37 Intervalli di fiducia; media di $N(\mu, \sigma^2)$

37.1 Introduzione agli intervalli di fiducia

Se X è una variabile aleatoria normale $N(\mu, \sigma^2)$ con μ incognito, e ne avremo un campione aleatorio $X_1,\ldots,X_n$ (variabili aleatorie indipendenti tutte con la stessa legge $N(\mu, \sigma^2)$) oppure ne abbiamo delle determinazioni (numeri) $x_1,\ldots,x_n$, possiamo stimare μ con la media campionaria $\hat{\mu} := \bar{X}_n$ e allora numericamente $\hat{\mu} = \bar{x}_n$. Potrebbe essere per esempio $\bar{x}_n \approx 2.019$ sia se $n = 1$ sia se $n = 100$: la *stima puntuale* ottenuta non distingue i due casi mentre è chiaro che nel secondo caso il valore 2.019 è molto più "sicuro" se non nella sua esattezza (che comunque ha probabilità 0) almeno nella sua vicinanza al valore vero.

Questo della media aritmetica è il modo antico di fare nella Statistica, anche Medica.
Invece il modo moderno è quello di dare un intervallo di valori in cui *sperabilmente* sta il valore vero, come ora mostreremo.

La *stima intervallare* è costituita da 2 stimatori $\hat{u}$ e $\hat{v}$ tali che il parametro incognito, sia ora esso a (per esempio μ di $N(\mu, \sigma^2)$) sia nell'*intervallo aleatorio* $[\hat{u}, \hat{v}]$ con probabilità $\geq 95\%$

$$P(a \in [\hat{u}, \hat{v}]) \geq 95\% \qquad \text{e secondo altri Autori } =$$

fino a che $\hat{u}$ e $\hat{v}$ sono variabili aleatorie dipendenti da $X_1,\ldots,X_n$, cioè prima di venire determinate coi dati numerici $x_1,\ldots,x_n$: dopo, il parametro a o sta o non sta nell'intervallo determinato, e sarebbe arduo anche solo definire in che senso si potrebbe attribuire una probabilità a quel fatto; si potrebbe farlo solo con la concezione soggettiva della probabilità ma con essa si può proporre *qualunque* valore di probabilità. (È un po' come chiedersi che probabilità ha 2019 di essere primo: o è primo o non lo è, non c'è una grande questione probabilistica). La questione è sottile e di fatto diffusissima è la credenza erronea che a stia nell'intervallo di confidenza con probabilità 95%, o più in generale $(1-\alpha)100\%$. L'articolo scientifico riportato in questo `link->` su sito governativo statunitense (associato al PubMed)

> provide an explanatory list of 25 misinterpretations of P values, confidence intervals, and power.

Fissati i valori $x_1,\ldots,x_n$ e conseguentemente i valori di $\hat{u}$ e $\hat{v}$ non si parla più di probabilità ma di *(livello di) confidenza*, p.es. 95%.

Scriveremo per esempio

$$a \in [1.9, 2.1] \quad \alpha = 0.05$$

ma altri Autori scriveranno diversamente e variamente, per esempio

$$\text{C.I.}_{95} = 1.9 - 2.1$$

dove C.I. sta per *confidence interval* e 95 sta per 95% ovvero $\alpha = 0.05$.

Tutto questo si estende mutando la soglia 95% in qualunque altro *livello* $1-\alpha$, e normalmente si usano anche 90% e 99%, e si estende a qualunque parametro incognito di una densità per il resto nota.

Leggiamo in un articolo scientifico([186])

> Although the 95% CI is most often used in biomedical research, a CI can be calculated for any level of confidence. A 99% CI will be wider than 95% CI for the same sample.

Il complemento α di $1-\alpha$ si chiama *(livello di) significatività*, e in generale è $5\% = 0.05$ o $10\% = 0.1$ o $1\% = 0.01$.
Purtroppo α e $1-\alpha$ vengono scambiati fra loro nei vari testi.

[186] Hazra A. Using the confidence interval confidently. J Thorac Dis. 2017 Oct;9(10):4125-4130. doi: 10.21037/jtd.2017.09.14. PMID: 29268424; PMCID: PMC5723800.

Il *(livello di) di significatività* è affine al *p value* dei test statistici, che vedremo in seguito, salvo che quest'ultimo non è prefissato ma si calcola dopo: è l'ultimo valore di significatività possibile coi dati che abbiamo, il valore discriminante. Se avessimo pre-fissato un α più piccolo non saremmo riusciti a dimostrare niente, neppure con l'incerta certezza statistica. La speranza è avere un p value piccolissimo, indice di una forte certezza statistica.

37.2 Intervalli di fiducia per μ per campioni gaussiani

Precisiamo dapprima che *intervallo di fiducia* e *intervallo di confidenza* sono sinonimi.

In questo paragrafo considereremo, per una $N(\mu, \sigma^2)$:
• la stima intervallare di μ essendo noto σ^2;
• la stima intervallare di μ essendo ignota anche σ^2.

Tutte le formule di questo paragrafo valgono per campioni gaussiani e (approssimatamente) anche per campioni non gaussiani se la numerosità è $n \geq 30$ e la densità non è "troppo" asimmetrica.

Per μ con σ^2 <u>nota</u>, intervallo di fiducia bilatero centrato al livello (di confidenza) $1-\alpha$, dove α è "piccolo", come $0.05 = 5\%$ (da non confondersi con $1-\alpha$, "grande"):

$$\left[\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\phi_{1-\frac{\alpha}{2}},\ \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\phi_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \quad (\alpha = ...) \tag{147}$$

$$\text{ovvero} \quad \bar{X}_n \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\phi_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad (\alpha = ...)$$

(ovviamente specificando il valore di α) e in particolare ricordiamo il valore $\phi_{0.975} \approx 1.96$ da cui l'intervallo classico con livello di confidenza del 95%, cioè $\alpha = 0.05$,

$$\left[\bar{X}_n - 1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}_n + 1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \quad (\alpha = 0.05) \tag{148}$$

$$\text{ovvero} \quad \bar{X}_n \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\alpha = 0.05)$$

Come sopra, per μ con σ^2 non nota, caso più verosimile:

$$\left[\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right] \quad (\alpha = \dots) \tag{149}$$

$$\text{ovvero} \quad \bar{X}_n \pm \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \quad (\alpha = \dots)$$

(ovviamente specificando il valore di α)
- con (invece che i quantili normali) i quantili di Student, e
- con (invece che σ) la radice quadrata S_n dello stimatore S_n^2 di σ^2.

Si noti che esistono infiniti intervalli bilateri allo stesso livello, non centrati in $\bar{X}_n$, e 2 unilateri; ne mostreremo solo 1 unilatero.

Per μ, un intervallo unilatero al livello di confidenza $1-\alpha$:

$$\left]-\infty,\ \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1)\right]. \quad \textit{(Qua ovviamente } \sigma^2 \textit{ non nota).} \tag{150}$$

(Si specifichi α).

La quantità $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ che ricorre nelle precedenti formule ha un nome:

$$\textit{errore standard} := \frac{S_n}{\sqrt{n}} \tag{151}$$

e potrebbe trovarsi abbreviato *se*, dall'inglese.

Note sui quantili. I valori dei quantili di Student si trovano sulle tavole, cartacee o sulla rete, di non immediata lettura purtroppo, e vengono calcolati da molti software.
Per grandi valori di n, i quantili di Student possono in pratica sostituirsi coi quantili normali, le cui tavole sono di più facile lettura. Questa sostituzione diventa possibile perché per grandi valori di n

lo stimatore S_n^2 tende a σ^2, cosicché di fatto la varianza diventa "sperabilmente nota" e (circa) uguale a S_n^2.
Preferiremo non fare quest'approssimazione incerta, preferendogli la formula (149), ma ci si aspetti di trovarla nei testi scientifici, in particolare l'incerta formula per il classico 95%

$$\bar{X}_n \pm 1.96\,\frac{S_n}{\sqrt{n}} \quad (\alpha = 0.05)$$

che almeno eviteremo come la peste per piccoli n. Certo per $n > 120$ l'approssimazione 1.96 non è cattiva; ecco alcuni quantili di Student per $\alpha = 0.05$ ovvero $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$:

30 2.042
40 2.021
60 2.000
120 1.980
∞ 1.960

ed eccolo, infine al limite, l'1.96.
D'altra parte, è inutile cercare qua il pelo nell'uovo, quando poi nella pratica l'1.96 stesso viene approssimato spesso con 2, da cui la classica formulazione *pratica*, che troviamo su Wikipedia (in inglese) alla voce Confidence interval:

plus or minus twice the standard error

cioè

$$95\%\ \text{C.I.:} \quad \bar{X}_n \pm 2\,\frac{S_n}{\sqrt{n}} \tag{152}$$

di largo uso *pratico*, ma in generale la eviteremo, preferendogli la formula (149). Ma può essere utile per semplici stime a mente.

Tavole (stampabili) dei quantili normali, di Student e del chi quadrato (e altre) si trovano per esempio a questo `link->`

Ecco un esempio di intervallo di fiducia tratto da un articolo scientifico riportato su PMC, sito governativo statunitense:

> The seroprevalence of latent toxoplasmosis in subjects involved in traffic accidents (N = 146) and in the general population living in the same area (N = 446) was compared [...] subjects with latent toxoplasmosis had a 2.65 ($C.I._{95}$= 1.76-4.01) times higher risk of an accident than the toxoplasmosis-negative subjects.

(Si noti che la *stima puntuale* 2.65 non è al centro dell'intervallo $[1.76, 4.01]$, che è bilatero ma non centrato).

37.3 Apprezziamo i CI in un articolo scientifico

Ci sono un'infinità, verosimilmente milioni, di articoli scientifici con i *confidence interval*.

Apprezziamo i CI in un articolo([187]) scientifico, e pure i valori *p*; e seppure non approfondiamo, RR significa *relative risk*:

> The results showed that aspirin use was associated with a reduction in COVID-19 mortality (adjusted RR 0.69; 95% CI 0.50-0.95; P < 0.001). Subgroup analysis found that the low-dose group was associated with a reduced COVID-19 mortality (adjusted RR 0.64; 95% CI 0.48-0.85; P < 0.01). Aspirin use was associated with reduced COVID-19 mortality in Europe and America (crude RR 0.71; 95% CI 0.52-0.98; P = 0.04), and results from cohort studies suggested that aspirin use was a protective factor for COVID-19 mortality (adjusted RR 0.73; 95% CI 0.52-0.99; P = 0.04). Meanwhile, aspirin use was not associated with bleeding risk (crude RR 1.22; 95% CI 0.80-1.87; P = 0.96).

Si noti che gli stimatori puntuali non cadono a metà degli intervalli di fiducia, che non provengono da distribuzioni normali.
Semplificatamente, possiamo dire che "Aspirin use was associated with reduced COVID-19 mortality in Europe and America (crude RR 0.71; 95% CI 0.52-0.98; P = 0.04)" significa che in base a questo studio, in Europa e America l'uso dell'aspirina corrispondeva a una

[187] Ma S, Su W, Sun C, Lowe S, Zhou Z, Liu H, Qu G, Xia W, Xie P, Wu B, Gao J, Feng L, Sun Y. Does aspirin have an effect on risk of death in patients with COVID-19? A meta-analysis. Eur J Clin Pharmacol. 2022 Sep;78(9):1403-1420. doi: 10.1007/s00228-022-03356-5. Epub 2022 Jun 22. PMID: 35732963; PMCID: PMC9217117.

probabilità di morte pari al 71% rispetto al non uso, e per quel valore viene dato questo l'intervallo di confidenza al 95%: $[52\%, 98\%]$. E certo, se il "vero" valore è 98%, ben poco utile sarebbe l'aspirina, ma se è 52% si avrebbe una probabilità di morte praticamente dimezzata; il vero valore non sarà *mai* noto, ma dai dati empirici gli Autori producono la stima puntuale 71% e quella intervallare $[52\%, 98\%]$, e adesso siamo in grado di capirlo.

Questo tipo di espressioni
RR 0....; 95% CI 0....-0....
e altre consimili con OR invece di RR, di significato in qualche modo somigliante, sono diffusissime negli articoli scientifici di Farmacia e Medicina.
Google per
`"pubmed" "RR" "95%"`
dice (2022) di trovare 38.3 milioni di risultati.

Il primo (oggi 15 dicembre 2022) è un articolo([188]) della Cochrane Database Systematic Reviews dell'agosto 2021 sull'antivirale remdesivir:

> **Authors' conclusions:** Based on the currently available evidence, we are moderately certain that remdesivir probably has little or no effect on all-cause mortality at up to day 28 in hospitalised adults with SARS-CoV-2 infection.

In seguito probabilmente sono riusciti a farlo funzionare un po' meglio, e attualmente (15 dicembre 2022) il famoso (e costoso) remdesivir è consigliato – detto semplificatamente – tranne che nei casi critici: `https://www.bmj.com/content/370/bmj.m3379` (in aggiornamento continuo).

La Cochrane va a fare ciclopiche revisioni su tutti gli articoli scientifici su un determinato farmaco, o malattia. I farmaci quando vengono presentati, dagli studi pubblicati dai produttori, spesso appaiono ottimi. Poi, iniziano a studiarli anche gli altri ricercatori. E magari tirando le somme resta molto meno di quanto annunciato all'inizio.

[188] Ansems K, Grundeis F, Dahms K, Mikolajewska A, Thieme V, Piechotta V, Metzendorf MI, Stegemann M, Benstoem C, Fichtner F. Remdesivir for the treatment of COVID-19. Cochrane Database Syst Rev. 2021 Aug 5;8(8):CD014962. doi: 10.1002/14651858.CD014962. PMID: 34350582; PMCID: PMC8406992.

Il termine "crude RR" si riferisce al "Relative Risk" (RR) calcolato senza aggiustamenti per confonditori o altri fattori. Il crude RR rappresenta il rischio relativo di un evento tra due gruppi, calcolato semplicemente confrontando gli eventi senza considerare altre variabili che potrebbero influenzare i risultati.

Ulteriori Dettagli:
Calcolo: Il crude RR è calcolato come il rapporto tra la probabilità di un evento in un gruppo esposto a un fattore di rischio e la probabilità dello stesso evento in un gruppo non esposto.

Aggiustamenti: Gli RR aggiustati, invece, sono calcolati tenendo conto di potenziali confonditori, il che significa che forniscono una stima più precisa del vero effetto del fattore di rischio.

37.4 Prevenire è meglio che curare: le 2 SD e il 95%

Vediamo di prevenire qua 2 errori tipici su media±2·SD.

Errore 1. *Claim:* Più o meno il 95% dei dati di un dataset sta sempre fra la media meno 2 deviazioni standard e la media più 2 deviazioni standard.

Falso! Questo si può affermare se i dati sono più o meno normalmente distribuiti, altrimenti può succedere o no. Per questo dataset

0.001,0.01,0.1,1, 1.001,1.01,1.1,19,19.001,19.01,19.1,20,20.001,20.01,20.1
la media è ≈ 10.7, la deviazione standard ≈ 9.79 e l'intervallo che si otterrebbe $[0.91, 20.49]$ contiene solo $11/15 \approx 73\%$ dei dati.

Errore 2. *Claim:* Più o meno il 95% di n valori di una variabile aleatoria sta fra la media meno 2 deviazioni standard e la media più 2 deviazioni standard.

Doppiamente falso! Questo si può affermare di solito per n determinazioni di una variabile aleatoria più o meno normalmente distribuita. L'errore comunque è più grave di quello soprastante, perchè la deviazione standard calcolata (come prima) sui dati di un dataset esprime sempre una caratteristica dei valori numerici, mentre per una variabile aleatoria la deviazione standard è un valore teorico, che potrebbe non avere nessuna relazione coi valori di una determinazione empirica di un campione aleatorio. Bene o male, nell'esempio soprastante la deviazione standard 10.7 qualcosa esprime relativamente ai dati, mentre se di una variabile aleatoria per esempio $N(0, 1)$ traiamo i valori sopradetti, il che è improbabilissimo ma possibile, la deviazione standards 1 della variabile aleatoria considerata non ha nessuna relazione coi valori.

Short version.

media±2·SD comprende ≈ 95% dei valori per distribuzioni **normali**, sempre nei dataset[189], e spesso per le variabili aleatorie.

37.5 Possibile delusione dagli articoli scientifici

Frequentando gli articoli scientifici, per esempio gli abstract riportati su PubMed, si potrà incorrere in questa delusione: spesso gli intervalli di confidenza, trovati e pubblicati, sono amplissimi.
Per esempio un articolo scientifico potrebbe affermare che col tal farmaco un verme di laboratorio vive mediamente il doppio, ma per il fattore 2, guardando meglio, viene dato un intervallo di confidenza 1.1-4. Allora, sì, mediamente vive il doppio, è questa è la stima puntuale, che in generale verrà pubblicata sui media se il risultato scientifico li raggiunge, ma quello che è stato trovato, nel senso degli intervalli di confidenza al 95%, fa supporre una vita allungata fra il 10% (altro che doppio!) e il quadruplo. (Concretamente, grande incertezza).
Un esempio fra un'infinità, con l'OR, una sorta di confronto del rischio relativamente a 2 situazioni: si ritrova subito in rete la frase

tobacco consumption [OR:2.8 (CI95%:1.3-6.1)]

dove ovviamente in un articolo di divulgazione scientifica si potrà dire *rischio triplicato*, arrotondando il 2.8, ma il valore più piccolo è 1.3, cioè solo +30%, ben diverso dal triplicamento.

E talvolta l'intervallo di confidenza per l'OR contiene il numero 1, perdendosi così la significatività statistica della ricerca statistica fatta: per esempio un OR da 0.5 a 2 indica un rischio da dimezzato a raddoppiato; anche se la media è 0.9 o 1.1. (Risultato alquanto inconcludente).

[189] Si noti che a rigore non esiste un dataset esattamente con distribuzione normale, perchè essa è una densità continua, ma è ovvio che qua ci si riferisce a un dataset con funzione di ripartizione empirica "molto vicina" a quella di una densità normale, e specificare i dettagli non sarebbe agevole.

37.6 Esercizi

37.6.1 Esercizio

$_{\mu 2023} \approx$ Determinare con la formula

$$\overline{X}_n \pm \frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{n}}\, t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

(in cui α sarà 0.05) l'intervallo di fiducia (ovvero di confidenza) al 95% per la media della variabile aleatoria normale da cui è stato tratto questo campione:

3,990 4,767 5,642 −3,772 −4,158 −2,190 7,954 0,765 6,446 1,227 2,950 0,852

Il calcolo sarà facilitato sapendo che $S^2 \approx 15{,}747$ (calcolato col computer) e che il quantile di Student necessario è $\approx 2{,}201$ (trovato sulle tavole).

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard della virgola decimale. (Che la virgola non è separatore delle migliaia si vede dai numeri 0,765 e 0,852)

La media aritmetica degli $n = 12$ valori è

$$\begin{aligned} \overline{X}_{12} = \frac{1}{12}\Big(&3{,}990 + 4{,}767 + 5{,}642 + (-3{,}772) + (-4{,}158) + (-2{,}190) \\ &+7{,}954 + 0{,}765 + 6{,}446 + 1{,}227 + 2{,}950 + 0{,}852\Big) = \\ &= \frac{24{,}473}{12} \approx 2{,}039\,417 \approx 2{,}039 \end{aligned}$$

(e – nel valore più preciso che poi abbandoneremo – abbiamo usato lo spazietto separatore delle terne di cifre, ma stiamo seguendo solo parzialmente il NIST, National Institute of Standards and Technology, statunitense, perchè quello esige il punto decimale, non la virgola).

Applicheremo la formula scritta nel quesito, dell'intervallo di confidenza al 95% bilatero centrato per μ per un campione gaussiano, con σ^2 non nota:

$$\overline{X}_n \pm \frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{n}}\, t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

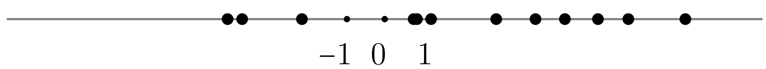
e in questo calcolo siamo molto favoriti perchè nel testo del quesito ci sono dati (approssimatamente) il valore di S^2, alquanto laborioso da calcolare, $\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)^2$, e il quantile $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$, in questo caso $t_{0.975}(11)$, non banale da trovare su normali tavole, gravate da varie ambiguità notazionali:

$$2{,}039 \pm \frac{\sqrt{15{,}747}}{\sqrt{12}}\, 2{,}201$$

$$2{,}039 \pm \frac{3{,}968}{3{,}464}\, 2{,}201$$

$$\boxed{\text{CI } 95\%\text{: } 2{,}039 \pm 2{,}521}$$

Nota 1. Ecco un diagramma cartesiano dei 12 valori (ma 2 sono quasi sovrapposti).



Nota 2. In effetti il campione era stato tratto, salvo arrotondamenti, online con WolframAlpha con

`12 random sample, normal distribution, mean 1, variance 25`

(ovviamente seguendo il link il software produce ogni volta un nuovo campione) e possiamo dirci soddisfatti perchè il vero valore $\mu = 1$ sta effettivamente nell'intervallo di confidenza trovato. Un motivo di insoddisfazione è che l'intervallo è molto ampio, ma questo è dovuto anche alla piccolezza del campione.

37.6.2 Esercizio

$_{\mu 2019}$ ≈ Determinare l'intervallo di fiducia per la media, consueto (bilatero centrato) al 95%, con questo campione gaussiano di varianza 9:

17.65 24.38 22.86 20.09 20.71 25.75 21.85

15.82 22.53 19.66 20.26 18.99 17.09 20.52.

Fra le molte possibili scritture della soluzione, stavolta si usi la

$$\mathrm{CI}_{95} = [a, b]$$

("CI" sta per *confidence interval*; si usano anche "95%CI" e molte varianti).

SVOLGIMENTO

Con la media del campione di rango $n = 14$

$$\bar{X}_{14} = \frac{1}{14}(17.65 + 24.38 + 22.86 + 20.09 + 20.71 + 25.75 + 21.85+$$

$$+15.82 + 22.53 + 19.66 + 20.26 + 18.99 + 17.09 + 20.52) = \frac{288.16}{14} \approx 20.582\,86$$

e con la nota formula dell'intervallo di fiducia in questione

$$\mathrm{CI}_{95}: \ \bar{X}_n \pm 1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ora con $\sigma = \sqrt{9} = 3$

$$20.582\,86 \pm 1.96\,\frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$20.582\,86 \pm 1.96\,\frac{3}{3.741\,66}$$

$$20.582\,86 \pm 1.96 \cdot 0.801\,784$$

$$20.582\,86 \pm 1.571\,5$$

$$\boxed{\mathrm{CI}_{95} = [19.0, 22.2]}$$

o anche

$$\boxed{\mathrm{CI}_{95} = [19.01, 22.15]}$$

(Salvo un'approssimazione a 2 cifre decimali fatta a mano, i valori erano stati simulati con WolframAlpha con la varianza 9 e la media 20, che effettivamente sta nell'intervallo trovato, seppure in posizione alquanto decentrata. Seguendo questo link potete farvi produrre un altro campione siffatto di 14 elementi, e cliccando di nuovo un altro ancora: https://www.wolframalpha.com/input/?i=14+random+normal+distribution+mean%3D20+variance%3D9; campioni sempre nuovi appena prodotti).

ES.ERCIZIO$_{\mu 2019}$
≈ Di 200 soggetti si è misurato un parametro fisiologico producendo un campione che si ritiene gaussiano, e con un foglio di calcolo si è trovato

$$\frac{1}{200}\sum_{k=1}^{200} X_k = 83.21 \qquad \frac{1}{199}\sum_{k=1}^{200}(X_k - \bar{X}_{200})^2 = 1\,405.38$$

Con la grossolana *formula pratica*, di largo uso nelle Scienze Applicate,

$$C.I._{95}:\ \bar{X}_n \pm 1.96\,\frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

trovare il consueto intervallo di fiducia della media, nella forma $C.I._{95}: [a,b]$.
SVOLGIMENTO
(Il termine $\pm 1.96\,\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ ha un errore circa del 2% per $n = 60$ e circa dell'1% per $n = 120$, rispetto al più corretto $\pm\frac{S_n}{\sqrt{n}}\,t_{0.975}(n-1)$, coi quantili di Student, e poi tende a 0; ma tutto ciò non serve per rispondere al quesito).
Ci sono dati

$$\bar{X}_{200} = 83.21 \qquad S^2_{200} = 1\,405.38$$

da cui con la *formula pratica* riportata

$$\begin{aligned} C.I._{95}:\ 83.21 \pm 1.96\,\frac{\sqrt{1\,405.38}}{\sqrt{200}} &\approx \\ \approx 83.21 \pm 1.96\,\frac{37.4884}{14.1421} &\approx \\ \approx 83.21 \pm 1.96 \cdot 2.651 &= \\ = 83.21 \pm 5.1956 & \end{aligned}$$

e infine nella forma richiesta

$$\boxed{C.I._{95}:\ [78.0, 88.4]}$$

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule (148), (149), (151), oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.
In particolare, con le (147), (150), (152), bisognerebbe saper operare se vengono fornite.

ESERCIZI SULLA LEZIONE 53

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
≈ Conoscendo la varianza 3.2 di una variabile aleatoria normale si determini l'intervallo di fiducia bilatero consueto della media al livello 95% relativamente a questo campione

-1.32 3.78 1.58 1.55 3.96 0.85 4.78 3.74 3.25 0.99

esprimendolo in entrambe le forme usuali: $a \pm b$, e anche $[u, v]$.

Svolgimento.
La media degli $n = 10$ dati é 2.316.
Consideriamo la classica formula dell'intervallo di fiducia al 95% ovvero 5%

$$\mu = \bar{X}_n \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\alpha = 0.05)$$

per la quale ora troviamo $2.316 \pm 1.96 \frac{\sqrt{3.2}}{\sqrt{10}}$ e a conti fatti

$$\boxed{\begin{array}{l} \mu = 2.316 \pm 1.109 \quad (\alpha = 0.05) \\ \mu \in \left[1.207, 3.425\right] \quad (\alpha = 0.05) \end{array}}$$

ovvero, con sole 3 cifre significative come nei dati originali,

$$\boxed{\begin{array}{l} \mu = 2.32 \pm 1.11 \quad (\alpha = 0.05) \\ \mu \in \left[1.21, 3.42\right] \quad (\alpha = 0.05) \end{array}}$$

(Si potrebbe obiettare che un corretto arrotondamento a 3 cifre significative di 3.425 é 3.43 e non 3.42; questo é vero ma il 3.425 era giá esso stesso un arrotondamento, di 3.4247..., e arrotondando a 3 cifre significative quest'ultimo, che é il vero valore, si ottiene appunto 3.42).
(I valori erano stati ottenuti simulando $N(2.4, 3.2)$).

XI – Test Statistici