

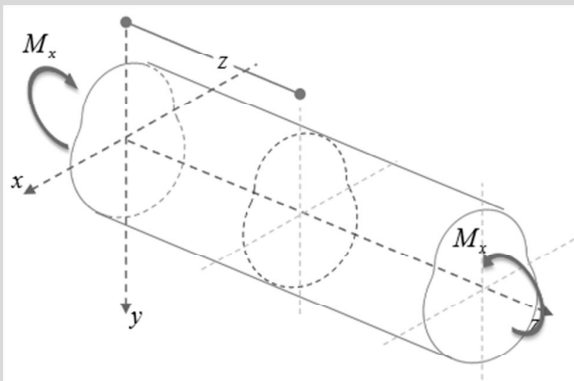
5

ELEMENTI INFLESSI – PARTE 1

A. A. 2025-2026
Corso di **Tecnica delle costruzioni**

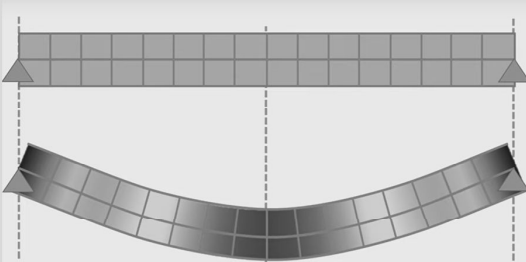
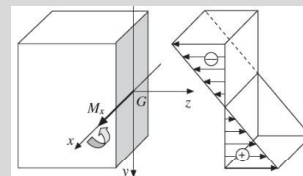
Elementi inflessi – Parte 1

FLESSIONE RETTA: richiamo alla teoria di de Saint Venant e formula di Navier



FORMULA DI NAVIER
$$\sigma_y = \frac{M_x}{I_x} y$$

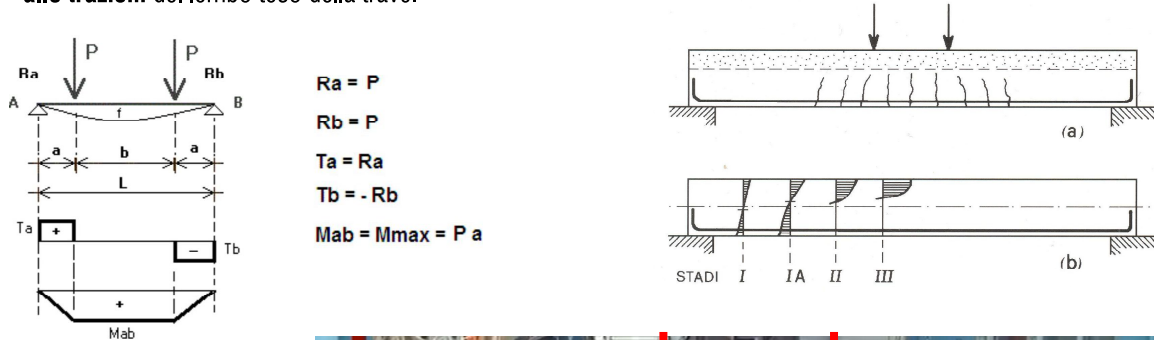
Le tensioni provocate dal momento M_x sono direttamente proporzionali alla distanza dall'asse neutro y e inversamente proporzionali al momento d'inerzia della sezione I_x



STADI DI COMPORTAMENTO DELLA SEZIONE INFLESSA

In una trave inflessa le sezioni reagiscono al momento flettente prodotto dai carichi con una distribuzione di tensioni normali, parte di trazione e parte di compressione.

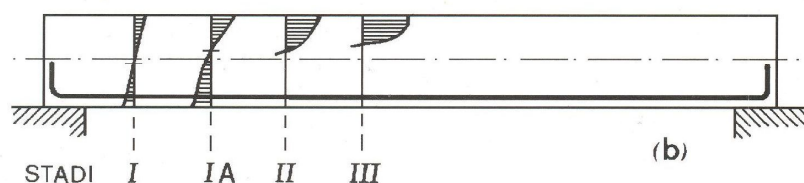
Data la ridotta resistenza a trazione del calcestruzzo la sezione della trave si fessura (e, quindi, si **parzializza**) già per livelli di carico molto modesti. Dopo la fessurazione interviene **solo l'acciaio di armatura per resistere alle trazioni** del lembo teso della trave.



Il comportamento delle sezioni inflesse in c.a. si articola in **3 STADI**:

- **Stadio I:** livelli bassi di sollecitazione con comportamento elastico lineare dei materiali – sezione interamente reagente (lo stadio I_A rappresenta la situazione limite prima della fessurazione)
- **Stadio II:** sezione fessurata con trazioni affidate interamente all'acciaio – comportamento dei materiali reagenti (calcestruzzo solo a compressione) ancora elastico lineare
- **Stadio III:** sezione fessurata con trazioni affidate interamente all'acciaio – comportamento dei materiali non lineare – (*armature metalliche snervate e/o calcestruzzo sul ramo plastico*)

Gli stadi I e II sono contemplati per le **verifiche di esercizio (SLE)**, lo stadio III per le **verifiche di allo stato limite ultimo (SLU)**.

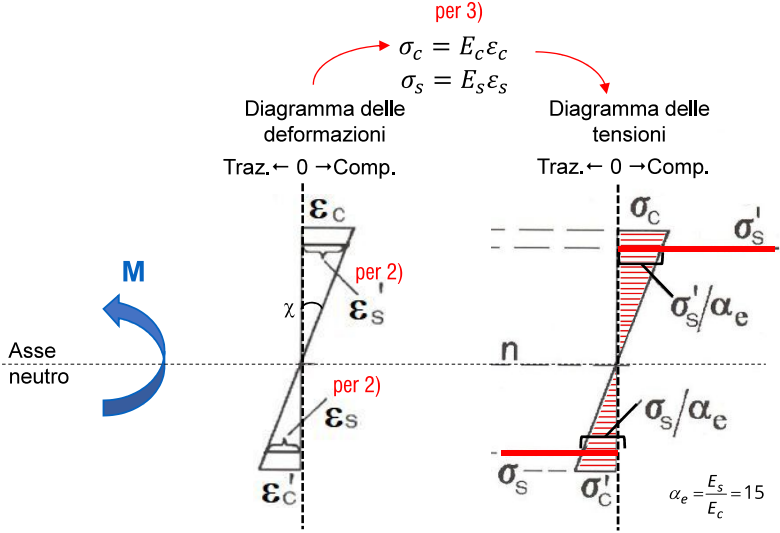
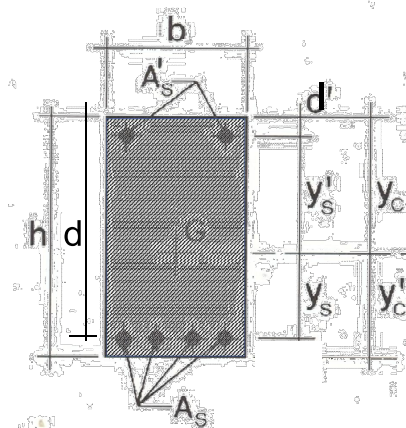
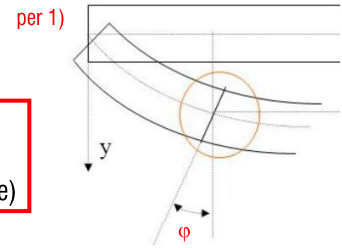


OBIETTIVO: correlare le deformazioni/tensioni interne (nel calcestruzzo e nelle barre d'armatura) all'entità di sollecitazioni esterne (momento flettente) cui è soggetta la trave. Queste correlazioni saranno diverse per i vari stadi.

STADIO I

Caso di sezione **interamente reagente**, ovvero: $\sigma_{c,t} \leq f_{ctd}$

- IPOSTESI:** 1) Conservazione delle sezioni piane (Ipotesi di Bernoulli)
 2) Perfetta aderenza acciaio-clt (congruenza)
 3) Materiali in campo elastico (clt elastico lineare, acciaio elastico lineare)



Per il I stadio vale quanto dedotto per la trave di de Saint Venant (basta omogenizzare le aree di armatura con il coefficiente di omogenizzazione α_e).

Tensioni nel calcestruzzo	Tensioni nelle barre d'armatura
$\sigma_c = -\frac{M}{I_i} y_c$ $\sigma'_c = \frac{M}{I_i} y'_c$	$\sigma_s = \alpha_e \frac{M}{I_i} y_s$ $\sigma'_s = -\alpha_e \frac{M}{I_i} y'_s$

I_i è il momento d'inerzia della sezione ideale omogenizzata
 Le lunghezze y esprimono la distanza delle fibre dal baricentro G della sezione ideale

Per $\sigma'_c = f_{ctd}$ (ovvero le tensioni nel calcestruzzo al lembo teso raggiungono la resistenza a trazione del materiale) si ha il limite di formazione delle fessure \rightarrow

$$M_{cr} = \frac{f_{ctd} I_i}{y'_c} \quad (\text{momento di cracking})$$

Calcolo del **baricentro G** della sezione ideale (rispetto ~~al lembo superiore~~)

$$y_c = \frac{S'_{id}}{A_{id}}$$

$$y'_c = h - y_c \quad y_s = d - y_c \quad y'_s = y_c - d'$$

A_{id} area ideale della sezione per lo stadio I:

$$A_{id} = b \cdot h + \alpha_e A_s + \alpha_e A'_s$$

S'_{id} momento statico della sezione ideale (calcolato rispetto ~~al lembo superiore~~)

$$S'_{id} = b \cdot h \cdot \frac{h}{2} + \alpha_e A_s d + \alpha_e A'_s d'$$

S del rettangolo di cls $b \cdot h$ rispetto al lembo superiore (area x distanza dal baricentro del solo cls)

S armatura inferiore (omogenizzata)

S armatura superiore (omogenizzata)

Devono essere COERENTI!

N.B. Nel caso di flessione semplice l'asse neutro passa per il baricentro della sezione (ideale)

Calcolo del **momento d'inerzia della sezione ideale** (rispetto al baricentro G)

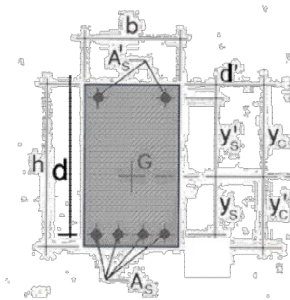
$$J_{id,G} = \left[\frac{bh^3}{12} + b \cdot h \cdot \left(y_c - \frac{h}{2} \right)^2 \right] + \alpha_e A_s y_s^2 + \alpha_e A'_s y_{s'}^2$$

J del rettangolo di cls $b \cdot h$ rispetto al baricentro del solo cls ($h/2$)

J del rettangolo di cls $b \cdot h$ rispetto al baricentro G della sezione ideale (formula del trasporto)

J armatura inferiore (omogenizzata)

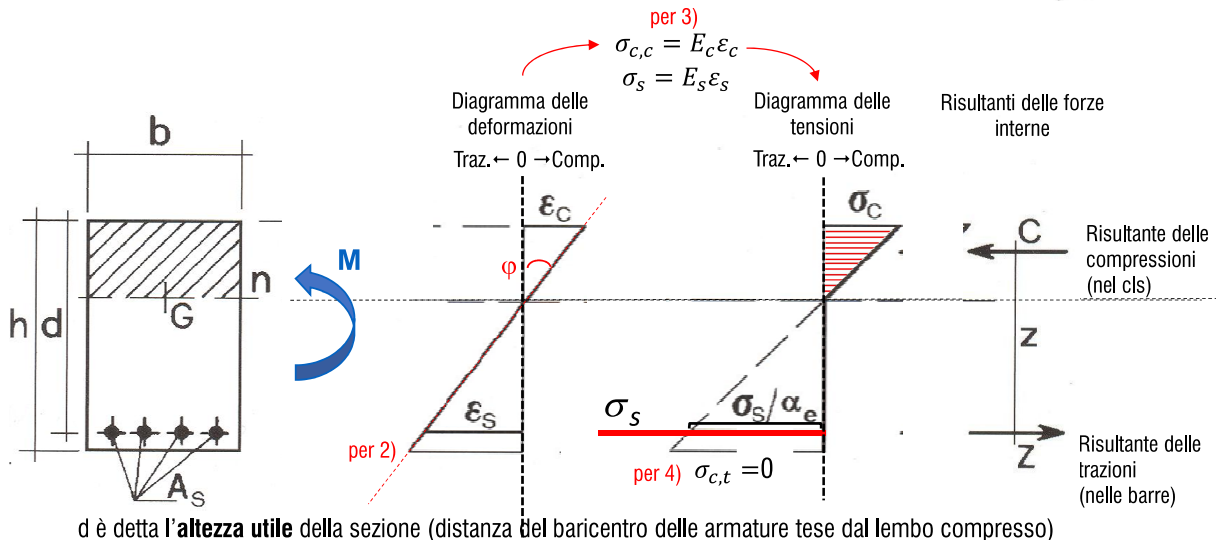
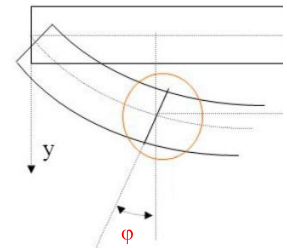
J armatura superiore (omogenizzata)



STADIO II – semplice armatura*

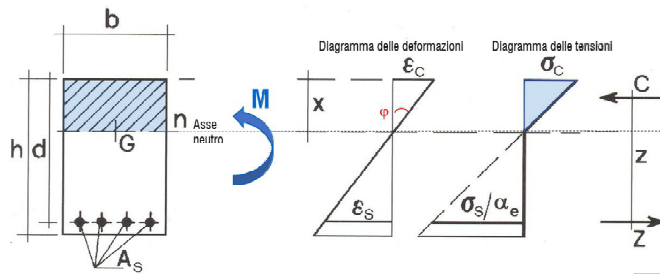
Caso di sezione **parzializzata** (calcestruzzo fessurato a trazione)

- IPOTESI:**
- 1) Conservazione delle sezioni piane (Ipotesi di Bernoulli)
 - 2) Perfetta aderenza acciaio-cls (congruenza)
 - 3) Calcestruzzo elastico lineare a compressione, acciaio elastico lineare
 - 4) Calcestruzzo fessurato a trazione



d è detta l'**altezza utile** della sezione (distanza del baricentro delle armature tese dal lembo compresso)





Equilibrio alla traslazione orizzontale tra forze interne ed esterne:

$$C - Z = 0 \quad \text{cioè}$$

$$\frac{1}{2} \sigma_c b x - \sigma_s A_s = 0$$

Per l'ipotesi di congruenza (2) vale:

$$\frac{\sigma_s / \alpha_e}{d - x} = \frac{\sigma_c}{x}$$

Per (3) vale:

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s$$

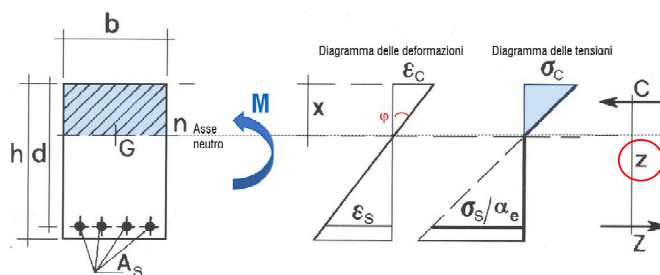
Risolviendo il sistema per trovare x, trovo un'equazione di secondo grado

$$x^2 + \frac{2\alpha_e A_s}{b} x - \frac{2\alpha_e A_s}{b} d = 0$$

che avrà un'unica soluzione positiva:

Posizione dell'asse neutro (rispetto al lembo compresso)

$$x = \frac{\alpha_e A_s}{b} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \frac{2bd}{\alpha_e A_s}} \right\}$$



Equilibrio alla rotazione rispetto a Z tra forze interne ed esterne:

$$C \cdot z = M \quad \text{cioè}$$

$$\frac{1}{2} \sigma_c b x \cdot \left(d - \frac{x}{3} \right) = M$$

Per l'ipotesi di congruenza (2) vale:

$$\frac{\sigma_s / \alpha_e}{d - x} = \frac{\sigma_c}{x}$$

$$\alpha_e = E_s / E_c$$

Si possono quindi ricavare i valori di tensione nei due materiali

Tensione di compressione nel calcestruzzo

$$\sigma_c = \frac{2M}{bxz}$$

Tensione di trazione nelle barre d'armatura

$$\sigma_s = \frac{M}{A_s z}$$



Quindi, noto lo stato di sollecitazione (M), si possono ricavare i valori di tensione e verificare se rispettano i limiti normativi (**VERIFICHE ALLO STATO LIMITE DI ESERCIZIO**)

Tensione di compressione
nel calcestruzzo

$$\sigma_c = \frac{2M}{bxz} \leq 0.45 - 0.6 f_{ck}$$

Tensione di trazione nelle
barre d'armatura

$$\sigma_s = \frac{M}{A_s z} \leq 0.8 f_{yk}$$

Con

$$x = \frac{\alpha_e A_s}{b} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \frac{2bd}{\alpha_e A_s}} \right\}$$

4.1.2.2.5	Stato limite di limitazione delle tensioni	NTC'18
Valutate le azioni interne nelle varie parti della struttura, dovute alle combinazioni caratteristica e quasi permanente delle azioni, si calcolano le massime tensioni sia nel calcestruzzo sia nelle armature; si deve verificare che tali tensioni siano inferiori ai massimi valori consentiti di seguito riportati.		
4.1.2.2.5.1 <i>Tensione massima di compressione del calcestruzzo nelle condizioni di esercizio</i>		
La massima tensione di compressione del calcestruzzo $\sigma_{c,max}$, deve rispettare la limitazione seguente:		
$\sigma_{c,max} \leq 0,60 f_{ck}$ per combinazione caratteristica		[4.1.15]
$\sigma_{c,max} \leq 0,45 f_{ck}$ per combinazione quasi permanente.		[4.1.16]
Nel caso di elementi piani (solette, pareti, ...) gettati in opera con calcestruzzi ordinari e con spessori di calcestruzzo minori di 50 mm i valori limite sopra prescritti vanno ridotti del 20%.		
4.1.2.2.5.2 <i>Tensione massima dell'acciaio in condizioni di esercizio</i>		
La tensione massima, $\sigma_{s,max}$, per effetto delle azioni dovute alla combinazione caratteristica deve rispettare la limitazione seguente:		
$\sigma_{s,max} \leq 0,8 f_{yk}$		[4.1.17]



Oltre che per le verifiche SLE, le correlazioni possono essere utilizzate anche per il predimensionamento delle armature e della sezione di calcestruzzo (**FORMULE DI SEMI-PROGETTO**), noto il momento sollecitante.

Una stima di z è **circa $0.9d$** per cui, fissando la tensione nell'acciaio pari al valore limite di norma ($0.8f_{yk}$) e sostituendolo nell'equazione

$$\sigma_s = \frac{M}{A_s z} \rightarrow A_s = \frac{M}{0.8 f_y 0.9d}$$

Se $z \sim 0.9d$ allora $z = d - \frac{x}{3} \rightarrow x = 3(d - 0.9d) = 0.3d$

Fissando invece la tensione nel calcestruzzo pari al valore limite di norma ($0.45f_{ck}$) e sostituendolo nell'equazione

$$\sigma_c = \frac{2M}{bxz} \rightarrow b = \frac{2M}{0.45 f_{ck} 0.3d 0.9d}$$

$$\rightarrow d = \sqrt{\frac{2M}{0.45 f_{ck} 0.3 \cdot 0.9b}}$$

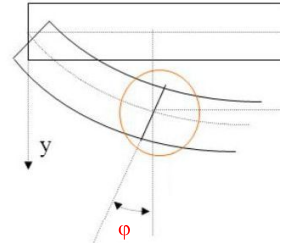
N.B. Solo una delle due – semiprogetto
(fisso $d \rightarrow$ trovo b , oppure fisso $b \rightarrow$ trovo d)



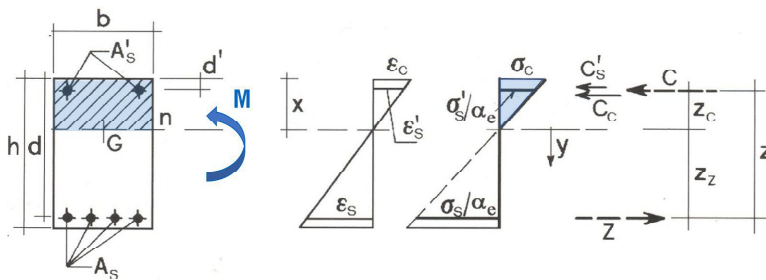
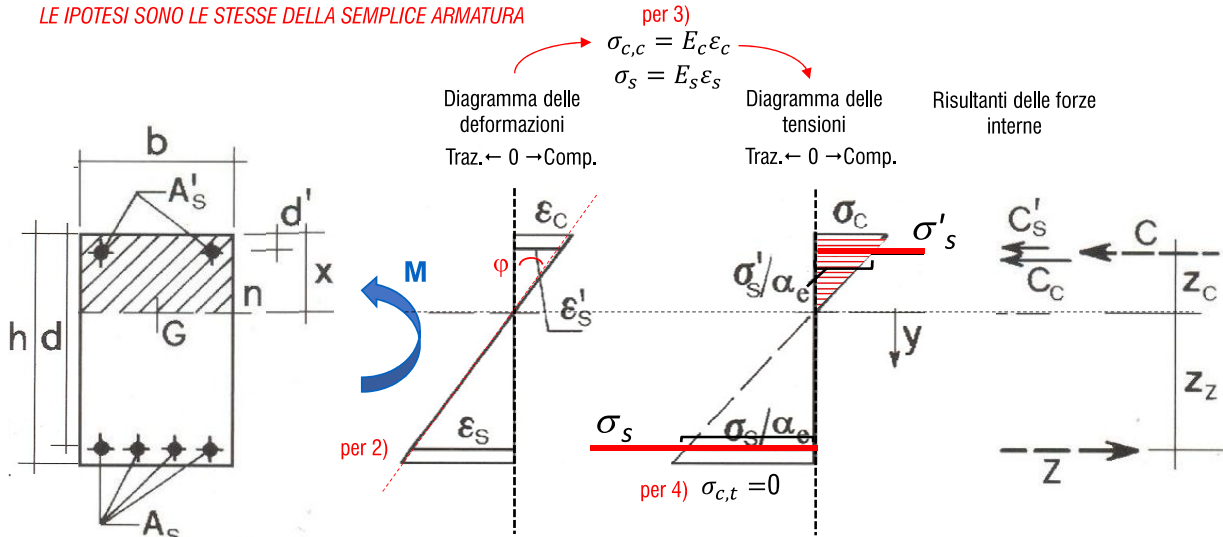
STADIO II – doppia armatura*

Caso di sezione **parzializzata** (calcestruzzo fessurato a trazione)

- IPOSTESI:** 1) Conservazione delle sezioni piane (ipotesi di Bernoulli)
 2) Perfetta aderenza acciaio-clc (congruenza)
 3) Calcestruzzo elastico lineare a compressione, acciaio elastico lineare
 4) Calcestruzzo fessurato a trazione



LE IPOSTESI SONO LE STESSA DELLA SEMPLICE ARMATURA



Equilibrio alla traslazione orizzontale tra forze interne ed esterne:

$$C_c + C'_s - Z = 0 \quad \text{cioè}$$

$$\frac{1}{2} \sigma_c b x + \sigma'_s A'_s - \sigma_s A_s = 0$$

Per l'ipotesi di congruenza (2) vale:

$$\frac{\sigma_s / \alpha_e}{d - x} = \frac{\sigma_c}{x} = \frac{\sigma'_s / \alpha_e}{x - d'}$$

Per (3) vale:

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s \quad \sigma'_s = E_s \varepsilon'_s$$

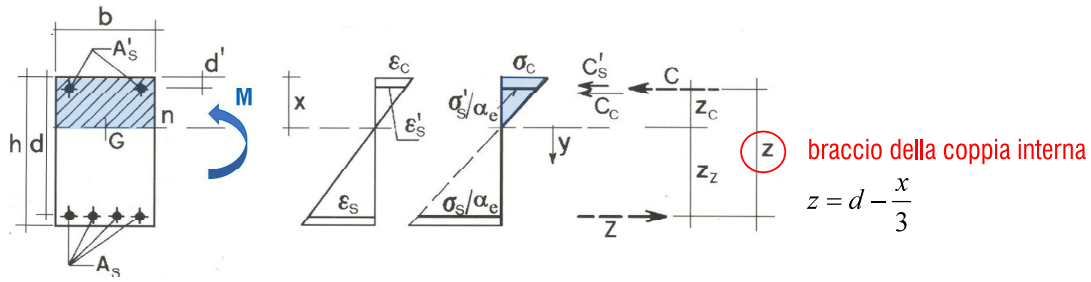
Risolvendo il sistema per trovare x, trovo un'equazione di secondo grado

$$x^2 + \frac{2\alpha_e (A_s + A'_s)}{b} x - \frac{2\alpha_e (A_s + A'_s)}{b} d = 0$$

che avrà un'unica soluzione positiva:

Posizione dell'asse neutro (rispetto al lembo compresso)

$$x = \frac{\alpha_e (A_s + A'_s)}{b} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \frac{2b(A_s d + A'_s d')}{\alpha_e (A_s + A'_s)^2}} \right\}$$



Equilibrio alla rotazione rispetto a Z tra forze interne ed esterne:

$$C \cdot z = M$$

Per l'ipotesi di congruenza (2) vale:

$$\frac{\sigma_s / \alpha_e}{d - x} = \frac{\sigma_c}{x} = \frac{\sigma'_s / \alpha_e}{x - d'}$$

Per (3) vale:

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s \quad \sigma'_s = E_s \varepsilon'_s$$

Si possono quindi ricavare i valori di tensione nei due materiali

Tensione di comp. nel calcestruzzo

$$\sigma_c = \frac{M}{I_i} x$$

Tensione di traz. nelle barre d'armatura

$$\sigma_s = \alpha_e \frac{M}{I_i} (d - x)$$

Tensione di comp. nelle barre d'armatura

$$\sigma'_s = \alpha_e \frac{M}{I_i} (x - d')$$

con $I_i = \frac{bx^3}{3} + \alpha_e A_s (d - x)^2 + \alpha_e A'_s (x - d')^2$

momento d'inerzia della sezione parzializzata omogenizzata

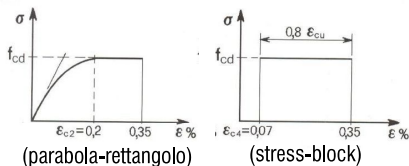
STADIO III – semplice armatura

Per la resistenza allo **STATO LIMITE ULTIMO**

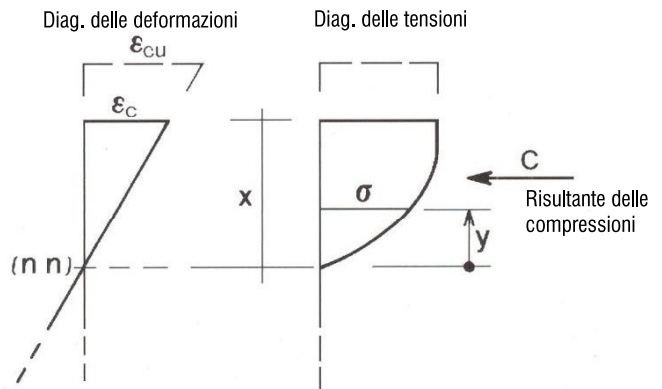
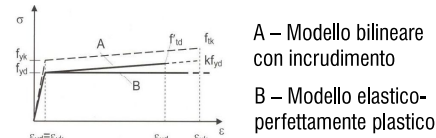
- IPOSTESI:**
- 1) Conservazione delle sezioni piane (Ipotesi di Bernoulli)
 - 2) Perfetta aderenza acciaio-cla (congruenza)
 - 3) Cla con legame parabolico rettangolare a compressione, acciaio elasto-plastico
 - 4) Calcestruzzo fessurato a trazione

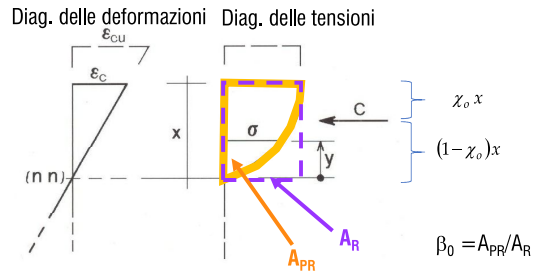
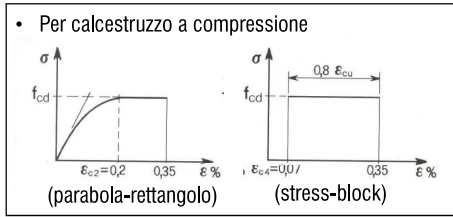
RICHIAMO AI MODELLI COSTITUTIVI SEMPLIFICATI
(v. lezione sui materiali)

• Per calcestruzzo a compressione

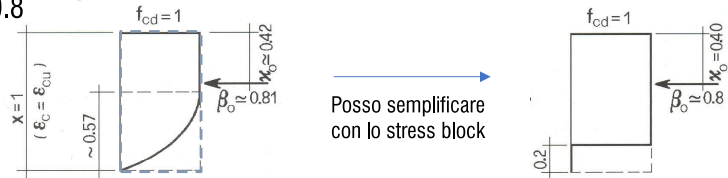


• Per l'acciaio d'armatura



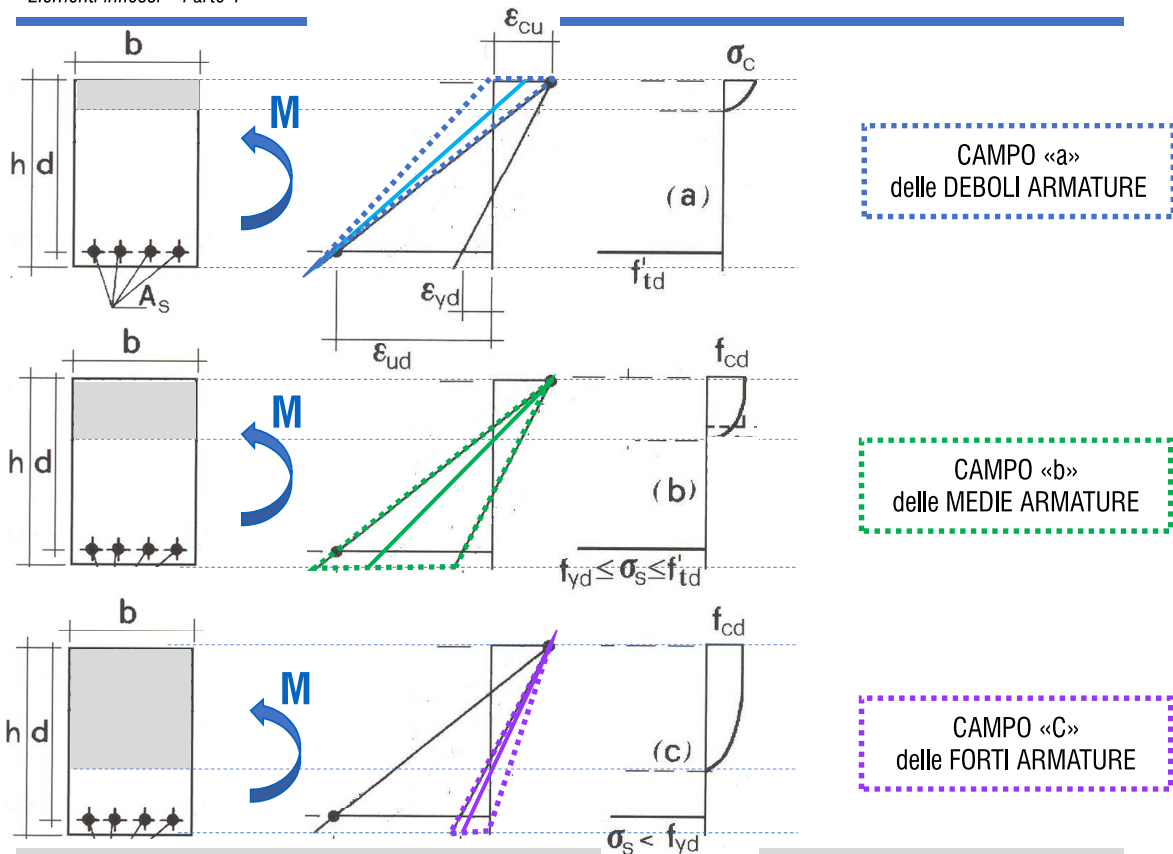


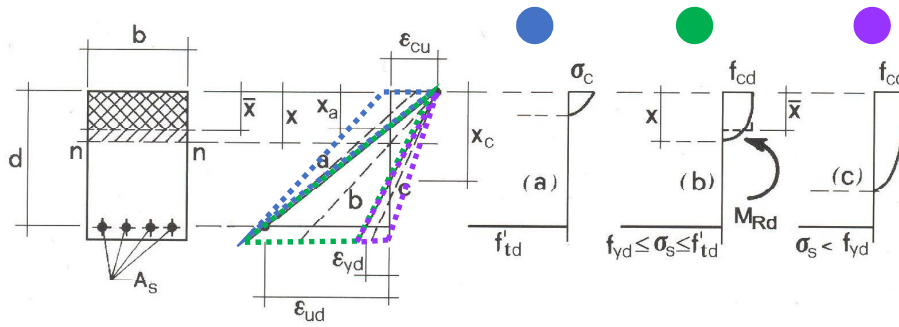
- Se il cls ha raggiunto la sua deformazione ultima al lembo compresso ($\epsilon_c = \epsilon_{cu}$), allora $\sigma_c = f_{cd}$, $\chi \sim 0.4$ e $\beta_0 \sim 0.8$



- Se il cls **NON** ha raggiunto la sua deformazione ultima al lembo compresso ($\epsilon_c < \epsilon_{cu}$), allora

$$\sigma_c < f_{cd} \quad \chi = 0.33 + 0.07 \bar{\epsilon}_c \quad \beta = (1.6 - 0.8 \bar{\epsilon}_c) \bar{\epsilon}_c \quad \bar{\epsilon}_c = \epsilon_c / \epsilon_{cu}$$





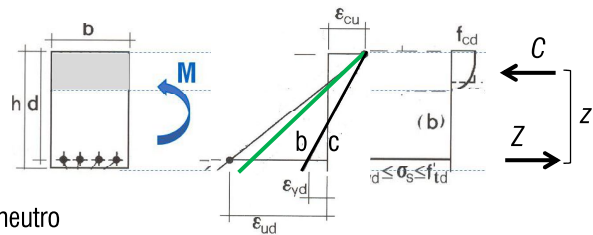
- *campo "a" delle deboli armature* caratterizzato dalla rottura dell'armatura metallica, con $\epsilon_s = \epsilon_{ud}$, mentre al bordo compresso del calcestruzzo la contrazione non raggiunge il limite ultimo ($\epsilon_c < \epsilon_{cu}$);
- *campo "b" delle medie armature* caratterizzato dalla rottura del calcestruzzo al bordo compresso ($\epsilon_c = \epsilon_{cu}$) con acciaio già snervato ($\epsilon_{ud} > \epsilon_s > \epsilon_{yd}$);
- *campo "c" delle forti armature* caratterizzato sempre dalla rottura del calcestruzzo per raggiungimento della contrazione ultima $\epsilon_c = \epsilon_{cu}$ con acciaio ancora in fase elastica ($\epsilon_s < \epsilon_{yd}$).

Con il modello elastico-perfettamente plastico indefinito per l'acciaio scompare il campo "a"

Nel campo "b" l'equilibrio alla traslazione si pone

$$C - Z = 0 \quad \text{cioè}$$

$$\beta_o f_{cd} b x - f_{yd} A_s = 0$$



Esplicitando rispetto a x, si trova la posizione dell'asse neutro

$$x = \frac{f_{yd} A_s}{\beta_o f_{cd} b} = \xi d \quad \xi = \frac{\omega_s}{\beta_o} \quad \text{Asse neutro adimensionalizzato} \quad \omega_s = \frac{f_{yd} A_s}{f_{cd} b d} \quad \text{Percentuale meccanica di armatura}$$

Dall'equilibrio alla rotazione rispetto a Z si ottiene il **momento resistente**

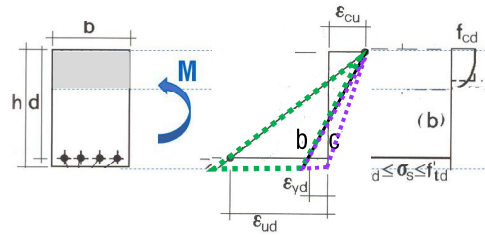
$$C \cdot z = M \quad \text{cioè}$$

$$M_{Rd} = \beta_o f_{cd} b x z = \beta_o f_{cd} b \xi d \zeta d \quad \zeta = 1 - \chi_o \xi \quad \text{Braccio della coppia interna adimensionalizzato}$$

Al confine tra campo «b» e «c» vale $\frac{\epsilon_{cu}}{x_c} = \frac{\epsilon_{yd} + \epsilon_{cu}}{d}$

ovvero $x_c = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{yd} + \epsilon_{cu}} d = \xi_c d \rightarrow \omega_{sc} = \beta_o \xi_c$ **Armatura limite** che separa i campi «b» e «c»

- campo "a" delle deboli armature caratterizzato dalla rottura dell'armatura metallica, con $\epsilon_s = \epsilon_{ud}$, mentre al bordo compresso del calcestruzzo la contrazione non raggiunge il limite ultimo ($\epsilon_c < \epsilon_{cu}$);
- campo "b" delle medie armature caratterizzato dalla rottura del calcestruzzo al bordo compresso ($\epsilon_c = \epsilon_{cu}$) con acciaio già snervato ($\epsilon_{ud} > \epsilon_s > \epsilon_{yd}$);
- campo "c" delle forti armature caratterizzato sempre dalla rottura del calcestruzzo per raggiungimento della contrazione ultima $\epsilon_c = \epsilon_{cu}$ con acciaio ancora in fase elastica ($\epsilon_s < \epsilon_{yd}$).



Al confine tra campo «b» e «c» vale $\frac{\epsilon_{cu}}{x_c} = \frac{\epsilon_{yd} + \epsilon_{cu}}{d}$

ovvero $x_c = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{yd} + \epsilon_{cu}} d = \xi_c d \longrightarrow \omega_{sc} = \beta_o \xi_c$ **Armatura limite** che separa i campi «b» e «c»

Note le caratteristiche della sezione, è possibile calcolare ω_s ed effettuare un **controllo sul modo di collasso** della sezione

$$\omega_s = \frac{f_{yd} A_s}{f_{cd} b d}$$

se $\omega_s > \omega_{sc}$ sono in campo c → collasso con **acciaio elastico**

se $\omega_s \leq \omega_{sc}$ sono in campo b → collasso con **acciaio snervato**

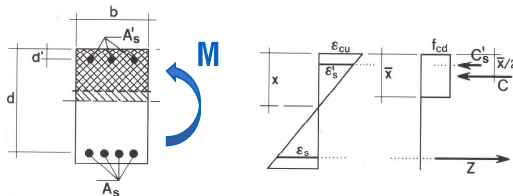
Bisogna progettare perseguendo un collasso in campo b, allo scopo di avere una rottura sufficientemente duttile



STADIO III – doppia armatura

Per la resistenza allo **STATO LIMITE ULTIMO**

- IPOSTESI:** 1) Conservazione delle sezioni piane (ipotesi di Bernoulli)
 2) Perfetta aderenza acciaio-cla (congruenza)
 3) Cla con legame parabolico rettangolare a compressione, acciaio elasto-plastico
 4) Calcestruzzo fessurato a trazione



Campo «b», considerando il modello semplificato "stress-block" per il cla.

Dall'equilibrio alla traslazione si trova la **posizione dell'asse neutro**:

$C + C' - Z = 0$ cioè

$f_{cd} b \bar{x} + f_{yd} A'_s - f_{yd} A_s = 0$

$$\bar{x} = \frac{f_{yd} (A_s - A'_s)}{f_{cd} b} \quad x = \frac{\bar{x}}{0.8}$$

Dall'equilibrio alla rotazione rispetto a C si ottiene il **momento resistente**:

$Z \cdot z + C' z' = M$ cioè

$$M_{Rd} = f_{yd} A_s \left(d - \frac{\bar{x}}{2} \right) + f_{yd} A'_s \left(\frac{\bar{x}}{2} - d' \right)$$

Va verificata la condizione di snervamento delle barre

$$\epsilon_s = \frac{d-x}{x} \epsilon_{cu} \geq \epsilon_{yd} \quad \epsilon'_s = \frac{x-d'}{x} \epsilon_{cu} \geq \epsilon_{yd}$$

Bibliografia

- Toniolo G., Di Prisco M., “Cemento Armato – Calcolo agli stati limite”, Vol. 2a, terza edizione, Ed. Zanichelli, 2010.
- Park R., Paulay T., “Reinforced Concrete Structures”, John Wiley & Sons, New York, 1975.
- Mac Gregor J., “Reinforced Concrete – Mechanics and Design”, Prentice Hall, New Jersey, 1988.
- Santarella L., “Prontuario del Cemento Armato”, XXXVIII edizione, Ed. Hoepli, Milano.

