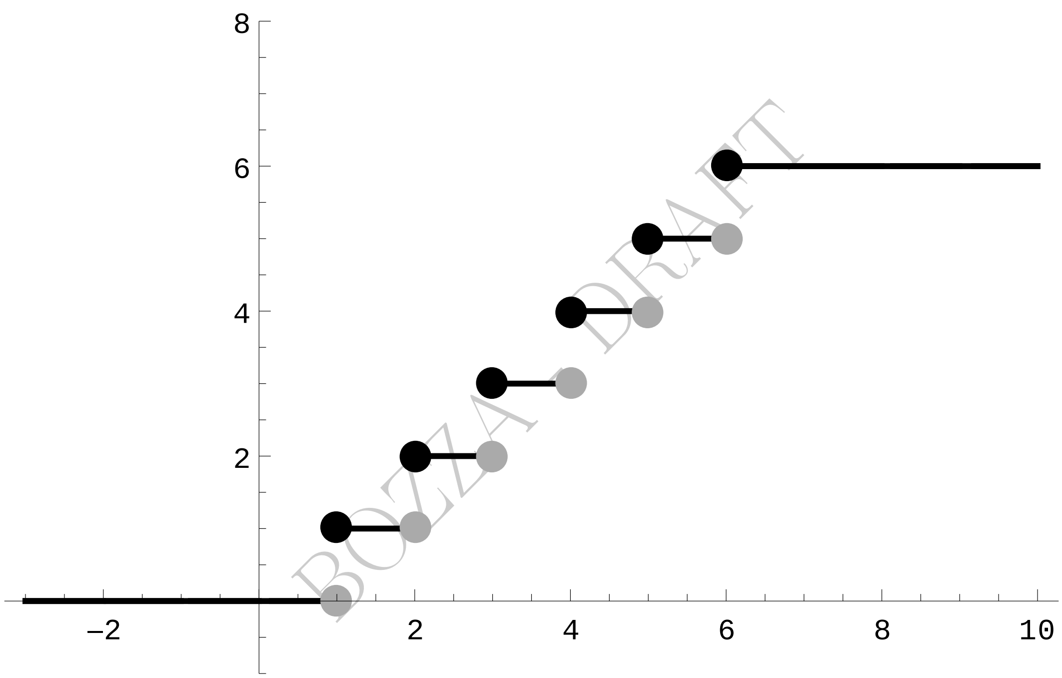

Figure 43: Funzione di rìpartizione del dado regolare. Ha 6 salti di $\frac{1}{6}$.

La prima v.a., quella del dado, si dice *discreta* (cioè a valori “ben separati", anche eventualmente infiniti) e la seconda *continua*.

Si noti che, almeno per le variabili aleatorie continue, questa impostazione è veramente innovativa, e permette una valida trattazione di casi che altrimenti nel modo precedente si ridurrebbero semplicemente ad affermare che ogni singolo valore ha probabilità nulla

$$\forall\, t \quad P(X = t) = 0 \qquad (X \textbf{ v.a. continua})$$

e sommando o moltiplicando zeri non si otterrebbe niente di significativo.

Teorema (ovvio).

$$\boxed{P\{a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a),\ \forall\, a, b} \tag{94}$$

e uno o entrambi gli estremi possono essere infiniti, e allora $F_X(x)$ andrà inteso nel senso del limite: $F_X(-\infty) = 0$ e $F_X(+\infty) = 1$.

La soprastante fondamentale formula darà
per le variabili aleatorie discrete: somme o serie;
per le variabili aleatorie continue: integrali definiti.
Anticipiamo che per le densità delle variabili aleatorie continue è

$$\boxed{\text{funzione di ripartizione: } \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt} \tag{95}$$

$$\boxed{\text{(derivata della f.r.)} \quad F' = f \quad \text{(densità)}} \tag{96}$$

$$\boxed{P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(t)\,dt} \tag{97}$$

La funzione di ripartizione delle v.a. X, Y, Z... potrà trovarsi denotata con F_X, F_Y, F_Z... ma anche con altri simboli: F, F_1, G...

La densità delle v.a. X, Y, Z... potrà trovarsi denotata con f_X, f_Y, f_Z... ma anche con altri simboli: f, f_1, g...

Vediamo un esempio di applicazione della (97), con primo estremo $a = -\infty$.

ESERCIZIO$_{\mu 2021}$ $^{\%}$ Si consideri una variabile aleatoria Z di densità $f(t) = t$ per $1 \leq t \leq \sqrt{3}$, e 0 altrimenti. Calcolare $P\left(Z < \frac{3}{2}\right)$.

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare quello della virgola decimale, a scelta).

$$P\left(Z < \frac{3}{2}\right) =$$

con $<$ oppure $\leq$ vale uguale perchè Z è una variabile aleatoria continua

$$= P\left(Z \leq \frac{3}{2}\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{3}{2}} \text{densità} =$$

la densità è 0 prima di $t = 1$ e dopo $t = \sqrt{3} \approx 1.73$ ma $\frac{3}{2} = 1.5$ è più piccolo

$$= \int_{1}^{\frac{3}{2}} t\, dt =$$

$$= \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{9-4}{8} =$$

$$= \frac{5}{8} = 0.625 =$$

$$\boxed{62.5\%}$$

Tipico delle densità riferite alla realtà sensibile, sia discrete che continue, è avere – spesso ma non proprio sempre – una forma “più o meno a campana".

29.2 La campana gaussiana e quella di Cauchy

La più “pura" delle campane è la *campana gaussiana* della densità normale standard

$$\phi(t) := \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

che però ha il difetto che (quasi tutti) gli integrali di essa non si riescono a calcolare con le funzioni elementari.

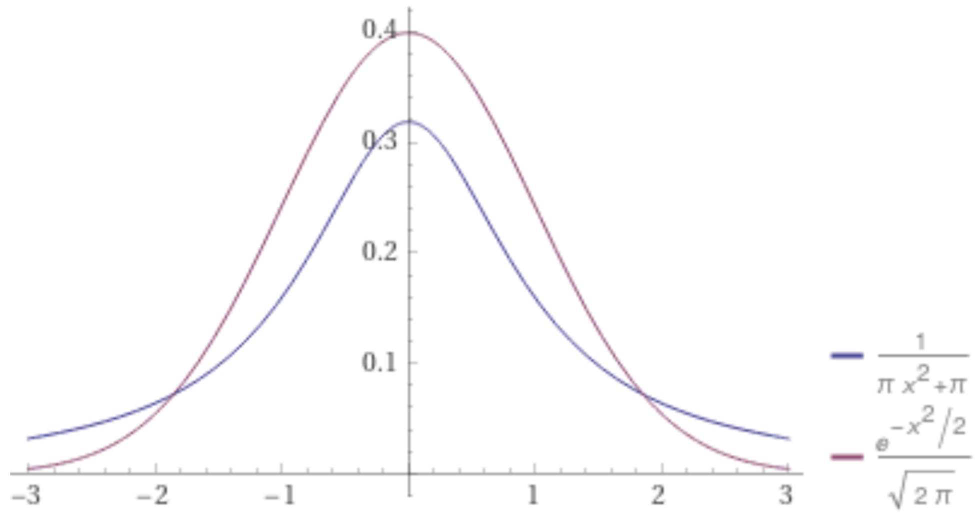

Figure 44: Magenta: densità normale standard (campana gaussiana). Blu: densità di Cauchy. Screenshot da WolframAlpha.

Un modello più semplice di campana è la densità di Cauchy

$$f(t) := \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

per la quale si ha subito, integrando elementarmente,

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}(\arctan b - \arctan a)$$

per esempio

$$P(1 < X \leq \sqrt{3}) = \frac{1}{\pi}(\arctan\sqrt{3} - \arctan 1) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4-3}{3\cdot 4} =$$

$$= \frac{1}{12} \approx 0.0833 = 8.33\%.$$ link a WolframAlpha ->

Definizione (implicita): code, e code pesanti.
La densità di Cauchy ha *code* molto più *pesanti* della densità normale.