

## Foglio 3

**Esercizio 1** Rappresentare alcune curve di livello<sup>1</sup> e un grafico qualitativo delle seguenti funzioni  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ .

- (i)  $f(x, y) = e^x$ ;
- (ii)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ;
- (iii)  $f(x, y) = x^2 - y^2$ ;
- (iv)  $f(x, y) = x + 2y$ ;
- (v)  $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ .

**Esercizio 2** Per ciascuna delle seguenti funzioni  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , determinare il dominio  $D_f$ , calcolare le derivate parziali in un punto generico, verificare che  $f$  è di classe  $\mathcal{C}^1$  su tutto  $D_f$  e scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di  $f$  nel punto  $P_0$  indicato.

- (i)  $f(x, y) = 2x^2 - xy + e^{xy}$   $P_0 = (1, 0)$ ;
- (ii)  $f(x, y) = e^{x+2y} - x \cos(y)$   $P_0 = (1, 0)$ ;
- (iii)  $f(x, y) = x^5 y - x^3 \log(y)$   $P_0 = (0, 2)$ ;
- (iv)  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2 + 1}$   $P_0 = (0, 0)$ .

**Esercizio 3** Sia  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  la funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3y^2}{x - y} & x \neq y; \\ 0 & x = y. \end{cases}$$

- (i) Applicando direttamente la definizione, calcolare le derivate parziali nell'origine e la derivata direzionale nell'origine lungo il vettore  $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ .
- (ii) Mostrare che non vale la formula  $D_v f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v$  e dedurre che  $f$  non è differenziabile in  $x_0$ .
- (iii) Calcolare la derivata direzionale nell'origine lungo un vettore generico  $v = (h, k)$ .

**Esercizio 4** Studiare la continuità, la derivabilità parziale e direzionale e la differenziabilità delle seguenti funzioni nell'origine.

- (i)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \sin(x)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$
- (ii)  $f(x, y) = \begin{cases} 1 & |y| \geq x^2 \text{ oppure } y = 0; \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$
- (iii)  $f(x, y) = \begin{cases} y/x^2 & x \neq 0; \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$
- (iv)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

---

<sup>1</sup>Gli *insiemi di livello* di una funzione  $f: X \rightarrow \mathbf{R}$  sono gli insiemi della forma  $E_c := f^{-1}(\{c\}) = \{x \in X: f(x) = c\}$ , al variare di  $c \in \mathbf{R}$ . Se  $X = \mathbf{R}^2$ , gli insiemi di livello sono generalmente delle curve (in un senso reso preciso dal teorema della funzione implicita).

**Esercizio 5** Data la funzione  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definita da

$$\begin{cases} \frac{\sin \sqrt{xy}}{y} & x > 0, y > 0; \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

sia  $Z = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: x = 0 \text{ e } y \geq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: y = 0 \text{ e } x \geq 0\}$ .

- (i) Dimostrare che  $f$  è di classe  $\mathcal{C}^1$  (e dunque continua e differenziabile) in tutti i punti di  $\mathbf{R}^2 \setminus Z$ .
- (ii) Stabilire se  $f$  è continua, derivabile parzialmente e differenziabile nei punti di  $Z$ .

**Esercizio 6**

- (i) Sia  $a \in \mathbf{R}^N$  un vettore fissato e si consideri l'applicazione  $\ell_a: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  definita da  $\ell_a(x) = a \cdot x$  (dove  $\cdot$  indica il prodotto scalare standard di  $\mathbf{R}^N$ ). Dimostrare che  $\ell_a$  è lineare.
- (ii) Per  $N = 2$  e  $a = (1, 2)$ , rappresentare sul piano le curve di livello della funzione  $\ell_a$  relative ai valori  $-1, 0, 1, 2$ .
- (iii) Sia  $\ell$  una forma lineare su  $\mathbf{R}^N$ , ossia un'applicazione lineare  $\mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ . Dimostrare che esiste un unico vettore  $a \in \mathbf{R}^N$  che rappresenta  $\ell$ , ossia tale che  $\ell = \ell_a$ .
- (iv) Sia  $f: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  la funzione definita da  $f(x) = a \cdot x + b$ , per  $a \in \mathbf{R}^N, b \in \mathbf{R}$  fissati. Dimostrare che  $f$  è differenziabile in ogni punto, e ha gradiente  $\nabla f(x_0) = a$  per ogni  $x_0 \in \mathbf{R}^N$ , cioè  $df(x_0) = \ell_a$ .
- (v) Sia  $v \in \mathbf{R}^N$  un vettore unitario e  $\phi$  l'angolo individuato da  $v$  e  $a$ . Ricordando la formula  $a \cdot v = \|a\| \cos(\phi)$ , dimostrare che, al variare di  $v$  tra i vettori unitari di  $\mathbf{R}^N$ ,  $a \cdot v$  assume il suo valore massimo quando  $v$  è parallelo e concorde con  $a$ .
- (vi) Più in generale, sia  $f: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  differenziabile in  $x_0 \in \mathbf{R}^N$ . Dimostrare che, al variare di  $v$  tra i vettori unitari di  $\mathbf{R}^N$ , la derivata direzionale  $D_v f(x_0)$  assume il suo valore massimo quando  $v$  è parallelo e concorde con  $\nabla f(x_0)$ . Dedurre che il gradiente è un vettore che punta sempre nella direzione di massima crescita di  $f$ .

**Esercizio 7** Sia  $f: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione differenziabile nel punto  $x_0 \in \mathbf{R}^N$ . Mostrare che il differenziale  $df(x_0)$  è unico. Esplicitamente, se  $\ell_1$  e  $\ell_2$  sono forme lineari  $\mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  e  $r_1, r_2$  due funzioni tali che

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \ell_1(h) + r_1(h) = \ell_2(h) + r_2(h)$$

con  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_i(h)}{\|h\|} = 0$  per  $i = 1, 2$ , allora  $\ell_1 = \ell_2$ .

**Esercizio 8** Sia  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  e si supponga che le derivate parziali esistano in  $x_0 \in \mathbf{R}^N$  e valgano  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = 1$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0) = 2$ . Si assuma inoltre che, lungo il vettore  $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ , la derivata direzionale  $D_v f(x_0)$  valga  $-1$ . Può  $f$  essere differenziabile in  $x_0$ ?

**Esercizio 9** Siano  $f, g: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  differenziabili in un punto  $x_0 \in \mathbf{R}^N$ . Dimostrare che anche la funzione prodotto  $fg$  è differenziabile in  $x_0$  e si ha

$$\nabla(fg)(x_0) = g(x_0)\nabla f(x_0) + f(x_0)\nabla g(x_0).$$

**Esercizio 10** Dimostrare che la norma euclidea, come funzione  $f: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  definita da  $f(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$ , è differenziabile su tutto  $\mathbf{R}^N$  eccetto che nell'origine, con gradiente  $\nabla f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ .

**Esercizio 11**

- (i) Sia  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  una forma quadratica, ossia  $f(x) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = x \cdot (Qx)$  con  $a, b, c \in \mathbf{R}$ , dove  $Q$  è la matrice simmetrica  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  e  $x = (x_1, x_2)$ .  
Dimostrare che  $f$  è ovunque differenziabile e  $\nabla f(x_0) = Qx_0$ .
- (ii) Generalizzare il precedente risultato a forme quadratiche  $f: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  con  $N$  arbitrario, ossia a funzioni della forma  $f(x) = x \cdot (Qx)$  per qualche matrice  $N \times N$  simmetrica  $Q$ .

*Suggerimento:* Studiare la differenza  $f(x_0 + h) - f(x_0)$  usando la bilinearità del prodotto scalare. In alternativa, un approccio più concreto che si può adottare specialmente in prima battuta è di calcolare esplicitamente le derivate parziali a partire dall'espressione in componenti  $f(x) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$  (potrebbe essere però un po' più scomodo nel caso in cui  $N$  sia arbitrario).