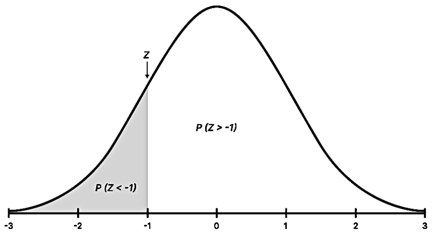
Ogiva Normale

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt[2]{2\pi}} e^{-1/2x^2}$$



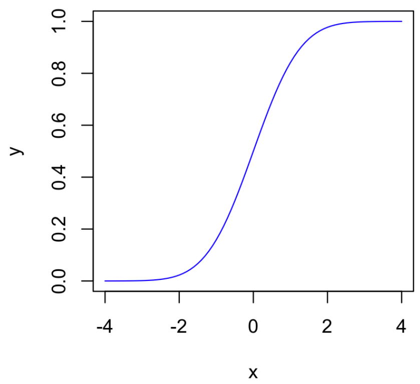
Ogiva Logistica

$$\Psi(x) = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

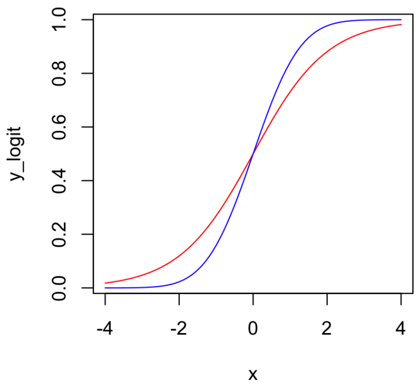
```
x=-1
pnorm(-1,mean=0,sd=1)
# [1] 0.1586553
```

```
x=-1
exp(x)/(1+exp(x))
# [1] 0.2689414
1/(1+exp(-x))
# [1] 0.2689414
```

```
x<-seq(-4,4,by=0.1)
y<-pnorm(x)
plot(x,y,type="l",col="blue")
```




```
Logit<-function(x){1/(1+exp(-(x)))}

x<-seq(-4,4,by=0.1)
y_logit<-Logit(x)
plot(x,y_logit,type="l",col="red")
points(x,y,col="blue",type="l")
```



Ogiva Normale		*Ogiva Logistica*
$\Phi(-3) = .001349898$	$\Delta(-3) = -.046$	$\Psi(-3) = .04742587$
$\Phi(-2) = .022750132$	$\Delta(-2) = -.096$	$\Psi(-2) = .11920292$
$\Phi(-1) = .158655254$	$\Delta(-1) = -.110$	$\Psi(-1) = .26894142$
$\Phi(0) = .500000000$	$\Delta(0) = .000$	$\Psi(0) = .50000000$
$\Phi(1) = .841344746$	$\Delta(1) = .110$	$\Psi(1) = .73105858$
$\Phi(2) = .977249868$	$\Delta(2) = .096$	$\Psi(2) = .88079708$
$\Phi(3) = .998650102$	$\Delta(3) = .046$	$\Psi(3) = .95257413$

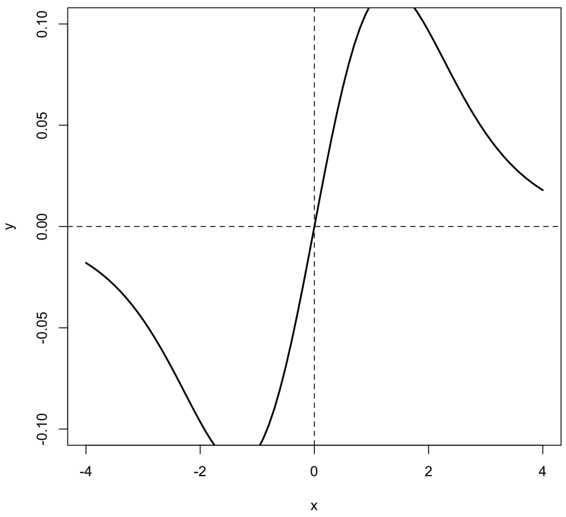
Camilli 1993 Eq.(3)

$$F(x,d) = \Phi(x) - \Psi(dx)$$

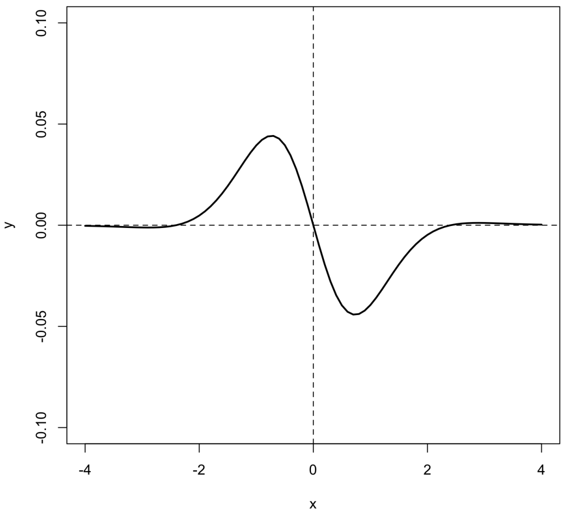
Se *d* = 1

```
x<-seq(-4,4,by=0.1)

F<-function(x,d){

 Phi_x<-pnorm(x,0,1)
 Psi_x<-Logit(d*x)
 Phi_x-Psi_x

}
y<-F(x,d=1)

plot(x,y,type="l",lwd=2,ylim=c(-0.10,0.10))
abline(h=0,lty="dashed")
abline(v=0,lty="dashed")
```

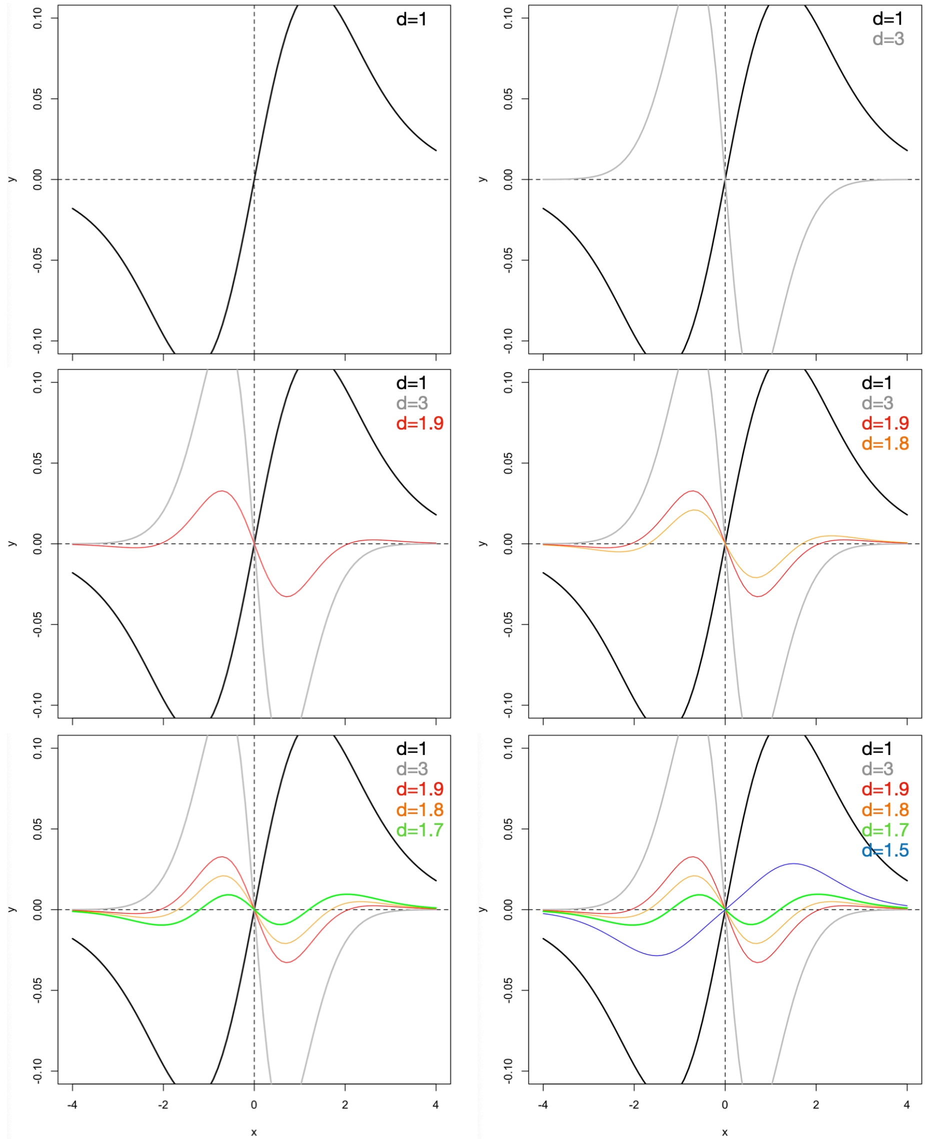
```
# d = 1
```



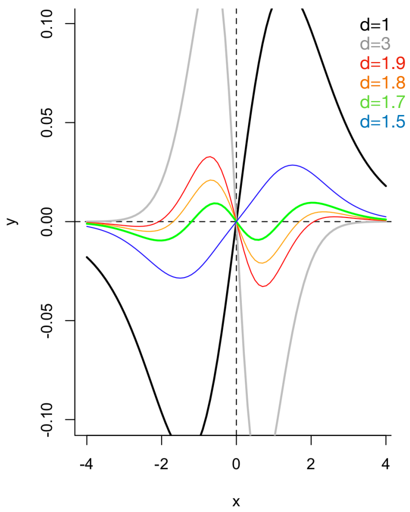

```
# d = 2
y<-F(x,d=2)
plot(x,y,type="l",lwd=2,ylim=c(-0.10,0.10))
abline(h=0,lty="dashed")
```

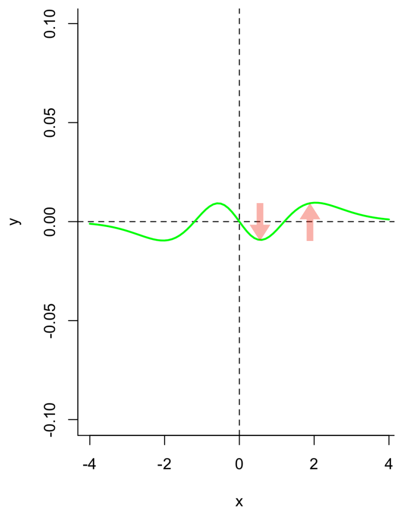


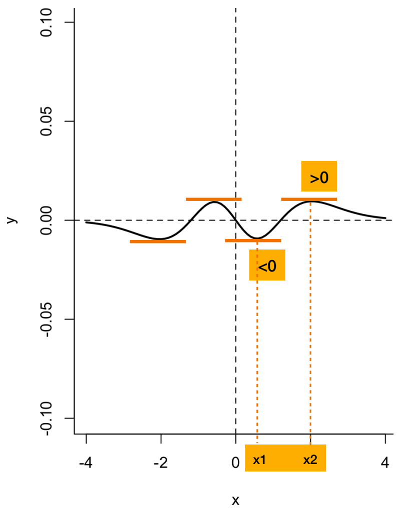
Osserviamo graficamente come cambia la funzione della differenza (Eq.3) $F(x,d) = \Phi(x) - \Psi(dx)$ al variare di *d*:



Per valori di *d* vicini a 1.7-1.8, l'**Eq. 3** ha due picchi massimi e due picchi minimi, simmetrici rispetto allo zero, che tendono ad eguagliarsi…







Per trovare i picchi si calcola la derivata prima di $F(x,d) = \Phi(x) - \Psi(dx)$ rispetto a x e si imposta il risultato uguale a zero:

Camilli 1993 Eq.(4)

$$\frac{\delta F(x,d)}{\delta x} = \frac{1}{\sqrt[2]{2\pi}} e^{-1/2x^2} - \frac{de^{-dx}}{(1+e^{-dx})^2} = 0$$

L'Eq.(4) ha quattro radici polinomiali (zero) di cui due positive e due negative (le radici negative sono simmetriche rispetto allo zero, con le radici positive).

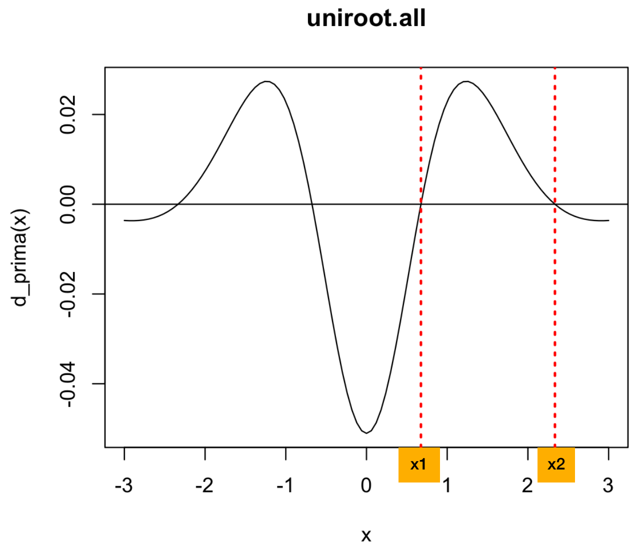
Inoltre, per valori di *d* vicini a 1.8, è visivamente evidente che, per $x > 0$, $F(x,d) = \Phi(x) - \Psi(dx)$ è negativo in una radice (ad esempio x1) e positivo nell'altra (ad esempio x2).

Camilli 1993 Eq.(4)

$$\frac{\delta F(x,d)}{\delta x} = \frac{1}{\sqrt[2]{2\pi}} e^{-1/2x^2} - \frac{de^{-dx}}{(1+e^{-dx})^2} = 0$$

Se *d* = 1.8

```
d = 1.8

library(rootSolve)

d_prima<-function(x){
(1/sqrt(2*pi)*exp(-0.5*x^2) - (d*exp(-d*x))/(1+exp(-d*x))^2)
                }

curve(d_prima(x), -3, 3, main="uniroot.all")
abline(h=0)

Root<-uniroot.all(d_prima, c(-5, 5))
Root
#[1] -2.334858 -0.674589  0.674589  2.334858
```



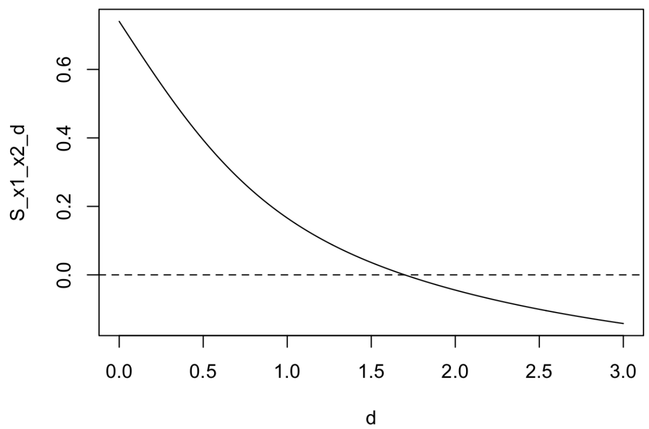
Secondo quanto osservato, possiamo studiare graficamente la relazione che sussiste tra i valori possibili di *d* e i due valori di picco negativo e positivo, identificati alle radici x1 e x2: $-F(x1,d), F(x2,d)$.

In particolare, cercheremo il valore di *d* per il quale i due picchi si eguagliano, sommando a zero:

Camilli 1993 Eq.(5)

$$S(x1,x2,d) = -F(x1,d) + F(x2,d) \approx 0$$

```
S_x1_x2_d<-function(d){
            Phi_x1<-pnorm(x1,0,1)
            Psi_x1<-Logit(d*x1)
            F_x1<-Phi_x1-Psi_x1

            Phi_x2<-pnorm(x2,0,1)
            Psi_x2<-Logit(d*x2)
            F_x2<-Phi_x2-Psi_x2

            F_x1+F_x2
            }

Root.2<-uniroot.all(S_x1_x2_d, c(-5, 5))
Root.2
#[1] 1.699233

d<-seq(0,3,by=0.01)
y= S_x1_x2_d(d)
plot(d,y,type="l",ylab="S_x1_x2_d Camilli Eq.5")
abline(h=0,lty=“dashed")
```



Procedura iterativa (Iter 0)

Step 1: (Eq. 4)

```
d=1.8
d_prima<-function(x){
(1/sqrt(2*pi)*exp(-0.5*x^2) - (d*exp(-d*x))/(1+exp(-d*x))^2)
                  }
Root<-uniroot.all(d_prima, c(-5, 5))
x1<-Root[Root>0][1]
x2<-Root[Root>0][2]
x1
#0.674589
x2
#2.334858
```

Step 2: (Eq. 5)

```
#Eq.5
S_x1_x2_d<-function(d){

 Phi_x1<-pnorm(x1,0,1)
 Psi_x1<-Logit(d*x1)
 F_x1<-Phi_x1-Psi_x1
 Phi_x2<-pnorm(x2,0,1)
 Psi_x2<-Logit(d*x2)
 F_x2<-Phi_x2-Psi_x2
 F_x1+F_x2
}

Root.2<-uniroot.all(S_x1_x2_d, c(-5, 5))
Root.2
# 1.699233 valore aggiornato “d” per Step 1…
```

Procedura iterativa (Iter 1)

Step 1: (Eq. 4)

```
d= 1.699233
d_prima<-function(x){
(1/sqrt(2*pi)*exp(-0.5*x^2) - (d*exp(-d*x))/(1+exp(-d*x))^2)
                 }
Root<-uniroot.all(d_prima, c(-5, 5))
x1<-Root[Root>0][1]
x2<-Root[Root>0][2]
x1
#0.5667718
x2
#2.035582
```

Step 2: (Eq. 5)

```
#Eq.5
S_x1_x2_d<-function(d){

 Phi_x1<-pnorm(x1,0,1)
 Psi_x1<-Logit(d*x1)
 F_x1<-Phi_x1-Psi_x1
 Phi_x2<-pnorm(x2,0,1)
 Psi_x2<-Logit(d*x2)
 F_x2<-Phi_x2-Psi_x2
 F_x1+F_x2
}

Root.2<-uniroot.all(S_x1_x2_d, c(-5, 5))
Root.2
# 1.701816 valore aggiornato "d" per Step 1…
```

Procedura iterativa (Iter 2)

Procedura iterativa (Iter 3…)

…Ripetere fino a che non si osservano aggiustamenti significativi al valore aggiornato "d"!

Riempiamo la seguente tabella

Iteration	d	Roots: x1	Roots: x2
0	1.8	0.674589	2.334858
1	1.699233	0.5667726	2.035583
2	1.701816	0.5711744	2.043365
3	1.701816	0.5711744	2.043365
4	1.701816	0.5711746	2.043365

```
#Proviamo ad "automatizzare" la procedura iterativa in R

iter=0
d= 1.8;d # valore "arbitrario" iniziale per d
Root<-uniroot.all(d_prima, c(-5, 5))
# Radici positive della derivata prima = 0 di F(x,d)=Phi(x)-Psi(dx)
x1<-Root[Root>0][1]
x2<-Root[Root>0][2]

# Stampa info...
 cat("Iterazione=", iter,"d=",d,"x1=",x1,"x2=",x2,"\n")

# Radice positiva della funzione S(x2,x2,d)=0
Root.2<-uniroot.all(S_x1_x2_d, c(-5, 5))
d=Root.2 # aggiornare il valore iniziale di "d"

repeat{

 iter=iter+1
 Root<-uniroot.all(d_prima, c(-5, 5))
    # Radici positive della derivata prima = 0 di F(x,d)=Phi(x)-Psi(dx)
    x1<-Root[Root>0][1]
    x2<-Root[Root>0][2]

 cat("Iterazione=", iter,"d=",d,"x1=",x1,"x2=",x2,"\n")

    # Radice positiva della funzione S(x2,x2,d)=0
    Root.2<-uniroot.all(S_x1_x2_d, c(-5, 5))
 if(abs(d-Root.2) < 0.0001) break
 d=Root.2 # aggiornare il valore iniziale di "d"

  }
```

In conclusione:

Camilli 1993 Eq.(1)

$$|\Phi(x) - \Psi(dx)| < .01$$

Se d = 1.702

```
Logit<-function(x){1/(1+exp(-(d*x)))}

# dalle nostre simulazioni
d=1.701816 # approx. = 1.702

x<-seq(-4,4,by=0.1)
y_logit<-Logit(x)

plot(x,y_logit,type="l",col="red")
points(x,pnorm(x),col="blue",type="l")
```

L'ogiva normale e logistica coincidono perfettamente.