

## LEZIONE 2.4 TRASFORMAZIONI DI GAS IDEALI

### 2.4.1 Trasformazioni adiabatiche quasi-statiche

Abbiamo visto  $\delta Q = \begin{cases} n c_v dT + p dV \\ n c_p dT - V dp \end{cases}$ ; nelle adiabatiche

$$\delta Q = 0 \rightarrow \begin{cases} n c_v dT = -p dV \\ n c_p dT = V dp \end{cases}$$

Da cui, dividendo membro a membro:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = -\frac{V dp}{p dV} \rightarrow \gamma \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p}$$

Integrando da  $(p_0, V_0)$  a  $(p, V)$  si ha:

$$\gamma \int_{V_0}^V \frac{dV}{V} = - \int_{p_0}^p \frac{dp}{p}$$

$$\gamma \ln \frac{V}{V_0} = - \ln \frac{p}{p_0}$$

$$\ln \left( \frac{V}{V_0} \right)^\gamma + \ln \frac{p}{p_0} = 0$$

$$\ln \frac{p V^\gamma}{p_0 V_0^\gamma} = 0 \rightarrow \frac{p V^\gamma}{p_0 V_0^\gamma} = 1 \rightarrow p V^\gamma = p_0 V_0^\gamma$$

$\Rightarrow$  Equazione di Poisson

$$p V^\gamma = \text{cost.}$$

$$T V^{\gamma-1} = \text{cost.}$$

oppure,  $p = \frac{nRT}{V}$

infine,  $V = \frac{nRT}{p}$

$$p \left( \frac{nRT}{p} \right)^\gamma = \text{cost.}$$

$$p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cost.}$$

$$T p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{cost.}$$

nota: queste costanti sono tutte diverse tra loro!

$\sqrt{\dots}$

Come già visto a pag. (21), se  $pV^\gamma = c = p_A V_A^\gamma = p_B V_B^\gamma$ :

$$\begin{aligned}
 L_{AB} &= \int_{V_A}^{V_B} p dV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{c}{V^\gamma} dV = \frac{c}{1-\gamma} \left( V_B^{1-\gamma} - V_A^{1-\gamma} \right) = \\
 &= \frac{1}{\gamma-1} \left( p_A V_A^\gamma V_A^{1-\gamma} - p_B V_B^\gamma V_B^{1-\gamma} \right) = \frac{1}{\gamma-1} (p_A V_A - p_B V_B) \\
 &= \frac{nR}{\frac{C_p}{C_v} - 1} (T_A - T_B) = \frac{nR}{\frac{C_p - C_v}{C_v} R} (T_A - T_B) = nC_v (T_A - T_B) \\
 &= U_A - U_B
 \end{aligned}$$

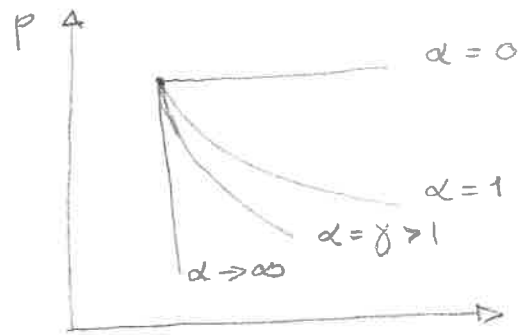
(risultato impostor su qualsiasi adiabatca dal I PTD:  
 $\Delta U = Q - L$   
 $L = -\Delta U$ )

### 2.4.2 Trasformazioni politropiche

Generalizzazione di diverse trasformazioni esprimibili come

$$pV^\alpha = \text{cost.}$$

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{isobare} \\ 1 & \text{isoterme} \\ \gamma & \text{adiabatiche} \\ \rightarrow \infty & \text{isocore} \end{cases}$$



Calcolo di  $C_\alpha$ , calore molare per la politropica  $pV^\alpha = \text{cost.}$  per un gas ideale:

$$C_\alpha = \frac{1}{n} \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_\alpha = \frac{1}{n} \left[ \frac{dU}{dT} + \left( p \frac{dV}{dT} \right)_\alpha \right] = C_v + \frac{1}{n} \left( p \frac{dV}{dT} \right)_\alpha \quad *$$

Differenzio  $pV^\alpha = \text{cost}$

$$d(pV^\alpha) = 0 = p^\alpha V^{\alpha-1} dV + V^\alpha dp = 0 \quad / V^{\alpha-1}$$

$$\alpha p dV + V dp = 0$$

Differenzio  $pV = nRT$

$$p dV + V dp = nR dT$$

\*  $\rightarrow$

→ da (\*) :

$$\alpha p dV - p dV + nR dT = 0$$

$$(1-\alpha) p dV = nR dT$$

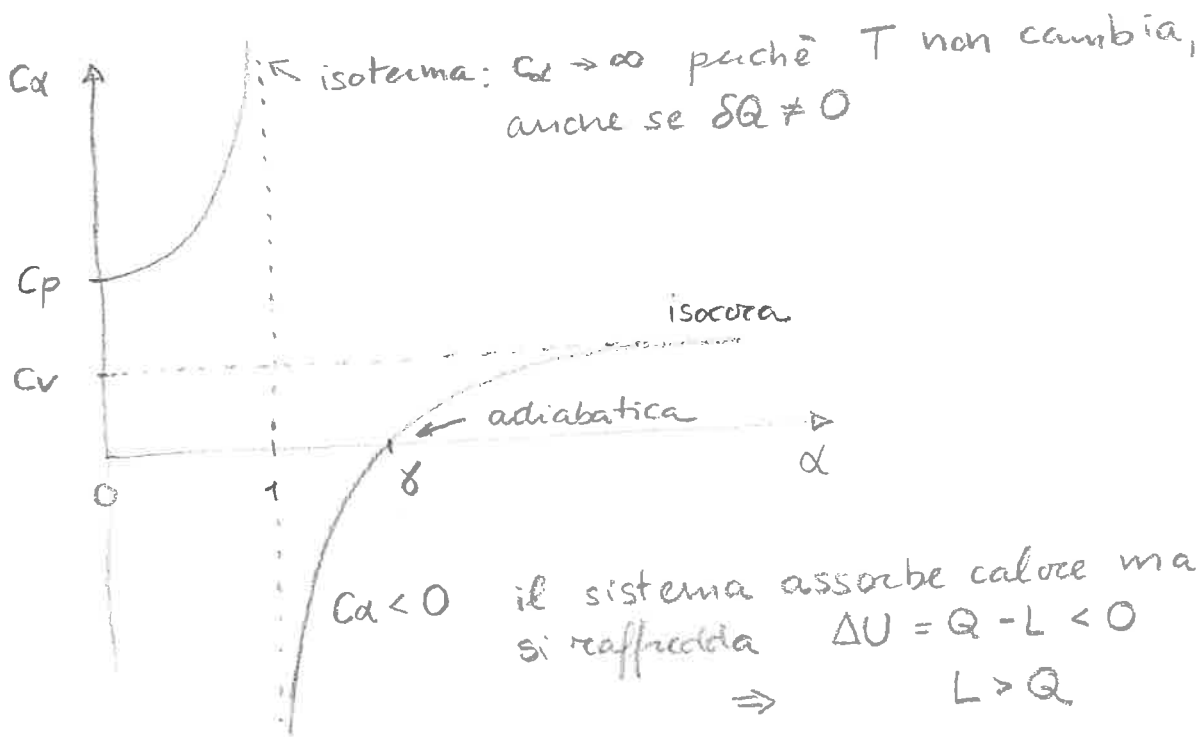
$$p \frac{dV}{dT} = \frac{nR}{1-\alpha} \quad \text{con } \alpha \neq 1$$

Ritornando in □ :

$$C_d = C_v + \frac{1}{n} \left( p \frac{dV}{dT} \right) \alpha = C_v + \frac{R}{1-\alpha} = \begin{cases} \alpha=0 & C_v + R = C_p \\ \alpha=1 & \text{diverge} \\ \alpha=\gamma & C_v + \frac{R}{1-\gamma} = ** \\ \alpha \rightarrow \infty & C_v \end{cases}$$

$$** \quad C_v + \frac{R}{1-\gamma} = C_v + \frac{R}{1 - \frac{C_p - C_v}{C_v}} = C_v + \frac{R}{\frac{C_v - C_p}{C_v}} = C_v + \frac{C_v R}{-R} = 0$$

che ci ricorda che nelle adiabatiche  $\delta Q = 0$



Questo può succedere se la trasformazione compie un  $L$  maggiore del  $Q$  che assorbe...

Esempi dall'astrofisica e da sistemi particolari.

Una stella può contrarsi sotto l'azione della gravità emettendo calore ma riscaldandosi ( $Q$  e  $L$  negativi,  $|L| > |Q|$  allora  $\Delta U = Q - L > 0$ ); il lavoro fatto sul sistema dalla gravità è maggiore (in modulo) del calore emesso.

### 2.4.3 Aspetti microscopici

Riprendiamo i risultati della teoria cinetica dei gas perfetti:  
(GAS MONOATOMICO)

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

$$U = N \langle K \rangle = \frac{3}{2} N k_B T = \frac{3}{2} n R T$$

A pag. 30 abbiamo inoltre trovato

$$dU = n c_v dT \quad \rightarrow \quad \int_{U_0}^U dU = n c_v \int_{T_0}^T dT \quad \rightarrow \quad U - U_0 = n c_v (T - T_0)$$

supponendo  $U_0 = 0$  J  
a  $T_0 = 0$  K

supponendo che  
 $c_v$  non dipenda  
da T

$$\rightarrow U = n c_v T \quad \rightarrow \quad c_v = \frac{3}{2} R$$

monoatomico  $\rightarrow$  puntiforme  $\rightarrow$  3 gradi di libertà  
(può traslare lungo x, y, z)

Teorema di equipartizione: sistema in equilibrio TD a T  
ogni termine quadratico indipendente della sua U ha valore  
medio  $\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} k_B T$ .

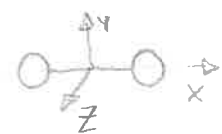
$$\rightarrow \langle K \rangle = \frac{1}{2} m \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle$$

$$\rightarrow U = N \cdot 3 \cdot \left( \frac{1}{2} k_B T \right) = \frac{3}{2} N k_B T = \frac{3}{2} n R T$$

da cui si ritrova  $c_v = \frac{1}{n} \left( \frac{dU}{dT} \right) = \frac{3}{2} R$

$\downarrow$   
(è la stessa c introdotta a pag. 3 della 2.1.2)

MONOATOMICO:  $c_v = \frac{3}{2} R$  e  $c_p = \frac{5}{2} R$

BIATOMICO:  5 gradi di libertà  
(3 x 2 atomi - 1 per distanza fissa)

5 termini quadratici indipendenti

3 traslazionali

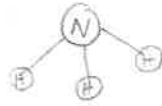
2 rotazionali ( $I_y \omega_y^2$  e  $I_z \omega_z^2$ )

si trascura  $I_x \omega_x^2$  perché  $I_x \rightarrow 0$

BIATOMICO  $c_v = \frac{5}{2} R$  e  $c_p = \frac{7}{2} R$

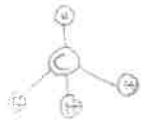
POLIATOMICO (molecole non lineari)

Esempi: ammoniaca  $\text{NH}_3$



geom. piramidale

metano  $\text{CH}_4$



geom. tetraedrica

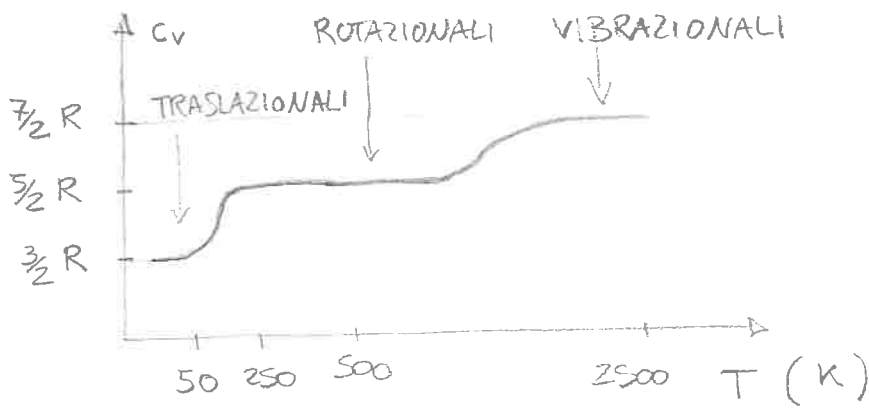
6 termini quadratici indipendenti (3 traslazionali + 3 rotazionali)

POLIATOMICO:  $c_v = 3R$   $c_p = 4R$

In realtà al di sopra di una certa  $T$  si accendono i moti vibrazionali. Esempio:  $\text{H}_2$



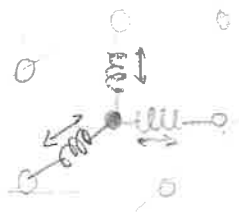
+ 2 termini quadratici (cinetico e potenziale)



Mecc. Quantistica: moti rotazionali e vibrazionali congelati al di sotto di  $T$  soglia

Modello per i solidi: le molecole oscillano attorno ad una posizione di equilibrio nelle 3 dimensioni (ma non traslano)

per  $T > T_D$   
↑  
Debye



3 x 2 termini quadratici (cinetico e potenziale)

$$c_v = 3R$$

(legge di Dulong e Petit)

