34 Speranza matematica, varianza, covarianza

34.1 Sulle definizioni di distribuzione e legge

Sia per variabili aleatorie discrete che continue, *distribuzione* è sinonimo di *legge*, e indica sia la densità che la funzione di ripartizione.
(E in via teorica anche ogni altra funzione ad esse equivalente ma in pratica useremo quelle due).

34.2 Introduzione e definizioni

Per v.a. continue si definiscono speranza matematica, varianza e covarianza. In modo simile al caso discreto, ma con integrali invece che somme e serie.

Definizioni. Consideriamo una v.a. X continua di densità f.

$$\textbf{Speranza matematica:}\ \mu = E(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

se l'integrale con $|x|$ esiste finito, che non verificheremo mai.

Del tutto analoga alla definizione per una v.a. discreta:

$$\mu = E(X) := \sum_k x_k \cdot p_k \qquad \textit{somma su tutti i valori } x_k \textit{ della v.a.}$$

Si noti che la sommatoria (finita o serie) del caso discreto è diventata un integrale definito nel caso continuo. E la densità discreta p_k è stata sostituita dalla densità continua $f(x)$; però si faccia attenzione che ogni singolo valore p_k è un valore di probabilità, quindi fra 0 e 1, per esempio $\frac{1}{6}$, mentre i valori di $f(x)$ non sono probabilità e possono essere maggiori di 1. La densità della Figura 33.3 raggiunge il valore 2.

$$\textbf{Varianza:}\ \sigma^2 = Var(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx = E(X^2) - E(X)^2$$

Del tutto analoga alla definizione per una v.a. discreta:

$$\sigma^2 = Var(X) := \sum_k (x_k - E(X))^2 \cdot p_k = E(X^2) - E(X)^2$$

Sia per v.a. discrete che continue:

$$\boxed{\textbf{Deviazione standard: } \sigma := \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\sigma^2}} \qquad (111)$$

$$\textbf{Covarianza: } Cov(X,Y) := E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

e se la covarianza è 0 le v.a. si dicono *incorrelate*.

Diremo **indipendenti** 2 variabili aleatorie X e Y continue se informazioni sui valori assunti da una non modificano le nostre conoscenze probabilistiche sui valori dell'altra, ovvero e per ogni a, x, c, y con $a < x$ e $c < y$

$$P(a < X < x \wedge c < Y < y) = P(a < X < x) \cdot P(c < Y < y)$$

cioè $\{a < X < x\}$ e $\{c < Y < y\}$ sono eventi indipendenti.
Spesso le variabili aleatorie incorrelate sono indipendenti.

Teoremi.

Legge	$E(X)$ μ	$Var(X)$ σ^2
$X \sim \mathbb{U}[a,b]$ ovvero $\mathbb{U}(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
X esponenziale di parametro λ	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
X ~Cauchy	$\nexists$	$\nexists$

Detto semplificatamente, la densità di Cauchy non ha la speranza matematica perchè ha le code troppo pesanti, stenta a tendere a 0 a $\pm\infty$ (si veda la Figura 29.2) e ciò rende inesistente l'integrale da $-\infty$ a $+\infty$ di $|x|\, f(x)$.

34.3 Approfondimenti sulle v.a. discrete e continue

Tutte le cose che diremo qua valgono sia per variabili aleatorie discrete che continue.

Con c intendiamo un qualunque numero reale. E $\sigma :=$ SD $:= \sqrt{Var(X)}$.

Relazioni di 1 variabile aleatoria con 1 costante:

$$E(c+X) = c + E(X) \tag{112}$$

$$\boxed{E(c \cdot X) = c \cdot E(X)} \tag{113}$$

$$Var(c+X) = Var(X) \tag{114}$$

$$Var(c \cdot X) = c^2 \cdot Var(X) \tag{115}$$

$$\text{SD}(c \cdot X) = |c| \cdot \text{SD}(X) \tag{116}$$

Relazioni di 2 variabili aleatorie:

$$\boxed{E(X+Y) = E(X) + E(Y)} \tag{117}$$

ovviamente valida anche se Y è v.a. costante (Formula 112).

$$\boxed{X, Y \text{ indip. } \Rightarrow \text{ incorrelate } \Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)} \tag{118}$$

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + Cov(X,Y) \tag{119}$$

$$\text{indip. } \Rightarrow Var(X + \ldots + X_n) = Var(X_1) + \ldots + Var(X_n) \tag{120}$$

Esercizi. Siano X e Y indipendenti di leggi esponenziali di parametri $\log 3$ $\log 4$ rispettivamente. Calcolare la loro covarianza, e la speranza matematica di X, $2Y$, $3+Y$ e $\pi X - Y$.

34.4 Complementi – Funzione Gamma e Legge Gamma

La **funzione** $\Gamma(x)$, *funzione Gamma*, è una *funzione speciale* dell'Analisi Matematica, cioè, in pratica e semplificando, una funzione non elementare ma di notevole interesse, con una certa definizione che non daremo. I suoi valori approssimati vengono calcolati da vari software e molti si trovano elencati in tavole numeriche. Ma per i numeri $\frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4...$ i suoi valori sono semplici:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \qquad \Gamma(x) = (x-1)! \qquad \forall\, x \in \mathbb{N}^+$$

(si faccia un grafico) e quelli soli considereremo, per esempio

$$\Gamma(1) = 0! = 1, \quad \Gamma(2) = 1! = 1, \quad \Gamma(3) = 2! = 2, \quad \Gamma(4) = 3! = 6.$$

La **Legge** $\Gamma(\alpha, \lambda)$, Gamma di parametri $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$, ha densità

$$f(t) := \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda t} & se\ t > 0 \\ \\ 0 & se\ t \le 0 \end{cases}. \tag{121}$$

Si scrivano esplicitamente e grafichino le densità per $\alpha := \frac{1}{2}, 1, 2, 3$ e $\lambda := 2$, e si calcolino e grafichino le funzioni di ripartizione.

Teorema.

Legge	$E(X)$ μ	$Var(X)$ σ^2
$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$

34.5 Variabile aleatoria del chi quadrato

Esiste la legge $\chi^2(n)$ [del] chi quadrato (chi-quadrato, chi quadro, chi-quadro, inglese *chi-square* o *chi-squared*) ovvero χ^2 di parametro n o come si meglio dice a n gradi di libertà.

34.6 Complementi – Densità e leggi del chi quadrato

Ha densità

$$f(x) = f(x; n) := \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & se\ x > 0 \\ 0 & se\ x \le 0 \end{cases}. \tag{122}$$

Si scrivano esplicitamente e grafichino le densità per $n = 1, 2, 4, 6$, e si calcolino e grafichino le ultime 3 funzioni di ripartizione.

Di questa famiglia (insieme) di leggi, in Statistica sono molto importanti i quantili. I valori approssimati vengono calcolati da vari software e molti si trovano elencati in tavole numeriche.

Il valore di maggior interesse in Statistica Inferenziale è $q_{0.95}$, e in subordine con 0.9 e 0.99:

$$P(X < q_{0.95}) = 0.95 = 95\%$$

$$\textit{equivalentemente} \;\; P(X > q_{0.95}) = 0.05 = 5\%$$

e tale quantile non è un singolo numero perché viene ulteriormente precisato da n=1,2...

In particolare ci proponiamo di imparare a memoria il quantile $q_{0.95}$ relativo a $n = 11$ gradi di libertà, che però di spesso sulle tavole numeriche si trova riferito non a 0.95 bensì al valore 0.05:

$$\approx 19.68$$

di solito riportato con più decimali, per esempio 19.675 con 3 decimali.

Purtroppo c'è confusione nelle notazioni usate, Si veda il paragrafo (48.4).

Ecco alcuni valori:

su alcune tavole →	0.95	0.90	0.10	0.05	0.01
su altre tavole →	0.05	0.10	0.90	0.95	0.99
n				$\chi^2_{0.05}(1)$ *per altri* $\chi^2_{0.95}(1)$ ↓	
1	0.004	0.02	2.71	3.84	6.63
2	0.10	0.21	4.61	5.99	9.21
3	0.35	0.58	6.25	7.81	11.34
4	0.71	1.06	7.78	9.49	13.28
5	1.14	1.61	9.24	11.07	15.09
6	1.63	2.20	10.64	12.59	16.81
7	2.17	2.83	12.02	14.07	18.48
8	2.73	3.49	13.36	15.51	20.09
9	3.32?	4.17	14.68	16.92	21.67
10	3.94	4.87	15.99	18.31	23.21
11	4.57	5.58	17.28	**19.68**	24.73
				↑ $\chi^2_{0.05}(11)$ *per altri* $\chi^2_{0.95}(11)$	

Ripetiamo che per noi 19.68 è $\approx q_{0.95}$ con 11 gradi di libertà, ma spesso sulle tavole sta sulla colonna 0.05.

34.7 Densità e quantili di Student, e legge di Cauchy

Come le leggi del chi quadrato, la t **di Student** è una famiglia di leggi, con un parametro, di solito indicato con n o ν, ancora detto *gradi di libertà*: $n = 1, 2, 3 \ldots$. Scriviamo le prime 2:

$$f(t;1) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{t^2+1} \qquad f(t;2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{t^2}{2}+1\right)^{3/2}}$$

e nelle successive $\frac{t^2}{2}$ diventa $\frac{t^2}{3}$, $\frac{t^2}{4}$... e l'esponente $\frac{3}{2}$ diventa $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$... e cambia anche la costante moltiplicativa davanti, e ha una espressione che coinvolge la funzione Γ. I grafici un po' si assomigliano: simmetrici rispetto all'asse y, al crescere di n le campane diventano più alte e strette.

La $f(t;1)$ è la **densità di Cauchy**, che sorprendentemente non ha speranza matematica, ma tutte le altre sì, e allora ovviamente è 0 per la simmetria.

Di questa famiglia (insieme) di leggi, in Statistica sono molto importanti **i quantili**. I valori approssimati vengono calcolati da vari software e molti si trovano elencati in tavole numeriche, purtroppo di difficile lettura a causa di varie ambiguità, col serio rischio di confondere un parametro caratterizzante i quantili, α, con $1-\alpha$ oppure $2(1-\alpha)$ oppure $2\alpha-1$.

Nella riga di testa si trovano alcuni valori, talvolta con la specificazione *"one tail"*, e per associarli correttamente ad α, evitando di confonderlo con $1-\alpha$, o $2(1-\alpha)$, o $2\alpha-1$, si cerchi nella prima riga (cioè per $n=1$) il valore ≈ 6.31 corrispondente ad $\alpha = 0.95$:

$$X \sim t \text{ di Student a 1 grado di libertà} \qquad P(X \leq 6.31) \approx 0.95.$$

Ecco alcuni valori. Qua si intende che α è grande, diciamo > 0.8.

	two tails	$2\alpha-1$	$\rightarrow$	0.9	0.95	0.98	0.99
	two tails	$2(1-\alpha)$	$\rightarrow$	0.1	0.05	0.02	0.01
	one tail	$1-\alpha$	$\rightarrow$	0.05	0.025	0.01	0.005
k	**one tail**	α	$\rightarrow$	0.95	0.975	0.99	0.995
1				6.3134	12.706	31.820	63.657
...				...	...	...	...
100				1.6602	1.984	2.364	2.625

ESEMPIO$_\mu$ Probabilità che una v.a. di legge di Student a 2 gradi di libertà assuma un valore ≤ 2.52:

$$P(X \le 2.52) = \int_{-\infty}^{2.52} f(t;2)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{2.52} \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{t^2}{2}+1\right)^{3/2}}\,dt$$

integrale non facile da calcolare al livello di questa trattazione elementare.
Con Wolframalpha `Integrate (1/(2Sqrt[2]))(1/(t^2/2+1)^(3/2)) from -Infinity to 2.52` dà

$$\approx 0.936 = 93.6\%.$$

Teoremi.

Legge	$E(X)$ μ	$Var(X)$ σ^2
$X \sim \chi^2(n)$ ovvero del χ^2 a n gradi di libertà	n	$2n$
$X \sim t$ di Student a n gradi di libertà	0 per $n > 1$	$\frac{n}{n-2}$ per $n > 2$

Osservazioni. Quelle che abbiamo visto, e le densità normale e log-normale che vedremo, sono fra le principali densità continue. Ma ne esistono infinite altre, alcune con un nome specifico, altre senza. Si considerino per esempio gli esercizi seguenti.

Esercizio 1$_\mu$ Calcolare la speranza matematica della densità

$$g(t) := \alpha\, \mathrm{e}^{-2|t|}$$

naturalmente dopo aver determinato la costante α. (La costante viene determinata dall'integrale unitario fra $-\infty$ e $+\infty$, che per la parità della densità è 2 volte l'integrale fra 0 e $+\infty$).

Esercizio 2_μ Calcolare la speranza matematica della densità

$$f(z) := \begin{cases} 0 & se\ \ z < \frac{1}{2} \\ c & se\ \ \frac{1}{2} \le z < 1 \\ \frac{c}{z^3} & se\ \ z \ge 1 \end{cases} \qquad \textit{discontinua!}$$

naturalmente dopo aver determinato c. (Ovviamente bisognerà usare la Formula (14), Regola di Chasles, fatta valere su $]a, b[=\,]-\infty, +\infty[$, suddividendo 2 volte l'integrale, nei punti $\frac{1}{2}$ e 1).

Esercizio 3_μ Calcolare la speranza matematica della densità

$$\textit{discontinua!} \quad u(x) := a(2 + \operatorname{sgn}(x))\ per\ -1 \le x \le 2,\ e\ 0\ altrimenti.$$

34.8 Legge di $g(X)$

Se X è una variabile aleatoria discreta allora $g(X)$ è una variabile aleatoria qualunque sia la funzione g.
Per esempio il doppio del risultato di un lancio di dado, $2\,X$.

Per le variabili aleatorie continue invece, nella nostra trattazione elementare, richiediamo la continuità: se X è una variabile aleatoria continua e se g è una funzione sufficientemente regolare, e per noi in particolare continua, anche $g(X)$ è una variabile aleatoria continua.
Si pensi per esempio a $mX + q$, X^2, X^3 e $-X^3$.
Esempio concreto:

$$Y := 453{,}592\,37\,X$$

converte il peso X in libbre del primo bambino che nascerà vivo negli USA il prossimo anno, nel suo peso Y in grammi.

Se poi X e g sono molto regolari, X e $g(X)$ hanno anche speranza matematica.

Esempio 1 di calcolo della legge di $g(X)$ per v.a. continua: $m\,X + q$.
Troviamo funzione di ripartizione e poi densità di $m\,X + q$ con $m > 0$:

$$F_{m\,X+q}(t) =$$

per definizione e poi per algebra

$$= P(m\,X + q \le t) = P(m\,X \le t - q) =$$

per algebra, essendo $m > 0$

$$= P\left(X \le \frac{t-q}{m}\right) =$$

per definizione di funzione di ripartizione

$$= F_X\left(\frac{t-q}{m}\right)$$

e derivando rispetto a t la prima e l'ultima espressione con la regola di derivazione della funzione composta

$$f_{m\,X+q}(t) = \frac{1}{m}\, f_X\left(\frac{t-q}{m}\right) \qquad m > 0$$

e un analogo calcolo con $m < 0$ darà

$$f_{m\,X+q}(t) = -\frac{1}{m}\, f_X\left(\frac{t-q}{m}\right) \qquad m < 0$$

e le 2 ultime formule si riassumono in questa formula della densità

$$f_{m\,X+q}(t) = \frac{1}{|m|}\, f_X\left(\frac{t-q}{m}\right) \qquad m \ne 0$$

Esempio 2 di calcolo della legge di $g(X)$ per v.a. continua: X^2.
Con un analogo tipo di calcoli si troverà

$$F_{X^2}(x) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) \qquad \text{se } g(z) := z^2$$

e poi per tutte la densità si ottiene derivando, in particolare

$$f_{X^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})\right) \qquad se\ x > 0$$

e ovviamente 0 se $x < 0$.

34.9 Standardizzazione di una variabile aleatoria

Definizione. Per una variabile aleatoria X discreta o continua dotata di speranza matematica μ e varianza σ^2, la nuova variabile aleatoria

$$\boxed{Z := \frac{X-\mu}{\sigma} \text{ si dice } \textbf{standardizzazione } X \text{ o suo } \textbf{z score}} \quad (123)$$

(che è $mX+q$ con $m := \frac{1}{\sigma}$ e $q := -\frac{\mu}{\sigma}$).

Teorema. (Che si dimostra con un semplice calcolo).

$$\boxed{Z \text{ standardizzazione } \Rightarrow E(Z) = 0\,, \qquad Var(Z) = 1.} \qquad (124)$$

(Vale se Z è standardizzazione sia di una v.a. discreta che continua)
La standardizzazione presuppone la conoscenza di media e varianza *veri*, cosa possibile per esempio per un dado: $\frac{X-\frac{7}{2}}{\sqrt{\frac{35}{12}}}$.
La standardizzazione può essere applicata anche ai valori di un dataset:

$$z_i := \frac{x_i - \bar{x}}{\text{SD}}$$

e per calcolare la deviazione standard SD si userà la formula con $\frac{1}{n}$ se il dataset rappresenta tutta la popolazione di interesse, o quella con $\frac{1}{n-1}$ se ne è un campione.

Si noti che lo z score è adimensionale, per com'è definito.

Lo z score tende ad assumere valori intorno a 0, e quelli più vicini a 0 provengono dai valori (originali) più normali e quelli più lontani dai valori più estremi.

Esempio. Per un dado $X \sim \mathbb{U}\{1,6\}$ è $\mu = \frac{7}{2}$ e $\sigma^2 = \frac{35}{12}$, e allora per la somma Z di 2 dadi $E(Z) = 7$ e per l'indipendenza $\sigma^2 = \frac{35}{6}$ ovvero $\sigma = \sqrt{\frac{35}{6}}$.
Prendiamo ora 100 lanci di coppia di dadi virtuali:

12 8 8 4 5 10 5 6 7 7 8 7 2 4 5 9 11 5 5 12 6 8 7 9 6 7 9 8 9 9 8 10 6 5 5 5 3 6 6 5 7 5 10 8 9 9 6 5 4 7 7 8 4 6 6 11 9 7 6 7 9 4 5 7 5 3 7 8 5 7 9 4 5 5 5 3 9 3 9 4 8 10 8 6 9 8 10 7 7 7 9 8 9 8 4 6 6 8 4 7
Possiamo standardizzare

2.42465 0.548712 0.548712 -1.32723 -0.858241 1.48668 -0.858241 -0.389257 0.0797273 0.0797273 eccetera

Si noti nuovamente che lo z score tende ad assumere valori intorno a 0, e quelli più vicini a 0 provengono dai valori (originali) più normali e quelli più lontani dai valori più estremi.
E fa questo in modo “standard": ogni statistico riconosce un valore normalissimo intorno a 0, un po’ discosto dalla media intorno a 1 o -1, soprendente intorno a ± 2, un valore eccezionale intorno a ± 3, molto eccezionale intorno a ± 4, eccezionalissimo intorno a ± 5...
Sia che la variabile aleatoria iniziale variasse intorno al 3000 com’è per il peso del neonato in grammi, o intorno al 3.5 com’è per il dado.

Esercizio. Si scrivano le standardizzazioni dei 2 dadi di (29.1), con quella stessa notazione. E di una moneta regolare.

Teorema. Come detto, data una variabile aleatoria continua X e una funzione sufficientemente regolare g, anche $g(X)$ è una variabile aleatoria continua. In condizioni di ulteriore regolarità X e $g(X)$ hanno speranza matematica.
Se la v.a. continua X ha densità f_X allora

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_X(t)\, dt.$$

in particolare (con $g(z) := z^n$)

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, f(x)\, dx \quad \text{si chiama } \textit{momento}\, n\text{-esimo}.$$

Il momento primo è proprio la speranza matematica di X.

Esempi. Vediamo 2 esempi tratti da un libro che si distingue nella didattica del Calcolo delle Probabilità e della Statistica: *Calcolo delle probabilità*, di Paolo Baldi, ed. McGraw-Hill. Alle pp. 125-126:

> Supponiamo che X sia uniforme su $[0,1]$. Quanto valgono $E[\sin(2\pi X)]$ e $E[\mathrm{e}^X]$?(...)
>
> $$E[\sin(2\pi X)] = \int_0^1 \sin(2\pi x)\, dx = 0$$
>
> $$E[\mathrm{e}^X] = \int_0^1 \mathrm{e}^x\, dx = \mathrm{e} - 1.$$

(L'uso delle soprastanti parentesi quadre non è conforme alle standard seguito in questa dispensa, ma si tenga presente che le notazioni fra i vari Autori differiscono alquanto).

Esercizi. Si consideri una v.a. X con $f_X(x) := x$ fra 0 e $\sqrt{2}$ e 0 altrimenti. Trovare $E(\sin(2\pi X))$, $E(\mathrm{e}^X)$ ed $E(\ln X)$, e anche un'altra speranza matematica con una funzione a scelta.
Poi si cerchino le stesse 4 speranze matematiche con una nuova densità a scelta.

* Complementi *

34.10 Complementi – Disuguaglianza di Chebyshev

La Disuguaglianza di Chebyshev[176] che ora vedremo vale per una **variabile aleatoria discreta o continua qualunque** purché dotata di speranza matematica μ e varianza σ^2.

Riguarda gli *scarti dalla media* $|X - E(X)|$.

Precisamente, la disuguaglianza riguarda la probabilità che gli scarti dalla media siano "grandi" o per meglio dire superino un fissato numero c:

$$P(|X - E(X)| > c) \leq \frac{Var(X)}{c^2} \tag{125}$$

valida per ogni $c \neq 0$ reale; ma utile solo per $c > \sigma$.

Essa ci dice che minore è la variabilità della grandezza aleatoria X, minore è la probabilità che X assuma valori distanti dalla media. Equivalentemente con l'evento complementare

$$P(|X - E(X)| \leq c) \geq 1 - \frac{Var(X)}{c^2} \tag{126}$$

valida per ogni $c \neq 0$ reale; ma utile solo per $c > \sigma$.

Scrivendo da adesso μ per la speranza matematica e σ per lo scarto quadratico medio, coi valori di c multipli interi positivi $m\,\sigma$ di σ, $m = 1, 2, 3...$, osservato che $1 - \frac{\sigma^2}{(m\sigma)^2} = 1 - \frac{1}{m^2}$, la Disuguaglianza di Chebyshev è

$$P(|X - \mu| \leq m\,\sigma) \geq 1 - \frac{1}{m^2} \qquad m = 1, 2, 3...$$

e con $m := 2, 3, 4, 5$ (il caso $m := 1$ non è significativo) risulta

$$P(|X - \mu| \leq 2\sigma) \geq \frac{3}{4} = 0.75 = 75\%$$

$$P(|X - \mu| \leq 3\sigma) \geq \frac{8}{9} = 0.8888... \approx 88.9\%$$

$$P(|X - \mu| \leq 4\sigma) \geq \frac{15}{16} = 0.9375 = 93.75\%$$

$$P(|X - \mu| \leq 5\sigma) \geq \frac{24}{25} = 0.96 = 96\%.$$

[176] Ovvero di Bienaymè-Chebyshev. Miglior traslitterazione dal russo: Čebyšëv.

Queste maggiorazioni valgono – come detto – per distribuzioni qualunque. Molti che sanno qualcosa di Statistica hanno in mente la notissima formula $P(|X-\mu| \le 2\sigma) \approx 95\%$ ma una tale affermazione stringente può essere fatta se si sa che X ha densità normale.

34.11 Complementi – Esercizi sulla legge di $g(X)$

Esercizio. Si trovi densità e f.r. di X^3.

$$P(X^3 \le x) = P(X \le \sqrt[3]{x}) \qquad \text{cioè}$$

$$\boxed{F_{X^3}(x) = F_X(\sqrt[3]{x})}$$

(che si poteva ottenere direttamente dopo aver riconosciuto che $g(x) := x^3$ è crescente suriettiva con inversa $\sqrt[3]{x}$) e derivando, essendo $D\sqrt[3]{x} = D\,x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ per $x \neq 0$,

$$\boxed{f_{X^3}(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\, f_X(\sqrt[3]{x}) \quad x \neq 0}$$

e in 0 la densità può essere posta 0 o qualunque altro valore ≥ 0.

Esercizio. Si trovi densità e f.r. di $-X^3$.

$$P(-X^3 \le x) = P(X^3 \ge -x) = 1 - P(X^3 \le -x) = 1 - P(X \le \sqrt[3]{-x}) = 1 - P(X \le -\sqrt[3]{x})$$

cioè

$$\boxed{F_{-X^3}(x) = 1 - F_X(-\sqrt[3]{x})}$$

(che si poteva ottenere direttamente dopo aver riconosciuto che $g(x) := -x^3$ è decrescente suriettiva con inversa $-\sqrt[3]{x}$) e derivando, essendo $D\sqrt[3]{x} = D\,x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$,

$$\boxed{f_{-X^3}(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\, f_X(-\sqrt[3]{x}) \quad x \neq 0}$$

e in 0 la densità può essere posta 0 o qualunque altro valore ≥ 0.