Geometria 2 2025/26
Foglio di esercizi 3

Prof. Valentina Beorchia

14 marzo 2026

1. Si determini un'equazione cartesiana del fascio di rette piane di centro il punto $P = (-4, 2+i) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$.

2. Sia $r \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ la retta passante per il punto $A = (1, -2, 0)$ e con vettore di direzione $v = e_1 + 3e_3$, dove $\{e_1, e_2, e_3\}$ denota la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

   Si determini l'equazione del fascio proprio di piani di sostegno r. Determinare inoltre il piano del fascio che passa per il punto $(1, 1, 1)$.

3. Si dimostri che i tre piani di di $\mathbb{A}^3$ di equazioni

$$\begin{aligned} \pi: \quad & x + y - z + 2 &= 0, \\ \pi': \quad & 2x + 3y + z - 1 &= 0. \\ \pi'': \quad & 4x + 5y - z + 3 &= 0 \end{aligned}$$

   appartengono a uno stesso fascio di piani e determinare l'equazione cartesiana e quella parametrica della retta r, sostegno di tale fascio.

4. Siano $r\ x + y - 2i = 0$ e $s\ 2x - iy + 1 = 0$ due rette del piano affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$. Si determini un'affinità f di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ tale che $f(r) = s$ e $f(s) = r$.

5. Sia $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}})$ definita nel modo seguente:

$$f(x, y) = (x + y, y + 1).$$

   Si dimostri che non esiste nessuna retta affine $r \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ tale che $f(r) = r$.

6. Si dimostri che se $\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{L} \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ sono tre rette affini del piano affine standard, tali che:

- $\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{L} \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ non appartengono a uno stesso fascio;
- sono a due a due incidenti,

e $\mathcal{R}', \mathcal{S}', \mathcal{L}' \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ sono altre tre rette non appartenenti a uno stesso fascio, e a due a due incidenti, allora esiste una affinità $f : \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ tale che

$$f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}', \quad f(\mathcal{S}) = \mathcal{S}', \quad f(\mathcal{L}) = \mathcal{L}'.$$

7. In uno spazio affine $\mathbb{A}$ di dimensione 3, si consideri una terna di piani $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ tali che
$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \{Q\},$$
cioè l'intersezione consiste di un solo punto.

   Si dimostri che per pgni altra terna di piani $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ tale che $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{H}_3 = \{R\}$, esiste un affinità
$$f : \mathbb{A} \to \mathbb{A},$$
tale che $f(\mathcal{P}_i) = \mathcal{H}_i$ per ogni $i = 1, 2, 3$.

8. In ciascuno dei seguenti casi si determinino le equazioni dell'unica affinità $f : \mathbb{A}^2_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{Q}}$ che soddisfa le condizioni assegnate:

   (a) $f(0,0) = (1,-1), \quad f(1,0) = (3,-1), \quad f(0,1) = (2,2);$

   (b) $f(2,1) = (1,2), \quad f(-1,-1) = (1,1), \quad f(0,1) = (2,-1);$

   (c) $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}', \quad f(\mathcal{S}) = (\mathcal{S}') \quad f(\mathcal{L}) = \mathcal{L}'$, dove

$$\mathcal{R} : \ x = 1, \quad \mathcal{S} : \ y = x, \quad \mathcal{L} : \ y = -2;$$

$$\mathcal{R}' : \ 2x - y = 0, \quad \mathcal{S}' : \ x + y = 0, \quad \mathcal{L}' : \ 2x + y = 1.$$