30 Variabili aleatorie discrete

Ogni giorno che aprirete la porta della vostra farmacia, si formeranno un'infinità di variabili aleatorie, concetto che vogliamo imparare a capire per una ragionevole gestione della comunque inevitabile incertezza del reale, e ricordiamo che la variabile aleatoria è una funzione che a eventi associa numeri:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Variabili aleatorie discrete
Possibili valori: staccati

– numero di confezioni di farmaci che venderete quel giorno
– numero di clienti che entreranno in farmacia quel giorno
– oppure numero di bambini
– età del primo cliente, nel senso della Farmacia e cioè anni interi compiuti

Variabili aleatorie continue
possibili valori: contigui

– intertempo fra ultimo e penultimo cliente, in minuti, con decimali
– indice di massa corporea, del primo cliente, con decimali
– età del primo cliente, in anni, ma considerata con virtualmente infinita precisione, con tutti i decimali

Entrambi i tipi di v.a. sono caratterizzati da 2 funzioni: dalla

$$\boxed{F_X(t) := P(X \leq t) \text{ funzione di ripartizione}} \tag{98}$$

e dalla funzione densità, che ha definizioni diverse nei 2 casi.

Adesso approfondiamo le **variabili aleatorie** **discrete**.
Per esse la funzione di ripartizione è poco significativa e poco usata. La densità di una v.a. discreta X è

$$\boxed{p_i = P(X = i) \qquad i \in \mathbb{Z}} \tag{99}$$

e qua abbiamo supposto, per semplicità di trattazione, che i possibili valori siano proprio numeri interi, non solo staccati.

Sia per esempio X_1 il numero di persone, da 0 a 5, che avranno effetti collaterali significativi da un farmaco 1 dato a 5 persone:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cioè:
0 persone, con probabilità 10% .`X`
1 persona, con probabilità 20% .`XX`
2 persona, con probabilità 40% .`XXXX`
3 persona, con probabilità 20% .`XX`
4 persone, con probabilità 10% .`X`
5 persona, con probabilità 0% .

Sia per esempio X_2 il numero di persone, da 0 a 5, che avranno effetti collaterali significativi da un farmaco 2 dato a 5 persone:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cioè:
0 persone, con probabilità 10% .`XX`
1 persona, con probabilità 40% .`XXXX`
2 persona, con probabilità 30% .`XXX`
3 persona, con probabilità 10% .`X`
4 persone, con probabilità 0% .
5 persona, con probabilità 0% .

Si capisce che il profilo di sicurezza del farmaco 2 è migliore.

In effetti le variabili aleatorie offrono un inquadramento per molto di ciò che avviene in Farmacia, in Medicina, in Epidemiologia, e ovviamente in Economia, e perfino nella Storia – fino alla nostra vita personale: quante volte avremo l'influenza nel 2026? Quanti giorni di malattia totalizzeranno i nostri dipendenti?

Data una v.a. discreta, cioè con valori “ben separati", come per esempio la X e la Y della lezione precedente, o queste

$$Z := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad W := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \dots & \frac{1}{2^k} & \dots \end{pmatrix}\begin{matrix} \leftarrow infiniti\ valori\ possibili\ ma\ staccati \\ \leftarrow qua\ si\ forma\ una\ serie\ geometrica \end{matrix}$$

individuiamo dei *valori* x_k, in numero finito o anche infiniti ma comunque “ben separati" (non necessariamente interi) e corrispondentemente le loro probabilità $p_k := P(v.a. = x_k)$:

$$X := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_k & [\dots] \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_k & [\dots] \end{pmatrix}\begin{matrix} \leftarrow fra\ le\ quadre\ possono\ esserci\ numeri,\ se\ i \\ valori\ sono\ infiniti,\ oppure\ no\ nell'altro\ caso \end{matrix}$$

e ovviamente deve essere, nel senso di una somma o di una serie,

$$somma\ su\ tutti\ gli\ indici \rightarrow \sum_k p_k = 1 \qquad (esistono\ serie\ con\_somma\ 1,\ non\ solo\ geom.)$$

La funzione di ripartizione $F_X(t) := P(X \leq t)$ di una v.a. discreta X è una *funzione a scala (step function)* costante fra x_{k-1} e x_k, con salti pari a p_k in x_1, x_2,...,x_k... e “pallini pieni" a sinistra (continuità a sinistra).
Da adesso consideriamo solo valori interi; allora $p_k = P(v.a. = k)$.
La funzione già prima scritta (con i invece di k, ed è ovviamente indifferente)

$$\boxed{p_k = P(X = k) \qquad k \in \mathbb{Z}} \tag{100}$$

(ma altri Autori preferiranno

$$p_k := \begin{cases} P(X = k) & se\ k \in \mathbb{Z} \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

coi valori nulli per k non intero) si chiama ***densità*** della variabile aleatoria discreta X. Tenderemo a usare la lettera p coi pedici per le probabilità , mentre per i valori della v.a. possiamo usare x_1, x_2... per una v.a. X e y_1, y_2... per una v.a. Y, eccetera. O anche x_0, x_1... iniziando da 0, o da altro numero, a seconda dei casi. Per esempio per le X e W di prima

$$p_k = P(X = k) := 1/6, \quad k = 1, \dots, 6$$

$$p_k = P(W = k) := 1/2^k, \quad k = 1, 2, 3...$$

Le densità si rappresentano graficamente coi bar chart.

30.1 Alcuni esempi di variabili aleatorie discrete

Esempio$_\mu$ (sulla notazione "binomiale" delle variabili aleatorie discrete).
Per una v.a. a 3 valori con $p_1 = \frac{1}{\pi}$ e $p_2 = \frac{1}{\pi^2}$ determinare p_3.
Si tratta di trovare l'unico numero incognito p_3 in

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{1}{\pi} & \frac{1}{\pi^2} & p_3 \end{pmatrix}$$

e da $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} + p_3 = 1 \qquad \leftarrow$ somma 1 delle probabilità
segue subito $p_3 = 1 - \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\right) \approx 0.5804 = 58.04\%$.

Il [risultato del lancio di un] dado (regolare) è una v.a. $X \sim \mathbb{U}\{1, 6\}$ e il simbolo $\sim$ lo leggeremo *"con legge"* e il simbolo $\mathbb{U}\{1, 6\}$ lo leggeremo *"con legge uniforme discreta di parametri 1 e 6"*:

$$X := \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ \frac{1}{6}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad \textit{equivalentemente}: \; X \sim \mathbb{U}\{1, 6\}.$$

E associando a 0 e 1 le facce di una moneta

$$M := \begin{pmatrix} 0\,1 \\ \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \mathbb{U}\{0, 1\} \text{ rappresenta una moneta } \textit{equilibrata}.$$

Esercizio$_\mu$ Si rappresenti graficamente la densità e la funzione di ripartizione di $\mathbb{U}\{0, 1\}$ e $\mathbb{U}\{1, 6\}$.

Esercizio$_\mu$ Ecco 3 variabili aleatorie discrete non uniformi

$$Y := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

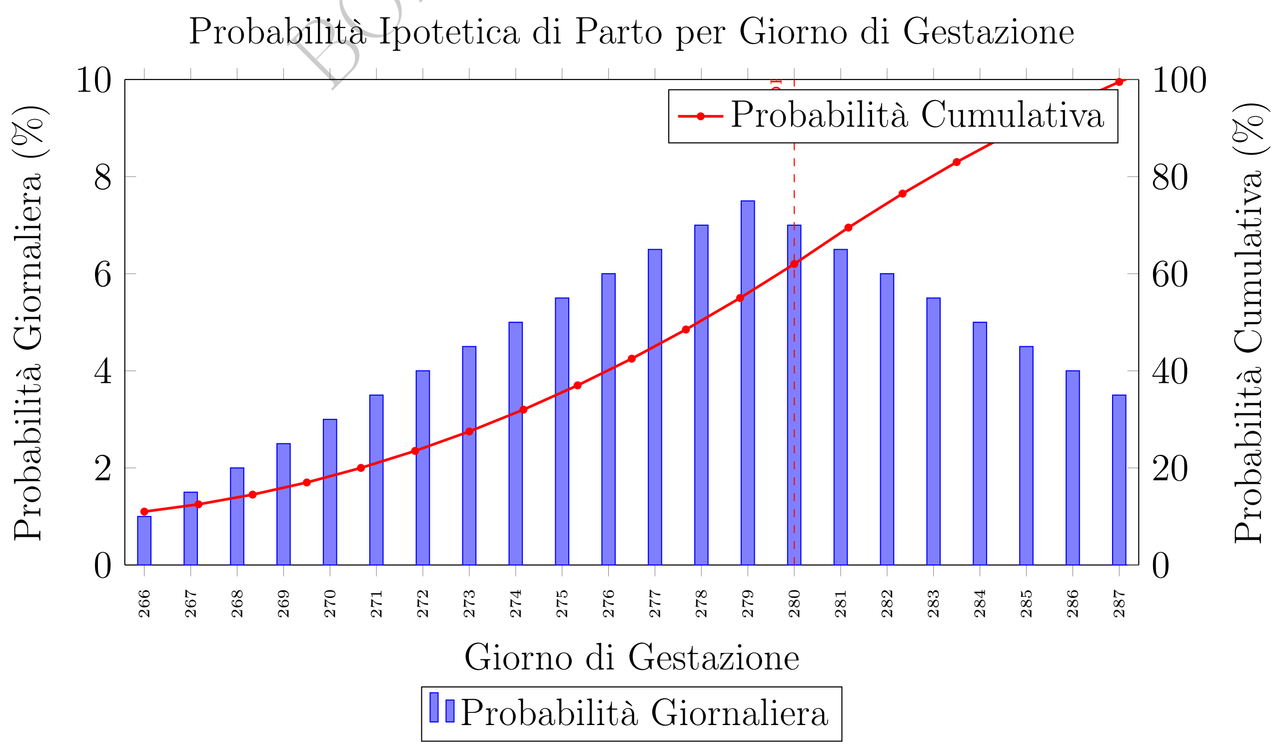
$$U := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$V := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$$

che potrebbero rappresentare la durata in giorni di 3 malattie oppure di una malattia con 3 diverse terapie.
Si disegnino i bar chart delle probabilità, ovvero, delle densità, e i grafici delle funzioni di ripartizione. Si noterà che la prima è alquanto irrealistica, con una forma decisamente non a campana.

30.2 Forma del grafico di densità e f.r.

Fissiamo bene in mente:
– funzioni di ripartizione: sempre"in qualche modo" più o meno sigmoidi, sia per v.a. discrete che continue
– densità: spesso"in qualche modo" più o meno a campana.



(Non sono i valori esatti ma una semplificazione ipotetica).

Sia per variabili aleatorie discrete che continue, la funzione di ripartizione è almeno debolmente crescente (non decrescente) dal valore 0 in $-\infty$, nel senso del limite, al valore 1 in $+\infty$, nel senso del limite, quindi

— il grafico della f.r. ha forma almeno vagamente sigmoide, seppure non sono esclusi una sorta di “terrazzamenti" ovvero “gradinate".

Invece le densità, che nel caso discreto è opportuno rappresentare come bar chart (eventualmente con infinite colonne) e nel caso continuo con “normali curve", possono avere forme molto variabili, vincolate essenzialmente solo da:

– non negatività, cioè valori ≥ 0

— area del sottografico 1 nel caso continuo

— somma ovvero serie dei valori a somma 1 nel caso discreto

– sufficiente regolarità, molto difficile da definire, ma sempre presente in tutti i casi di interesse nelle Scienze applicate – e quindi concretamente non è mai da dimostrare. E certo, una densità non nulla solo sui punti di una “nuvola di punti" capricciosa come un Insieme di Cantor, no, non va bene – ma interessa solo ai matematici.
Rimane dunque possibile per le densità – a differenza delle funzioni di ripartizione sempre almeno vagamente sigmoidi – un'enorme variabilità, tuttavia nei casi più comuni nelle Scienze Applicate e in particolare nelle Scienze Biomediche, quasi sempre le densità hanno quest'ulteriore caratteristica:

— forma almeno vaghissimamente a campana, 0 in $-\infty$ e $+\infty$, nel senso del limite, quasi sempre unimodali ovvero con un solo punto di massimo assoluto, e spesso perfino con un solo punto di massimo relativo.

30.3 Variabili aleatorie uniformi discrete

Una **variabile aleatoria uniforme discreta** di parametri interi a e b ha n valori interi a, $a+1$, $a+2$,...,$b = a+n-1$, con le corrispondenti probabilità tutte uguali $p_k = \frac{1}{n}$ per $k = 1, ..., n$, e la sua distribuzione ovvero legge verrà indicata con $\mathbb{U}\{a, b\}$.
Per esempio il [risultato del lancio di un] dado (regolare) è una v.a. $X \sim \mathbb{U}\{1, 6\}$ e il simbolo $\sim$ lo leggeremo *"con legge"*:

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad equivalentemente: \ X \sim \mathbb{U}\{1, 6\}.$$

E associando a 0 e 1 le facce di una moneta

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \mathbb{U}\{0, 1\} \text{ rappresenta una moneta } \textit{equilibrata}$$

Ecco un'altra, $\sim \mathbb{U}\{a, b\}$ con $a = -2$ e $b = 4$ e allora $n = b - a + 1 = 7$:

$$Y := \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \quad equivalentemente: \ Y \sim \mathbb{U}\{-2, 4\}.$$

Esercizio$_\mu$ Si rappresenti graficamente la densità e la funzione di ripartizione di $\mathbb{U}\{0, 1\}$ e $\mathbb{U}\{1, 6\}$.

30.4 Variabili aleatorie discrete con infiniti valori

Una **variabile aleatoria geometrica iniziante da 1** di parametro p (e dev'essere $0 \le p \le 1$) ha valori 1,2,3... con densità

$$p_k = p(1-p)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, 3... \quad \textit{somma della serie}: 1$$

$$\text{per esempio con } p := \frac{1}{2} \text{ si ha quella di prima} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & k & ... \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & ... & \frac{1}{2^k} & ... \end{pmatrix}$$

$$\text{e con } p := \frac{1}{3} \text{ si ha} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & k & ... \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{27} & ... & \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} & ... \end{pmatrix}$$

Esercizio$_\mu$ Si rappresenti graficamente la densità e la funzione di ripartizione di $Geom_1\left(\frac{1}{2}\right)$, la variabile aleatoria geometrica di parametro $\frac{1}{2}$ (simbologia per nulla standard purtroppo).

Osservazione. La probabilità di "$X = h$ *vel* $X = k$", con $h \neq k$, essendo eventi disgiunti, è la somma delle 2 probabilità:

$$P(X=h \ vel \ X=k) = P(X=h) + P(X=k)$$

e similmente con 3 o più valori diversi, e questo vale per le v.a. discrete con qualunque distribuzione.
Per esempio per la v.a. W considerata all'inizio

$$P(W = 2 \vee W = 3) = P(W=2) + P(W=3) =$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{2+1}{8} = \frac{3}{8}$$

Nella prossima Lezione vedremo anche la **variabile aleatoria geometrica iniziante da 0**.

30.5 Variabili aleatorie e processo di Bernoulli

La variabili aleatoria di Bernoulli o bernoulliana di parametro p, è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

(per esempio una moneta con testa=1 con $p = \frac{1}{2}$ se regolare) identificabile con

$$\begin{pmatrix} fallimento & successo \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

Denoteremo con $B(p)$ questa legge.
Un **processo di Bernoulli** è una successione $(X_1, X_2 ...)$ di variabili aleatorie indipendenti aventi la medesima legge di Bernoulli $B(p)$. Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Processo di Bernoulli*:

> Un processo di Bernoulli può essere considerato come una sequenza di lanci di una moneta (eventualmente anche truccata). Ogni singolo lancio è detto prova di Bernoulli.

In particolare, essendo le variabili indipendenti, vale la mancanza di memoria: la probabilità di una prova di Bernoulli non è influenzata dal risultato delle precedenti (che quindi non possono fornire alcuna informazione sulla nuova prova).

Una sua *realizzazione* è una successione di zeri e uni, con l'1 a denotare il successo, con una sua probabilità p, e lo 0 l'insuccesso: come 0,0,0,0,1,0,1,0,0,0,1...
Anche sopravvive, sopravvive, sopravvive, sopravvive, muore (e non serve continuare). (Si noti che qua il successo è la morte).

30.6 Variabili aleatorie geometriche

Una **variabile aleatoria geometrica iniziante da 1** di parametro p (e dev'essere $0 \le p \le 1$)

$$X \sim Geom_1(p) \qquad \text{(simbologia non standard purtroppo)}$$

ha valori 1,2,3... con densità

$$p_k = p(1-p)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, 3... \quad {\scriptstyle \textit{somma della serie}: 1}$$

$$\text{per esempio con } p := \frac{1}{2} \text{ si ha quella di prima } \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \dots & \frac{1}{2^k} & \dots \end{pmatrix}$$

$$\text{e con } p := \frac{1}{3} \text{ si ha } \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \dots & k & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{27} \dots & \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} & \dots \end{pmatrix}$$

Una **variabile aleatoria geometrica iniziante da 0** di parametro p (e dev'essere $0 \le p \le 1$)

$$X \sim Geom_0(p) \qquad \text{(simbologia non standard purtroppo)}$$

ha valori 0,1,2... con densità

$$p_k = p(1-p)^{k}, \qquad k = 0, 1, 2... \quad {\scriptstyle \textit{somma della serie}: 1}$$

$$\text{per esempio con } p := \frac{1}{2} \text{ si ha } \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \dots & \frac{1}{2^{k+1}} & \dots \end{pmatrix}$$

$$\text{e con } p := \frac{1}{3} \text{ si ha } \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{27} & \dots & \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k & \dots \end{pmatrix}.$$

Supponiamo che vogliamo ottenere un certo risultato con una successione di prove indipendenti, in ciascuna delle quali il successo ha probabilità p. (Per esempio la testa con una moneta e allora $p = \frac{1}{2}$ oppure il 3 con un dado e allora $p = \frac{1}{6}$). Cioè consideriamo un processo di Bernoulli. Allora

$$P(\text{ci vogliono } k \text{ prove per il primo successo}) = p_k = p\,(1-p)^{k-1}$$

$$k = 1, 2, 3...$$

cioè la v.a. “numero di tentativi per avere il primo successo" ha legge $Geom_1(p)$.
Analogamente

$$P(\text{ci capitano } k \text{ insuccessi prima del primo successo}) = p\,(1-p)^k$$

$$k = 0, 1, 2...$$

cioè la v.a. “numero di insuccessi prima avere il primo successo" ha legge $Geom_0(p)$.
Il cosiddetto successo potrebbe per esempio essere un errore in farmacia, il primo della giornata, e in un articolo scientifico hanno effettivamente trovato questo:

> A (...) study involving 50 pharmacies located in six cities across the United States was conducted. A pharmacist trained to detect dispensing errors recorded the number of prescriptions filled by each pharmacy staff member and noted which prescription represented the staff member's first dispensing error (defined as any deviation from the prescriber's order) made during the observation period. (...) the observed cumulative distribution of dispensing errors could have come from a geometric probability distribution that assumed dispensing error rates of 2-3%.[169]

[169] Am J Health Syst Pharm. 2006 Jun 1;63(11):1056-61. Geometric probability distribution for modeling of error risk during prescription dispensing. Carnahan BJ, Maghsoodloo S, Flynn EA, Barker KN.

(Fra 2 e 3 percento di errori in farmacia rispetto alle indicazioni dei medici!)

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$\ast \approx \%$ Per una variabile aleatoria X geometrica iniziante da 1 di parametro $\frac{1}{3}$ calcolare

$$P(X \geq 3).$$

SVOLGIMENTO.

$$P(X \geq 3) =$$

Con l'evento complementare, che ci evita il calcolo della somma di una serie,

$$= 1 - P(X < 3) =$$

la X è geometrica iniziante da 1, e solo 1 e 2 sono i possibili valori < 3

$$= 1 - P(X = 1 \vee X = 2) =$$

la probabilità dell'unione di eventi disgiunti è la somma delle probabilità

$$= 1 - \big(P(X = 1) + P(X = 2)\big) =$$

e ricordando la formula della densità considerata $p_k = p\,(1-p)^{k-1}$, con $p = \frac{1}{3}$

$$= 1 - \frac{1}{3}\Big(1 - \frac{1}{3}\Big)^{1-1} - \frac{1}{3}\Big(1 - \frac{1}{3}\Big)^{2-1} =$$

e con semplici calcoli aritmetici

$$= 1 - \frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{0} - \frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{1} = 1 - \frac{1}{3} \cdot 1 - 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{9-3-2}{9}$$

e in conclusione

$$\boxed{\tfrac{4}{9} \approx 0.444 = 44.4\%}$$

ESERCIZIO$_{\mu 2018\neq}$
$\ast \approx \%$ Si consideri un'entità biologica (come batteri, virus, corpuscoli sanguigni...) che da quando si forma, poi ha una vita (in giorni, interi) che è pari a 7 + una variabile aleatoria geometrica X iniziante da 0 di parametro $\frac{1}{2}$. (Quindi può vivere 7 giorni, 8 giorni, 9 giorni... eccetera, con probabilità via via sempre più piccole).
Che probabilità ha di vivere un numero pari di giorni?

SVOLGIMENTO

$$P(\text{vive un numero pari di giorni}) = P(7 + X \text{ è pari}) =$$

$$= P(X \text{ è dispari}) =$$

$$= P(X \text{ è 1 oppure 3 oppure 5 oppure 7...}) =$$

più formalmente

$$= P(X = 1 \vee X = 3 \vee X = 5 \vee X = 7 \vee ...) =$$

e trattandosi di eventi disgiunti

$$= P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 5) + P(X = 7) + ... =$$

ricordando la densità $p_k = p(1-p)^k$ per $k = 0, 1, 2...$ della variabile aleatoria geometrica di parametro p iniziante da 0, nel nostro caso $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k$,

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + ...$$

dove si riconosce la serie geometrica di ragione $\frac{1}{4}$ (perché ogni termine è pari al precedente moltiplicato per $\frac{1}{4}$)

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ...ar^n + ...$$

con anche $a = \frac{1}{4}$ e allora somma

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} =$$

$$\boxed{\frac{1}{3} \approx 0.333 = 33.3\%}$$

oppure, con un decimale in più,

$$\boxed{\frac{1}{3} \approx 0.3333 = 33.33\%}$$

(e se ne potrebbero mettere anche di più, se fosse utile o desiderato).

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$ $\ast \approx \%$ Per una variabile aleatoria geometrica Z iniziante da 1 di parametro $\frac{1}{4}$ calcolare

$$P(Z > 2).$$

SVOLGIMENTO

$$P(Z > 2) =$$

con l'evento complementare, che ci evita il calcolo della somma di una serie,

$$= 1 - P(Z \le 2) =$$

la Z è geometrica iniziante da 1, e solo 1 e 2 sono i possibili valori ≤ 2

$$= 1 - P(Z = 1 \vee Z = 2) =$$

la probabilità dell'unione di eventi disgiunti è la somma delle probabilità

$$= 1 - \big(P(Z = 1) + P(Z = 2)\big) =$$

con la notazione consueta per la densità geometrica iniziante da 1

$$= 1 - (p_1 + p_2) =$$

e ricordando la formula della densità considerata $p_k = p\,(1-p)^{k-1}$, con $p = \frac{1}{4}$

$$= 1 - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{1-1} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{2-1} =$$

e con semplici calcoli aritmetici

$$= 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{0} - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{1} = 1 - \frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{16 - 4 - 3}{16}$$

e in conclusione

$$\boxed{\tfrac{9}{16} \approx 0.5625 = 56.25\%}$$

o con minore ma comunque accettabile precisione

$$\boxed{\tfrac{9}{16} \approx 0.563 = 56.3\%}$$

Esempi ed esercizi

Esempio$^f_\mu$ Determinare la v.a. $\mathbb{U}\{0,7\}$.
Si ha subito in base alla definizione di $\mathbb{U}\{a,b\}$

$$U := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \sim \mathbb{U}\{0,7\}.$$

Esercizio. Rappresentare graficamente densità e funzione di ripartizione della v.a. U del soprastante esempio.
Esempio$^f_\mu$ Determinare la v.a. $\mathbb{U}\{-3,1\}$.
Si ha subito in base alla definizione di $\mathbb{U}\{a,b\}$

$$V := \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \sim \mathbb{U}\{-3,1\}.$$

Esercizio. Rappresentare graficamente densità e funzione di ripartizione della v.a. V del soprastante esempio.
Esercizio. Determinare la v.a. $Z \sim \mathbb{U}\{-4,2\}$ e poi calcolare $P(Z \geq 1)$, $P(Z > 1)$, $P(Z \leq 1)$, $P(Z \geq -\pi)$, $P(Z \geq \sqrt{2})$, $P(-1 \leq Z < 1)$, $P(Z^2 = 1)$, $P(Z^2 \leq 1)$. [L'ultime vale $\frac{3}{7}$].
Esercizio. Determinare le v.a. geometriche dei 2 tipi, di parametri $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$, e verificare le somme delle loro serie.
Esercizi$^f_\mu$ Rappresentare graficamente densità e funzioni di ripartizione delle v.a Z e W della lezione 30. Calcolare $P(W < 2)$, $P(W > 2)$, $P(W \geq 4)$, e con le serie $P(W > 100)$ e $P(W < 100)$.
Esercizi. Per una v.a. a 3 valori con $p_3 = \frac{1}{\mathrm{e}}$ e $p_2 = \frac{1}{\mathrm{e}^2}$ determinare p_1. Per una v.a. A a 4 valori 0, 1, 2, 3 con $p_1 = \frac{1}{7}$ $p_2 = \frac{1}{11}$ e $p_0 = \frac{1}{5}$ determinare p_3, e poi $P(A \geq 1)$, $P(A > 1)$, $P(A \leq 1)$, $P(A \geq -\pi)$, $P(A \geq \sqrt{2})$, $P(-1 \leq A < 1)$, $P(A^2 \leq 1)$, $P(A \neq 1)$.