Lezione 12 marzo 2026

giovedì 12 marzo 2026 09:15

Lubiana: 1 pullmino guidato da sig. Marco Tedesco 8 studenti

1 macchina 3 studenti

1 macchina 3 studenti GO

1 macchina 3 studenti

7:50 ritrovo

Partenze: 8:00 via Weiss 2, palazzina Q

10:00 Analisi 2b

Ultime oss. su curve.

FORMA CANONICA LOCALE PER CURVE BIREGOLARI

$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ bireg. PLA

supp. $(-\delta, \delta) \subseteq I$, cons. $s_0 = 0$ per semplicità

Cons. formula di Taylor per ogni componente di α in 0:

$$\alpha(s) = \alpha(0) + s\,\underbrace{\alpha'(0)}_{=T_0} + \frac{s^2}{2}\underbrace{\alpha''(0)}_{=k(0)n_0} + \frac{s^3}{6}\alpha'''(0) + R(s) \qquad ✿$$

$R(s)$ resto di Peano

$$\lim_{s \to 0} \frac{R(s)}{s^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha'''(0) = T''(0) = \big(k(s)\,n(s)\big)'\Big|_{s=0}$$

$$\alpha''(s) = k(s)\,n(s) \qquad\qquad n'(s) = -k(s)T(s) - \tau(s)\,b(s) \quad 2^{e}\ \text{(FS)}$$

$$= k'(0)\,n_0 + k(0)\,n'(0)$$

$$= k'(0)\,n_0 + k(0)\big(-k(0)\,T_0 - \tau(0)\,b_0\big)$$

$$= -k(0)^2\,T_0 + k'(0)\,n_0 - k(0)\,\tau(0)\,b_0 \qquad ⊛$$

Sostituendo ⊛ in ✿ e raccogliendo, trovo

$$\alpha(s) - \alpha(0) = \left(s - \frac{k(0)^2}{6}s^3\right)T_0 +$$

$$⊛ \qquad + \left(\frac{k(0)}{2}s^2 + \frac{k'(0)}{6}s^3\right)n_0 +$$

$$+ \left(\frac{-k(0)\,\tau(0)}{6}s^3\right)b_0 + \underbrace{R(s)}_{}$$

localmente in 0, posso trascurare $R(s)$

OSS Con una trasf. ort. speciale (isometria lineare diretta) $A \in SO(3)$

posso trasf. $\{T_0, n_0, b_0\} \longrightarrow \{e_1, e_2, e_3\}$

Questa non cambia curvatura né torsione

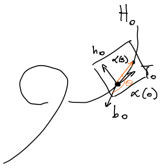
Se

$$\alpha(0) = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3,$$

localmente le componenti di α si possono quindi approssimare con:

$$\begin{cases} x(s) = p_1 + s - \frac{k(0)^2}{6} s^3 \\ y(s) = p_2 + \frac{k(0)}{2} s^2 + \frac{k'(0)}{6} s^3 \\ z(s) = p_3 - \frac{k(0)\tau(0)}{6} s^3 \end{cases}$$

INTREPR. GEO. di $\tau(0)$



per capire la posizione locale di $\alpha(s)$ rispetto al piano osc. affine H_0, cons.

$$\underbrace{(\alpha(s) - \alpha(0)) \cdot b_0} = \underbrace{\|\alpha(s) - \alpha(0)\|}_{>0} \cdot \underbrace{\|b_0\|}_{1} \cdot \cos\theta$$

$\Rightarrow$ il segno di $\;=$ segno di $\cos\theta$

da ⊛ e siccome $\{T_0, n_0, b_0\}$ è ortonormale, trovo

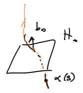
$$= -\frac{\overbrace{k(0)\tau(0)}^{>0}}{6}\,\overbrace{s^3}^{s\in(-\delta,\delta)} + \underbrace{R(s)\cdot b_0}_{\text{lo trascuro}}$$

$\Rightarrow$ segno di $\cos\theta$ è $=$ segno

$\Rightarrow$

se $\tau(0) < 0 \Longrightarrow$ $s<0$, $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ $\quad$ $s<0 \quad 0<\theta\leq\pi/2$

se $\tau(0) > 0$



$\Rightarrow$ $\alpha(s)$ si trova nel semispazio individuato da H_0 opposto risp. a b_0

$s>0 \quad \pi/2<\theta\leq\pi$

$s>0$, $0<\theta\leq\frac{\pi}{2}$

$\alpha(s)$ è nello stesso semispazio di b_0

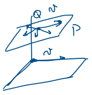
Posso anche analizzare il comp. locale risp. al piano rettificante: R_0

piano affine per $\alpha(0)$ e con giacitura

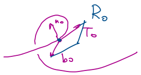
$$W_{R_0} = \text{Span}(b_0, T_0)$$

(ricordiamo se $H \subseteq \mathbb{R}^3$ è piano affine, $Q \in H$ $\exists\, W \subseteq \mathbb{R}^3$ SSV, di dim 2 t.c.

$$H = \{P \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{QP} \in W\}$$, W si chiama GIACITURA DI H)



$\overrightarrow{QP} = v$



$$(\alpha(s) - \alpha(0)) \cdot n_0 \underset{⊛}{=} \underbrace{\frac{k(0)}{2} s^2 + \frac{k'(0)}{6} s^3} + \underbrace{R(s)\cdot n_0}_{\text{trascuro}}$$

$= y(s)$

per capire il segno di $y(s)$

$$\frac{y(s)}{s^2} = \frac{k(0)}{2} + \frac{k'(0)}{6} s$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{y(s)}{s^2} = \frac{k(0)}{2} > 0$$

$\Rightarrow \frac{y(s)}{\underbrace{s^2}_{>0}} > 0$ in un intorno di 0

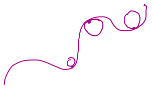
in un intorno di 0

$\Rightarrow y(s) > 0$ in un intorno di 0

$\Rightarrow$ localmente $\alpha(s)$ è contenuta nel semispazio indiv. dal R_0 e contenente n_0

* * *

CIRCOLO OSCULATORE



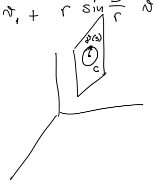
OSS.: Una circonferenza $\mathcal{C}$ in $\mathbb{R}^3$ di centro c e raggio r contenuta in un piano H, di giacitura W_H con.

$W_H = \text{Span}(v_1, v_2)$ e $\{v_1, v_2\}$ ortonormale

allora posso param. $\mathcal{C}$ così:

$$\gamma(s) - c = r \cos\frac{s}{r} v_1 + r \sin\frac{s}{r} v_2$$

$\downarrow$



Esercizio: $\gamma(s) = c + r\cos\frac{s}{r} v_1 + r \sin\frac{s}{r} v_2$ è PLA, $\gamma : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3$

Prop. $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $0 \in I$, $\alpha(s)$ PLA e biregolare

Allora $\exists!$ circonferenza $\gamma(s)$ che approssima α in $\alpha(0)$ al secondo ordine, cioè:

$$\begin{cases} \alpha(0) = \gamma(0) \\ \alpha'(0) = \gamma'(0) \\ \alpha''(0) = \gamma''(0) \end{cases}$$

Inoltre, tale circonf. è contenuta nel

piano osculatore.

Def.: Tale γ si dice CIRCOLO OSCULATORE

Il centro di γ si dice CENTRO DI CURVATURA

Il raggio di γ si dice RAGGIO DI CURVATURA

Dim.: $\gamma(s) = c + r\cos\frac{s}{r}\,v_1 + r\sin\frac{s}{r}\,v_2$

Impongo le 3 condizioni dell'enunciato:

① $\boxed{\gamma(0)} = \alpha(0) = c + r v_1 \Longrightarrow c = \alpha(0) - r v_1 = \alpha(0) - \frac{1}{k(0)}(-n_0) = \alpha(0) + \frac{1}{k(0)} n_0$

② $\gamma'(0) = \alpha'(0) = T_0 = v_2$

$\gamma'(s) = -\sin\frac{s}{r}\,v_1 + \cos\frac{s}{r}\,v_2$

$\gamma'(0) = v_2$

③ $\gamma''(0) = \alpha''(0) = \overbrace{k(0)}^{>0}\,n_0 = -\frac{1}{r}\,v_1 \Longrightarrow k(0) = \frac{1}{r}, \quad r = \frac{1}{k(0)}, \quad v_1 = -n_0$

$\gamma''(s) = -\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}\,v_1 - \frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}\,v_2$

$\gamma''(0) = -\frac{1}{r}\,v_1$

$\Rightarrow v_1 = -n_0, \quad v_2 = T_0 \Rightarrow$ giacitura di H è W_0 piano osc. vettoriale

$\Rightarrow$ il piano di $\gamma(s)$ è il piano osculatore

$$\Rightarrow \gamma(s) = \alpha(0) + \frac{n_0}{k(0)} + \underbrace{r}_{\frac{1}{k(0)}}\cos\underbrace{\frac{s}{r}}_{k(0)\cdot s}\,\overbrace{v_1}^{-n_0} + r\sin\frac{s}{r}\,\overbrace{v_2}^{T_0}$$

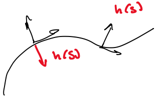
$$= \alpha(0) + \frac{n_0}{k(0)} - \frac{1}{k(0)}\cos(k(0)\cdot s)\,n_0 + \frac{1}{k(0)}\sin(k(0)\cdot s)\,T_0$$

CURVATURA CON SEGNO

PER CURVE PIANE

$\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ PLA

$T(s)$



definisco $N(s)$ versore t.c.

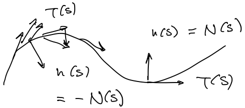
$\{T(s), N(s)\}$ stessa orient. di $\{e_1, e_2\}$

se $\alpha''(s) \neq 0$

$\alpha''(s) = k(s)\, n(s) = \tilde{k}(s)\, N(s)$

$N(s) = \pm\, n(s)$

↓ CURV. con segno

$|\tilde{k}(s)| = k(s)$