LEGGI DI CONSERVAZIONE in meccanica Lagrangiana

Una funzione $I: \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$ $\quad (\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \mapsto I(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$

è chiamata COSTANTE DEL MOTO (o integrale primo),

per un sistema Lag. a n gradi di lib. con Lagrangiana L,

se la funzione composta $I(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)$ è cost. in

t per $\bar{q}(t)$ che soddisfa le eq. di Lagrange, cioè

$$\frac{d}{dt}\left(I(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) \right) = 0 \quad \text{per } \bar{q}(t) \text{ che risolve eq. Lag.}$$

$$\parallel$$

$$\sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial I}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_l} \ddot{q}_l \right) + \frac{\partial I}{\partial t}$$

⇝ Se conosco la funzione $I(q, \dot{q}, t)$ e so che è una COST. del MOTO,

allora posso scrivere l'equazione

$$I(q(t), \dot{q}(t), t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cost.}}}{I_0} \quad \leftarrow \text{famiglia (al variare del parametro } I_0\text{) di eq. diff. del 1° ord.}$$

che il moto reale sicuramente soddisfa

↳ posso usarla per risolvere il problema di integrare le eq. di Lagrange.

Conservazione dell' ENERGIA in sistemi Lagrangiani

Def. Per sistemi Lagrangiani a n gradi di lib. e lagrangiana $L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$

definiamo

$$E(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \equiv \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) - L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

Calcoliamo la derivata $\frac{d}{dt}$ di $E(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)$

$$\frac{d}{dt} E(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) = \sum_{h=1}^{n} \left(\cancel{\ddot{q}_h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}} + \dot{q}_h \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \right) -$$

$$- \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_h} \dot{q}_h + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \ddot{q}_h} \right) - \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \Bigg(\underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h}}_{\text{è valutata in } \bar{q}(t)} \Bigg) - \frac{\partial L}{\partial t}$$

se $\bar{q}(t)$ risolve eq. di Lagrange

$$= - \frac{\partial L}{\partial t}$$

$\Rightarrow$ Se L NON DIPENDE ESPLICITAMENTE dal TEMPO $\left(\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \right)$ allora $E(q, \dot{q}, t)$ è una COST. del MOTO

Invarianza della Lagrangiana (e quindi della dinamica) sotto traslazioni temporali.

Per un sistema meccanico conservativo

$$L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{hk} a_{hk}(q) \dot{q}_h \dot{q}_k - V(\bar{q})$$

è una funzione OMOGENEA di grado 2 nelle $\dot{q}_h$

$$E(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - L$$

Def. Una funzione $f(x_1,\dots,x_N)$ si dice OMOGENEA di grado α se $\forall \lambda>0$ e ogni scelta di $x_1,\dots,x_N$, si ha

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_N) = \lambda^\alpha f(x_1,\dots,x_N)$$

ES. $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_2^2 + x_3x_1$ $\qquad \alpha = 2$

$f(x_1,x_2) = \sqrt{x_1 + \frac{x_2^2}{x_1}}$ $\qquad \alpha = 1/2$

Lemma. f omogenea di grado $\alpha \Rightarrow \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha f$

Dim. $0 = \frac{d}{d\lambda}\left[f(\lambda x_1,\dots,\lambda x_N) - \lambda^\alpha f(x_1,\dots,x_N)\right]\Big|_{\lambda=1} =$

$$= \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial f(\lambda x_1,\dots \lambda x_N)}{\partial x_i} x_i - \alpha\lambda^{\alpha-1} f(x_1,\dots,x_N)\right)\Big|_{\lambda=1} \quad //$$

$$E = \sum_{k=1}^m \dot q_k \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} - L = \underbrace{\sum_{k=1}^m \dot q_k \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}}_{T \text{ omog. di grado } 2} - \overset{=0}{\cancel{\sum_{k=1}^m \dot q_k \frac{\partial V}{\partial \dot q_k}}} - T + V =$$

$$= 2T - T + V = T + V$$

- Nel caso in cui abbiamo forze puramente posizionali E è l'energia totale del sist. meccanico

- Se $V = V_0(\bar q) + \underset{\text{lineare omog. in } \dot{\bar q} \,\leftarrow\, \alpha=1}{V_1(\bar q, \dot{\bar q})}$

$$\Rightarrow -\sum_{k=1}^m \dot q_k \frac{\partial V}{\partial \dot q_k} = -V_1$$

$$E = 2T - V_1 - T + V_0 + V_1 = T + V_0$$

$\hookrightarrow$ V_1 non contribuisce all'energia totale del sistema:

$$V_1(q,\dot{q}) = \sum_{k=1}^{m} \dot{q}_k \Omega_k(q)$$

$$\hookrightarrow \quad Q_h = \frac{d}{dt}\frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V_1}{\partial q_h} = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial \Omega_h}{\partial q_l}\dot{q}_l - \sum_{k=1}^{m} \dot{q}_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial q_h}$$

Tale forza è ORTOGONALE al vett. velocità $\dot{\bar{q}}$:

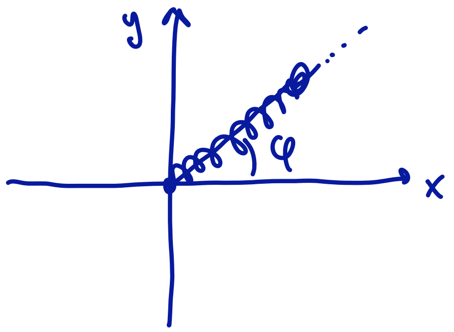
$$\sum_h \dot{q}_h Q_h = \sum_{l,h} \frac{\partial \Omega_h}{\partial q_l}\dot{q}_l \dot{q}_h - \sum_{k,h} \dot{q}_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial q_h}\dot{q}_h = 0$$

entrambi sono modi diversi di scrivere

$$\sum_{a,b} \frac{\partial \Omega_a}{\partial q_b}\dot{q}_a \dot{q}_b$$

Siccome $\bar{Q} \cdot \dot{\bar{q}} = 0$, la forza $\bar{Q}$ NON compie lavoro sul pto materiale e quindi non contribuisce al bilancio energetico del pto materiale stesso.

ESEMPIO: oscillatore armonico bidimensionale



$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2)$$

$\omega^2 = k/m$

Eq. di Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x \rightsquigarrow x(t) = A_x \cos(\omega t + \varphi_x)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \rightarrow \ddot{y} = -\omega^2 y \rightsquigarrow y(t) = A_y \cos(\omega t + \varphi_y)$$

Passiamo a coord. polari: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases}$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

← L non dip. esplicitam. dalla coord. φ

→ eq. Lagr.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \rightarrow \ddot{r} = -\omega^2 r + r\dot{\varphi}^2$$

$$p_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \varphi}}_{=0} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0 \Rightarrow mr^2\dot{\varphi} \text{ è una COST. DEL MOTO}$$

Sapendo che $mr^2\dot{\varphi} = \ell$ (cost.) $\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\ell}{mr^2}$ che posso sostituire

in prima eq.

$$\underbrace{\ddot{r} = -\omega^2 r + \frac{\ell^2}{m^2 r^3}}$$

Equazione in incognita $r(t)$.

Viene da Lagrangiana $L_{eff.} = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{m\omega^2}{2}r^2 - \frac{\ell^2}{2mr^2}$ ← come si arriva a questa Lagrangiana?

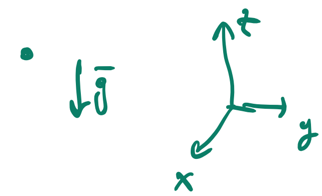
COORDINATE CICLICHE o IGNORABILI

Consideriamo un sist. Lagr. a n gradi di lib. e supponiamo che L NON dip. esplicitam. da alcune coordinate (dette COORDINATE CICLICHE), $q_{m+1}, \dots, q_n$

$$L = L(q_1, \dots, q_m, \underbrace{\dot q_1, \dots, \dot q_n}, t)$$

Se L non dipendesse da una $\dot q$, la matrice cinetica avrebbe una riga e una colonna di zeri e non sarebbe strettamente definita positiva

ES. Pto mobile soggetto a forza di gravità.



$$T = \frac{1}{2} m (\underbrace{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2}_{\dot q_{1,2,3}}) \qquad V = mgz$$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) - mgz = L(z, \dot x, \dot y, \dot z)$$

$\rightarrow$ x e y sono COORD. CICLICHE

OSSERVAZIONE: quando $q_{\hat i}$ è coordinata ciclica, la Lagrangiana è invariante sotto la trasformazione

$$q_h \mapsto q_h \quad h \neq \hat i \qquad \dot q_h \mapsto \dot q_h \quad \forall h$$

$$q_{\hat i} \mapsto q_{\hat i} + c \qquad c \text{ cost.}$$

[Possiamo definire delle funzioni (VARIABILI DINAMICHE)

$$p_\ell(\bar q, \dot{\bar q}, t) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot q_\ell}(\bar q, \dot{\bar q}, t)$$

dette MOMENTI CONIUGATI.]

Se $q_{m+1}, \dots, q_n$ sono coordinate cicliche, allora

$$\frac{d}{dt} p_l(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) = \qquad l = m+1, \dots, n$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) \underset{\uparrow}{=} \frac{\partial L}{\partial q_l}(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) \underset{\uparrow}{=} 0$$

se il moto $\bar{q}(t)$ soddisfa le eq. di Lagr.

q_l è ciclica

$\Rightarrow$ i momenti coniugati p_l $(l = m+1, \dots, n)$, relativi alle coord. cicliche, sono COSTANTI DEL MOTO

[p_l è detto momento coniugato di q_l]

ES) $L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$

x è ciclica $\quad p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$

y " " $\quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$

$\rightarrow$ quantità di moto lungo x e y è conservata

Usiamo ora queste cost. del moto per "ridurre i gradi di libertà"

- Prendiamo $p_l(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$

- L' INSIEME DI LIVELLO (definito dalla scelta del valore della cost. del moto) su cui il MOTO GIACE è dato dal luogo dei pti $(q, \dot{q}) \in TQ$ t.c.

(*) $\tilde{p}_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, \underbrace{\dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n})$ $\qquad l = m+1, \dots, n$

è una costante

prendiamo queste come le $n-m$ incognite delle $n-m$ equaz.

- Risolviamo le $n-m$ equazioni nelle incognite $\dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n$.

$\Rightarrow \dot{q}_l = u(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, \tilde{p}_{m+1}, \dots, \tilde{p}_n, t)$

- Definiamo una LAGRANGIANA EFFICACE (o Lagrangiana RIDOTTA)

$$L_{eff}(q_1,\dots,q_m,\dot q_1,\dots,\dot q_m;\overbrace{\tilde p_{m+1},\dots,\tilde p_n}^{\text{PARAMETRI}},t)\equiv$$

$$\equiv L\big(q_1,\dots,q_m,\dot q_1,\dots,\dot q_m,u_{m+1}(q_1,\dots,q_m,\dot q_1,\dots,\dot q_m;\tilde p_{m+1},\dots,\tilde p_n,t),\dots$$

$$\dots,u_n(q_1,\dots,q_m,\dot q_1,\dots,\dot q_m;\tilde p_{m+1},\dots,\tilde p_n,t),t\big)$$

$$-\sum_{\ell=m+1}^{n}\tilde p_\ell\, u_\ell(q_1,\dots,q_m,\dot q_1,\dots,\dot q_m;\tilde p_{m+1},\dots,\tilde p_n,t)$$

$$\hookrightarrow L_{eff}=\Big(L-\sum_{k=m+1}^{n}\tilde p_k\dot q_k\Big)\Big|_{\substack{\dot q_k=u_k(q_1,\dots,q_m,\dot q_1,\dots,\dot q_m;\tilde p,t)\\ k=m+1,\dots,n}}$$

Prendiamo L_{eff} e la trattiamo come la Lagrangiana di un sistema (ausiliario) a m gradi di libertà $(m<n)$.

Eq. di Lagrange per L_{eff} $\quad h=1,\dots,m$

$$\frac{\partial L_{eff}}{\partial q_h}=\frac{\partial L}{\partial q_h}+\cancel{\sum_{\ell=m+1}^{n}\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_\ell}}_{=p_\ell}\frac{\partial u_\ell}{\partial q_h}}-\cancel{\sum_{\ell=m+1}^{n}\tilde p_\ell\frac{\partial u_\ell}{\partial q_h}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_{eff}}{\partial \dot q_h}=\frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial L}{\partial \dot q_h}+\cancel{\sum_{\ell=m+1}^{n}\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_\ell}}_{=p_\ell}\frac{\partial u_\ell}{\partial \dot q_h}}-\cancel{\sum_{\ell=m+1}^{n}\tilde p_\ell\frac{\partial u_\ell}{\partial \dot q_h}}\Big]$$

$$\Rightarrow\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L_{eff}}{\partial \dot q_h}-\frac{\partial L_{eff}}{\partial q_h}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_h}-\frac{\partial L}{\partial q_h}\Big|\ \text{valutato in } q_h(t)\quad h=1,\dots,m$$

$$\text{con } \dot q_k=u_k\quad {}_{k=m+1,\dots,n}$$

$\Rightarrow$ Le eq. di Lagrange di L_{eff} coincidono con le prime m eq. di Lagrange di L (usando le $(*)$)

$\leadsto$ le funz. $q_h(t)$ $(h=1,\dots,m)$ che risolvono le equazioni di Lagrange di L^*, risolvono anche le eq. di Lagr. di L.

Come determiniamo le $q_k(t)$ con $k=m+1,\dots,n$?

Le rispettive eq. di Lagrange sono state utilizzate per ricavare $\dot q_{m+1},\dots,\dot q_n$ in funz. delle $q_h, \dot q_h$ $h=1,\dots,m$ (u_k)

$$\rightarrow \quad \dot q_k(t) = \underbrace{u_k(q_1(t),\dots,q_m(t),\dot q_1(t),\dots,\dot q_m(t),\tilde p_{m+1},\dots,\tilde p_n,t)}_{\text{Funzione di } t \text{ nota una volta risolte le } m \text{ eq. di Lagr. di } L^* \text{ e invertito } p_\ell(q,\dot q,t)=\tilde p_\ell}$$

$\downarrow$

eq. diff. del 1° ordine per le $q_k(t)$, del tipo $\dot x = f(t)$, cioè sono risolvibili per integrazione (quadratura).

ES) $L = \frac{1}{2}m(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2) - mgz$ $\qquad n=3 \quad m=1$

$\tilde p_x = m\dot x \leadsto \dot x = \tilde p_x/m \qquad \tilde p_y = m\dot y \leadsto \dot y = \tilde p_y/m$

$$L^* = L - \tilde p_x \dot x - \tilde p_y \dot y \Big|_{\dot x=\frac{\tilde p_x}{m},\,\dot y=\frac{\tilde p_y}{m}} = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{\tilde p_x}{m}\right)^2+\left(\frac{\tilde p_y}{m}\right)^2+\dot z^2\right]-mgz-\frac{\tilde p_x \tilde p_x}{m}-\frac{\tilde p_y \tilde p_y}{m}$$

$$= \frac{1}{2}m\dot z^2 - mgz - \frac{\tilde p_x^2}{2m} - \frac{\tilde p_y^2}{2m} = L^*(z,\dot z,\tilde p_x,\tilde p_y)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot z} = m\ddot z \qquad \frac{\partial L}{\partial z} = -mg \quad \Rightarrow \quad \ddot z = -g \rightarrow z(t) = -\frac{1}{2}gt^2+v_0^z t+z_0$$

$x(t), y(t)$? usiamo
$$\begin{cases} \dot x = \tilde p_x/m & \rightarrow x(t) = \frac{\tilde p_x}{m}t + x_0 \\ \dot y = \tilde p_y/m & \rightarrow y(t) = \frac{\tilde p_y}{m}t + y_0 \end{cases}$$