

# Geometria 3 - Curve e superfici 2025/2026

## Foglio di esercizi 3

Prof. Valentina Beorchia

13 marzo 2026

1. Si consideri la curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da

$$\alpha(t) = \left( \frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t \right).$$

- (a) Si verifichi che  $\alpha$  è parametrizzata per lunghezza d'arco e che è biregolare.
- (b) Calcolare il triedro di Frenet, la curvatura e la torsione.
- (c) Dimostrare che  $\alpha(\mathbb{R})$  è una circonferenza. Calcolare il piano in cui giace, il raggio ed il centro.

2. Si consideri la curva  $\alpha : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  data da

$$\alpha(t) = \left( t, 1 + \frac{1}{t}, -1 + \frac{1}{t} \right).$$

- (a) Si verifichi che  $\alpha$  è una curva piana.
- (b) Si calcoli il triedro di Frenet, curvatura e torsione in un punto generico.
- (c) Si determini il piano contenente la traccia di  $\alpha$ .

3. Sia  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  la curva definita da

$$\alpha(t) = (t, 2t, t^4).$$

- (a) Si verifichi che  $\alpha$  è una curva regolare e si individuino eventuali punti di flesso.
- (b) Si calcolino, ove possibile, la curvatura, la torsione e il triedro di Frenet di  $\alpha$ .

(c) Si verifichi che  $\alpha$  è una curva piana e si individui il piano in cui è contenuta.

4. Sia  $\alpha : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  la curva data da

$$\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t, e^t \sin t).$$

(a) Si dimostri che  $\alpha$  è una curva regolare e si parametrizzi  $\alpha$  con lunghezza d'arco.

(b) Si calcolino la curvatura e il triedro di Frenet di  $\alpha$ .

(c) Si calcoli la circonferenza osculatrice ad  $\alpha$  in  $\alpha(\pi)$ .

5. Si consideri la curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  data da

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, e^{-1/t}, 0), & t > 0 \\ (0, 0, 0), & t = 0 \\ (t, 0, e^{1/t}), & t < 0 \end{cases}$$

(a) Si verifichi che  $\alpha$  è di classe  $C^\infty$ .

(b) Si calcoli la curvatura e, ove possibile, la torsione.

(c) Si verifichi che  $\alpha$  non è una curva piana.

(d) Dove è definita la torsione è nulla ma  $\alpha$  non è una curva piana, in apparente contrasto con il teorema di caratterizzazione delle curve piane. Si spieghi il perché.