

Foglio 2

Esercizio 1 Sia X uno spazio metrico e $l \in X$. Si consideri una successione $(x_n)_n$ a valori in X e una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$. Dimostrare le seguenti affermazioni.

- (i) Se $(x_n)_n$ converge a l , allora anche $(x_{n_k})_k$ converge a l .
- (ii) Se $(x_{n_k})_k$ converge a l e $(x_n)_n$ è di Cauchy, allora anche $(x_n)_n$ converge a l .
- (iii) Se $(x_n)_n$ è di Cauchy, allora è limitata.
- (iv) Se $(x_n)_n$ converge, allora è limitata. Vale il viceversa? Dimostrare o fornire un controesempio.
- (v) $(x_n)_n$ converge a l se e solo se $d(x_n, l)$ converge a 0 in \mathbf{R} .
- (vi) Se $(x_n)_n$ converge a l e $U \subseteq X$ è un intorno di l , allora c'è solo un numero finito di termini di $(x_n)_n$ che non appartengono a U .

Esercizio 2 Sia $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se sono vere dare una dimostrazione, se false dare un controesempio.

- (i) Se $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, allora f non ammette massimo.
- (ii) Se f è illimitata, allora almeno uno dei due limiti $\lim_{x \rightarrow -\infty} |f(x)|$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)|$ vale $+\infty$.
- (iii) Se $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, allora f ammette massimo.
- (iv) Se f è limitata, allora ammette massimo.
- (v) Se f è periodica, allora ammette massimo (si ricordi che f si dice periodica se esiste $T > 0$ tale che $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$).

Esercizio 3 Sia X uno spazio metrico e $p \in X$ un punto fissato.

- (i) Si consideri $K \subseteq X$ compatto e disgiunto da p . Mostrare che esiste un punto $x_0 \in K$ che ha distanza minima da p . (*Suggerimento*: ricordare che la funzione $x \mapsto d(x, p)$ è continua).
- (ii) Sia ora $X = \mathbf{R}^n$, $p \in \mathbf{R}^n$ un punto e $C \subseteq \mathbf{R}^n$ un chiuso disgiunto da p . Mostrare che esiste un punto $x_0 \in C$ che ha distanza minima da p .
- (iii) Mostrare con un controesempio che, se C non è chiuso, il punto x_0 di distanza minima potrebbe non esistere.

Esercizio 4 Si consideri la funzione $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(x) = 1 + e^{-x}$. Dimostrare che l'immagine di f è contenuta in $[1, +\infty)$ e che l'equazione $1 + e^{-x} = x$ ammette un'unica soluzione in tale intervallo. (*Suggerimento*: dimostrare che f è una contrazione).

Esercizio 5 Sia Ω un insieme e $(f_n)_n$ una successione di funzioni limitate $f_n: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$. Data una funzione limitata $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (i) f_n converge uniformemente a f per $n \rightarrow \infty$;
- (ii) $\sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)|$ converge a 0 per $n \rightarrow \infty$;
- (iii) la successione $(f_n)_n$ converge a f per $n \rightarrow \infty$, considerata come successione a valori nello spazio metrico $\mathcal{B}(\Omega; \mathbf{R})$ delle funzioni limitate $\Omega \rightarrow \mathbf{R}$, rispetto alla distanza definita da $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in \Omega} |f(x) - g(x)|$.

Esercizio 6 Si consideri la successione di funzioni $f_n: (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f_n(x) = x^n.$$

- (i) Dimostrare che $(f_n)_n$ converge puntualmente a una funzione f . Determinare esplicitamente f e stabilire se la convergenza è anche uniforme. (*Suggerimento*: è utile disegnare i grafici di alcune f_n).
- (ii) Stabilire se valgono le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1} f_n(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \stackrel{?}{=} \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Esercizio 7 Si consideri la successione di funzioni $f_n: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}.$$

Dimostrare che $(f_n)_n$ converge puntualmente a una funzione f . Determinare esplicitamente f e stabilire se la convergenza è anche uniforme su \mathbf{R} , su $[1, +\infty)$ e su $[-1, 1]$.

Esercizio 8 Sia $I = [0, 1]$ e $X := \mathcal{C}(I; \mathbf{R})$ l'insieme delle funzioni continue definite su I a valori reali. Come si è visto, su X si adotta normalmente la metrica uniforme, data dalla distanza $d_\infty(f, g) := \sup_I |f - g|$. Esistono però anche altre distanze che è possibile definire su tale insieme. Un esempio comune è la metrica integrale (di ordine 1) definita da

$$d_1(f, g) := \int_0^1 |f - g|.$$

- (i) Dimostrare che d_1 è effettivamente una distanza.
- (ii) Si consideri la successione di funzioni $(f_n)_n$ definite da

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{se } x \in [0, 1/n]; \\ 0 & \text{se } x \in [1/n, 1]. \end{cases}$$

Dimostrare che $(f_n)_n$ converge alla funzione identicamente nulla in (X, d_1) (rispetto cioè alla distanza d_1). La convergenza è anche puntuale o uniforme?

Esercizio 9 Si consideri la successione di funzioni $f_n: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f_n(x) = \arctan(nx).$$

Determinare il limite puntuale f , se esiste, e stabilire su quali intervalli $I \subseteq \mathbf{R}$ la convergenza è anche uniforme.

Esercizio 10 Sia (X, d) uno spazio metrico e $Y \subseteq X$. C'è una naturale struttura di spazio metrico su Y data dalla restrizione di d a $Y \times Y$.

- (i) Sia Z uno spazio metrico e $f: X \rightarrow Z$ continua. Mostrare che la restrizione $f|_Y: Y \rightarrow Z$ è continua.
- (ii) Sia $X = \mathbf{R}$ e $Y = (0, 1)$. Costruire una successione di Cauchy a valori in Y che non ammette limite in Y . Dedurre che Y non è completo.
- (iii) Si supponga che X sia completo. Dimostrare che $Y \subseteq X$ è completo se e solo se è chiuso.
- (iv) Dimostrare che se X è compatto, allora è completo. Mostrare con un esempio che non vale il viceversa.
- (v) Sia $X = \mathbf{R}^2$ e $Y = \mathbf{Z}^2$. Mostrare che Y è discreto, ossia che ogni punto $y \in Y$ ha un intorno che non contiene altri elementi di Y oltre a y stesso. Y è chiuso in X ? È limitato? È compatto? È completo?
- (vi) Sia X uno spazio metrico e $Y \subseteq X$ tale che, per ogni punto $y \in Y$, la palla di raggio 1 centrata in y non contenga altri elementi di Y oltre a y stesso. Dire se Y è completo e dare una condizione necessaria e sufficiente perché sia compatto.

Esercizio 11 Siano X, Y spazi metrici e $f: X \rightarrow Y$ una funzione continua. Sia inoltre $(x_n)_n$ una successione di Cauchy a valori in X e consideriamo la successione $(f(x_n))_n$, a valori in Y .

- (i) Si supponga che X sia completo. Dimostrare che la successione $(f(x_n))_n$ è di Cauchy.
- (ii) Mostrare con un esempio che, se X non è completo, allora $(f(x_n))_n$ non è necessariamente di Cauchy. (*Suggerimento*: scegliere una successione $(x_n)_n$ di Cauchy che non ammette limite.)
- (iii) Senza ipotesi ulteriori su X , mostrare che se f è uniformemente continua allora $(f(x_n))_n$ è di Cauchy.

Esercizio 12 Si consideri $K = [a, b] \times [0, 1] \subseteq \mathbf{R}^2$ e sia $f: K \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua. Per ogni $t \in [0, 1]$ si ponga

$$G(t) := \int_a^b f(x, t) dx.$$

Si osservi che, per t fissato, l'integrale $G(t)$ è in effetti un numero reale, dipendente da t . Risulta dunque ben definita una funzione $G: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ che manda t in $G(t)$. Dimostrare che G è continua.

Suggerimento: dimostrare che f è uniformemente continua e usare tale proprietà per ottenere una stima su $|f(x, t) - f(x, t + h)|$.