Lezione 10 marzo 2026

martedì 10 marzo 2026 09:12

Tutorato: 17 marzo 9.15 - 10.45

Questa settimana: curve
Prossima: superfici

* * *

Bando doppia laurea Trieste - Lubiana

scadenza 23/3/2026

Idea: 3° anno o 1 semestre
(acquisire ≥30 cfu)

tesi di laurea: inglese, con 2
relatori (1 TS e 1 LJ)

Proposta: viaggio di istruzione al Dipartimento di Matematica
di Ljubljana
in treno (con 3 - 4 macchine?)

venerdì 20 marzo: partenza ~ 8:00
dalla st. di Sežana
rientro tardo pomeriggio.

* * *

Visto: $k(s)$ funzione curvatura
$\tau(s)$ funzione torsione

Prop.: Il triedro di Frenet
$\{T(s), n(s), b(s)\}$ per $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$
PLA, verifica le

EQUAZIONI DI FRENET-SERRET
(1847) (1851)

$$(*)\quad \begin{cases} T'(s) = k(s)\, n(s) \\ b'(s) = \tau(s)\, n(s) \\ n'(s) = -k(s)\, T(s) - \tau(s)\, b(s) \end{cases}$$

(att.: alcuni libri definiscono $\tau(s)$ come $b'(s) = -\tau(s) n(s)$)

Dim. Le prime 2 seguono dalle definizioni di $k(s)$ e $\tau(s)$
e $\tau(s)$.

La terza: oss. $\{T(s), n(s), b(s)\}$

e $\{b(s), T(s), n(s)\}$

hanno la stessa orientazione

$$\Rightarrow n(s) = b(s) \wedge T(s)$$

$$\Rightarrow n'(s) = b'(s) \wedge T(s) + b(s) \wedge T'(s)$$

$$= \tau(s)\,\underbrace{n(s)\wedge T(s)}_{=-b(s)} + \underbrace{b(s)\wedge k(s)\,n(s)}_{=-T(s)}$$

$$= -\tau(s)\,b(s) - k(s)\,T(s)$$

Def.: Un MOVIMENTO RIGIDO di $\mathbb{R}^n$ è una applicazione (affine) $\rho: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ t.c.

$\exists\, A \in SO(n)$ (gruppo ort. speciale)

ed $\exists\, b \in \mathbb{R}^n$ t.c.

$$\rho(v) = A \cdot v + b$$

TEOREMA FOND. della Teoria delle curve differenziabili in $\mathbb{R}^3$

Date $k: I \to \mathbb{R}^+$ e $\tau: I \to \mathbb{R}$ di classe C^k, $k \geq 1$

$\Rightarrow \exists!$ (a meno di movimenti rigidi) curva PLA $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ di classe C^{k+1}, REGOLARE, BIREGOLARE, con funzione curvatura $k(s)$ e funzione torsione $\tau(s)$.

Per la dim. avremo bisogno di

TEOREMA DI CAUCHY-LIPSCHITZ:

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ int. aperto, $t_0 \in I$, $u_0 \in \mathbb{R}^n$

$f: I \to \mathbb{R}^n$ e $A: I \to M_n(\mathbb{R})$

entrambe di classe C^k

Allora $\exists!$ soluzione $u: I \to \mathbb{R}^3$ di classe C^{k+1} del problema di Cauchy:

$$\boxed{\begin{cases} u' = A \cdot u + f \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}}$$

Dim. Teor. Fond.

Idea: applicare CL a ⊛

Supp. $k(s)$ e $\tau(s)$ assegnate. Cerchiamo $T(s)$, $n(s)$ e $b(s)$ che verifichino ⊛.

Se riscrivo ⊛ in coordinate, ottengo 9 equazioni;

Se $T(s) = \begin{pmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \\ T_3(s) \end{pmatrix}$, $n(s) = \begin{pmatrix} n_1(s) \\ n_2(s) \\ n_3(s) \end{pmatrix}$, $b(s) = \begin{pmatrix} b_1(s) \\ b_2(s) \\ b_3(s) \end{pmatrix}$

$$T'(s) = k(s)\, n(s) \iff \begin{cases} T_1'(s) = k(s)\, n_1(s) \\ T_2'(s) = k(s)\, n_2(s) \\ T_3'(s) = k(s)\, n_3(s) \end{cases}$$

$$n'(s) = -k(s)\, T(s) - \tau(s)\, b(s)$$

$$\iff \begin{array}{l} n_1'(s) = -k(s)\, T_1(s) - \tau(s)\, b_1(s) \\ n_2'(s) = -k(s)\, T_2(s) - \tau(s)\, b_2(s) \\ n_3'(s) = -k(s)\, n_3(s) - \tau(s)\, b_3(s) \end{array}$$

$$b'(s) = \tau(s)\, n(s) \iff \begin{array}{l} b_1'(s) = \tau(s)\, n_1(s) \\ b_2'(s) = \tau(s)\, n_2(s) \\ b_3'(s) = \tau(s)\, n_3(s) \end{array}$$

$$\textcircled{*} \iff \begin{pmatrix} T_1'(s) \\ T_2'(s) \\ T_3'(s) \\ n_1'(s) \\ n_2'(s) \\ n_3'(s) \\ b_1'(s) \\ b_2'(s) \\ b_3'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k(s) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k(s) & 0 & 0 & 0 \\ -k(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau(s) & 0 & 0 \\ 0 & -k(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau(s) & 0 \\ 0 & 0 & -k(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau(s) \\ 0 & 0 & 0 & \tau(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau(s) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau(s) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \\ T_3(s) \\ n_1(s) \\ n_2(s) \\ n_3(s) \\ b_1(s) \\ b_2(s) \\ b_3(s) \end{pmatrix}$$

$$u'(s) = A(s) \cdot u(s)$$

La nostra soluzione $u : I \to \mathbb{R}^9$

$u(s) = (T_1(s), T_2(s), T_3(s), n_1(s), \dots, b_1(s), b_2(s), b_3(s))$

Es. scrivere la matrice $A(s)$ (9×9).

Per usare CL abbiamo bisogno di un dato iniziale; fissiamo un $s_0 \in I$ e una base ortonormale $\{T_0, n_0, b_0\}$ con stessa orientazione di ξ

CL: date $k(s)$ e $\tau(s)$ di classe C^k determinano una matrice 9×9 $A(s)$ di classe C^k

il sistema
$$\begin{cases} T'(s) = k(s)\, n(s) \\ n'(s) = -k(s)\, T(s) - \tau(s)\, b(s) \\ b'(s) = \tau(s)\, n(s) \\ T(s_0) = T_0 \\ n(s_0) = n_0 \\ b(s_0) = b_0 \end{cases}$$

ha 1! soluzione $(T(s), n(s), b(s))$

Vogliamo verificare che $\{T(s), n(s), b(s)\}$ è base ortonormale $\forall s \in I$.

Abbiamo bisogno di determinare

$$T(s)\cdot T(s),\quad T(s)\cdot n(s),\quad T(s)\cdot b(s),\quad n(s)\cdot n(s),\quad n(s)\cdot b(s),\quad b(s)\cdot b(s)$$

6 funzioni $: I \longrightarrow \mathbb{R}$

Per fare ciò, cons. le 6 derivate :

$$(**)\quad \begin{cases} (T\cdot T)' = 2\,T'\cdot T \overset{(FS)}{=} 2k\,(T\cdot n) \\ (T\cdot n)' = T'\cdot n + T\cdot n' = -k\,(T\cdot T) - \tau(T\cdot b) + k\,(n\cdot n) \\ (T\cdot b)' = T'\cdot b + T\cdot b' = \tau\,(T\cdot n) + k\,(n\cdot b) \\ (n\cdot n)' = 2\,n'\cdot n = -2k\,(T\cdot n) - 2\tau\,(n\cdot b) \\ (n\cdot b)' = n'\cdot b + n\cdot b' = -k\,(T\cdot b) + \tau\,(n\cdot n) - \tau\,(b\cdot b) \\ (b\cdot b)' = 2\,b'\cdot b = 2\tau\,(n\cdot b) \end{cases}$$

Sono 6 ODE ; sapendo che

$$(𝄞)\quad \begin{cases} (T\cdot T)(s_0) = T(s_0)\cdot T(s_0) = T_0\cdot T_0 = 1 \\ = (n\cdot n)(s_0) = (b\cdot b)(s_0) \\ (T\cdot n)(s_0) = (n\cdot b)(s_0) = (T\cdot b)(s_0) = 0 \end{cases}$$

Nuovamente per il T. di Cauchy-Lipschitz : $\exists!$ 6-ple che verifica (**) con (𝄞).

Cons. le 6-ple $T(s)\cdot T(s) = n(s)\cdot n(s) = b(s)\cdot b(s) = 1$

$T(s)\cdot n(s) = n(s)\cdot b(s) = T(s)\cdot b(s) = 0$

di funzioni costanti

Si può verificare facilmente che le 6 funzioni verificano (**) e anche (β) $\Rightarrow$ per unicità, le funzioni trovate sono eff. una base ortonormale $\forall s \in I$

Infine $\Rightarrow$ $\alpha(s) := \int_{s_0}^{s} T(x)\,dx$ di classe $\mathcal{C}^{k+2}$

Si verifica facilmente che α è PLA, regolare biregolare, e $k_\alpha(s) = k(s)$ e $\tau_\alpha(s) = \tau(s)$.

Infine: dimostrazione dell'unicità a meno di movimenti rigidi:

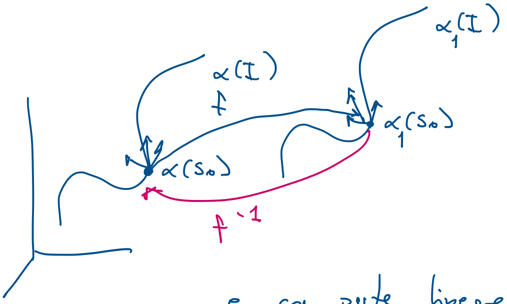
Supp. $\alpha_1 : I \to \mathbb{R}^3$ PLA

con curvatura $k(s)$ e torsione $\tau(s)$

Cons. $s_0 \in I$ di prima

e l'affinità $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

t.c. $f(\alpha(s_0)) = \alpha_1(s_0)$



e con parte lineare $\ell : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

t.c. $\ell(T_0) = T_1$

$\ell(n_0) = n_1$

$\ell(b_0) = b_1$

con $\{T_1, n_1, b_1\}$ triedro di Frenet di α_1 in

$\alpha_1(s_0)$

Oss. che f manda base ort. in base ort. $\Longrightarrow$ f è isometria lineare

e siccome $\{T_0, n_0, b_0\}$ e $\{T_1, n_1, b_1\}$ hanno stessa orientazione, cioè quella di $\mathcal{E}$

$\Rightarrow$ f è isom. diretta, cioè $\det f = 1$.

Infine: $\beta(s) := f^{-1}(\alpha_1(s))$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\alpha_1"] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f^{-1}"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

è PLA ; stesse k e τ di α

triedro di Frenet

$T_\beta(s_0) = T_0$, $n_\beta(s_0) = n_0$, $b_\beta(s_0) = b_0$

inoltre $\{T_\beta, n_\beta, b_\beta\}$ verifica $\boxed{FS}$ $\circledast$

$\Longrightarrow$ per unicità della soluzione $\alpha(s) = \beta(s)$ $\forall s \in I$