ESERCITAZIONI FED

NONA ESERCITAZIONE

07-05-2026

Problema 12.7 del Griffiths

Problem 12.7. In a laboratory experiment, a muon is observed to travel 800 m before disintegrating. A graduate student looks up the lifetime of a muon (2×10^{-6} s) and concludes that its speed was

$$v = \frac{800\,\mathrm{m}}{2 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}} = 4 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}.$$

Faster than light! Identify the student's error, and find the actual speed of this muon.

Problema 12.20 del Griffiths

Problem 12.20.

(a) Event A happens at point $(x_A = 5, y_A = 3, z_A = 0)$ and at time t_A given by $ct_A = 15$; event B occurs at $(10, 8, 0)$ and $ct_B = 5$, both in system $\mathcal{S}$.

   (i) What is the invariant interval between A and B?

   (ii) Is there an inertial system in which they occur *simultaneously*? If so, find its velocity (magnitude and direction) relative to $\mathcal{S}$.

   (iii) Is there an inertial system in which they occur at the same point? If so, find its velocity relative to $\mathcal{S}$.

(b) Repeat part (a) for $A = (2, 0, 0)$, $ct = 1$; and for $B = (5, 0, 0)$, $ct = 3$.

Problema 12.34 del Griffiths

Problem 12.34. A neutral pion of (rest) mass m and (relativistic) momentum $p = \frac{3}{4}mc$ decays into two photons. Suppose one of the photons is emitted in the same direction as the original pion, and the other in the opposite direction. Find the (relativistic) energy of each photon.

Problema 4 del 07-09-2021

I muoni sono particelle instabili: in un campione con N_0 muoni a riposo, dopo un tempo t il numero residuo di muoni è $N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, con $\tau = 2.4 \cdot 10^{-6}$ s. I raggi cosmici che incidono sull'atmosfera terrestre producono grandi quantità di muoni e antimuoni. Si consideri un insieme di N_0 muoni a prodotti alla quota $h = 10^4$ m e si supponga che essi si muovano tutti verso la superficie terrestre alla stessa velocità v e con lo stesso fattore relativistico $\gamma = 10$. Calcolare:

a) il valore del rapporto $\beta = v/c$, con c velocità della luce;

b) la frazione $f = N/N_0$ di muoni attesi al suolo secondo la meccanica classica;

c) la frazione $f_T = N_T/N_0$ di muoni attesi al suolo secondo la relatività ristretta considerando un sistema di riferimento inerziale solidale con la Terra.

Problema 4 del 22-06–2021

Si considerino due vetture in moto rettilineo unidimensionale. La prima si muove con velocità (3/4)**c**, dove **c** è la velocità della luce, mentre la seconda insegue con velocità **c**/2. Ad un certo punto, gli inseguitori sparano un proiettile che parte con velocità **c**/3 rispetto alla vettura inseguitrice. Il proiettile raggiunge la vettura in fuga?

a) Secondo la relatività galileiana.
b) Secondo la relatività ristretta.

ESERCITAZIONE 9.

PROBLEMA 12.7 DEL GRIFFITHS

NEL LABORATORIO IL MUONE PERCORRE UNA DISTANZA $d = 800$ m PRIMA DI DECADERE
IL TEMPO DI VITA MEDIO PROPRIO DEL MUONE É $\tau = 2 \cdot 10^{-6}$ s

LO STUDENTE CALCOLA LA VELOCITÁ COME $v = \frac{d}{\tau} = 4 \cdot 10^8$ m/s $> c$, CHE É UN RISULTATO FISICAMENTE IMPOSSIBILE

IL PROBLEMA STA NEL FATTO CHE τ É IL TEMPO DI VITA PROPRIO DEL MUONE, CIOÉ IL TEMPO MISURATO NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO IN CUI IL MUONE É FERMO
→ NEL LABORATORIO, IL MUONE É IN MOTO RELATIVISTICO, QUINDI IL SUO ~~LABORATORIO~~ OROLOGIO INTERNO APPARE RALLENTATO A CAUSA DELLA DILATAZIONE DEI TEMPI

PER LA RELATIVITÁ RISTRETTA, IL TEMPO DI VITA DEL MUONE MISURATO NEL LABORATORIO É $\Delta t = \gamma\tau$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ CON $\beta = \frac{v}{c}$

NEL LAB. IL MUONE VIVE PIÚ A LUNGO DI QUANTO NON VIVREBBE NEL SDR PROPRIO

LA DISTANZA PERCORSA NEL LABORATORIO É $d = v\Delta t \overset{!}{=} v\gamma\tau \overset{!}{=} \tau \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{\tau^2} = \frac{v^2}{1 - v^2/c^2} \rightarrow \frac{d^2}{\tau^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = v^2$$
$$\frac{d^2}{\tau^2} = v^2\left(1 + \frac{d^2}{\tau^2 c^2}\right)$$

DA CUI $v^2 = \frac{(d/\tau)^2}{(1 + (d/\tau c)^2)} = \frac{c^2}{1 + (\tau c/d)^2}$ $\qquad \frac{\tau c}{d} = \frac{600}{800} = \frac{3}{4}$

SOSTITUENDO, $\frac{v}{c} = \frac{4}{5} \Rightarrow v = 0.8\,c = 2.4 \cdot 10^8$ m/s

PROBLEMA 12.20 DEL GRIFFITHS

CONSIDERIAMO DUE EVENTI A E B NELLO STESSO SISTEMA DI RIFERIMENTO S

a) EVENTO A IN $(5,3,0)$ A $ct_A = 15$; B IN $(10,8,0)$ A $ct_B = 5$

i) QUAL É L'INTERVALLO INVARIANTE TRA A E B ?

L'INTERVALLO SPAZIO-TEMPORALE TRA DUE EVENTI É DEFINITO COME
$I = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ INVARIANTE RELATIVISTICO

$\Delta x = x_B - x_A = 10 - 5 = 5$
$\Delta y = y_B - y_A = 8 - 3 = 5$
$\Delta z = z_B - z_A = 0 - 0 = 0$
$\Delta(ct) = ct_B - ct_A = 5 - 15 = -10$ L'EVENTO B AVVIENE PRIMA DELL'EVENTO A

DA CUI $I = -(-10)^2 + 5^2 + 5^2 + 0^2 = -50 \rightarrow I < 0$, QUINDI LA SEPARAZIONE TRA I DUE EVENTI É TIME-LIKE

ii) ESISTE UN SISTEMA INERZIALE IN CUI I DUE EVENTI AVVENGONO SIMULTANEAMENTE?

PERCHÉ DUE EVENTI AVVENGANO SIMULTANEAMENTE IN UN CERTO SISTEMA DI RIFERIMENTO, DEVE VALERE $\Delta t' = 0$

L'INTERVALLO DIVENTA $I = -c^2\Delta t'^2 + \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2$
$\stackrel{!}{=} \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 \geq 0$

MA ABBIAMO TROVATO $I = -50 < 0$ QUINDI NON PUÓ ESISTERE UN SISTEMA INERZIALE IN CUI I DUE EVENTI SONO SIMULTANEI

iii) ESISTE UN SISTEMA INERZIALE IN CUI I DUE EVENTI AVVENGONO NELLO STESSO PUNTO?

POICHÉ L'INTERVALLO É NEGATIVO, CIOÉ DI TIPO TEMPORALE, ESISTE UN SISTEMA INERZIALE IN CUI I DUE EVENTI AVVENGONO NELLO STESSO PUNTO DELLO SPAZIO
CERCHIAMO LA VELOCITÁ DI QUESTO SISTEMA RISPETTO A S

IN S, LA SEPARAZIONE SPAZIALE TRA I DUE EVENTI É
$\Delta \bar{r} = \Delta x\,\hat{x} + \Delta y\,\hat{y} + \Delta z\,\hat{z}$
$\stackrel{!}{=} 5\hat{x} + 5\hat{y}$

LA SEPARAZIONE TEMPORALE É $\Delta t = t_B - t_A$
$\Delta(ct) = ct_B - ct_A = -10 \Rightarrow \Delta t = -\frac{10}{c}$

SE VOGLIAMO TROVARE UN SISTEMA $\bar{S}$ IN CUI I DUE EVENTI AVVENGONO NELLO STESSO PUNTO, DOBBIAMO IMMAGINARE UN OSSERVATORE CHE PASSA IN B QUANDO AVVIENE B, E POI PASSA IN A QUANDO PASSA A

IN S, PER ANDARE DA B AD A, LO SPOSTAMENTO É $\bar{r}_A - \bar{r}_B = -5\hat{x} - 5\hat{y}$

IL TEMPO IMPIEGATO TRA B E A É $t_A - t_B = \frac{10}{c}$

LA VELOCITÁ DEL SISTEMA IN CUI I DUE EVENTI AVVENGONO NELLO STESSO PUNTO É $\bar{v} = \frac{\bar{r}_A - \bar{r}_B}{t_A - t_B} \stackrel{!}{=} \frac{-5\hat{x} - 5\hat{y}}{10/c} = -\frac{c}{2}\hat{x} - \frac{c}{2}\hat{y}$

CON MODULO $v = \sqrt{\left(-\frac{c}{2}\right)^2 + \left(-\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{c}{\sqrt{2}}$

b) $A = (2, 0, 0)$ CON $ct_A = 1$ E $B = (5, 0, 0)$ CON $ct_B = 3$

i) $I = -\Delta(ct)^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = 5 > 0$ LA SEPARAZIONE TRA I DUE EVENTI É DI TIPO SPACE-LIKE

ii) POICHÉ $I > 0$, ESISTE UN SISTEMA INERZIALE IN CUI $\Delta t' = 0$
TROVIAMO LA VELOCITÁ DI QUESTO SISTEMA RISPETTO A S

POICHÉ GLI EVENTI DIFFERISCONO SOLO LUNGO x, POSSIAMO USARE LA TRASFORMAZIONE DI LORENTZ LUNGO x
$\Delta(ct)' = \gamma\,[\Delta(ct) - \beta\Delta x]$, $\beta = \frac{v}{c}$

VOGLIAMO CHE GLI EVENTI SIANO SIMULTANEI NEL SISTEMA S', CIOÉ
$\Delta t' = 0 \Rightarrow \Delta(ct') = 0$

$\rightarrow \quad \gamma[\Delta(ct) - \beta\Delta x] = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta(ct) - \beta\Delta x = 0$

$\beta\Delta x = \Delta(ct)$

$\beta = \dfrac{\Delta(ct)}{\Delta x} = \dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad v = \dfrac{2}{3}c$

iii) PERCHÉ DUE EVENTI AVVENGANO NELLO STESSO PUNTO IN UN CERTO SISTEMA, DEVE VALERE $\Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = 0$

L'INTERVALLO DIVENTA $I = -\Delta(ct')^2 \leq 0$
MA ABBIAMO TROVATO $I = 5 > 0$ QUINDI NON PUÓ ESISTERE UN SISTEMA INERZIALE IN CUI I DUE EVENTI AVVENGONO NELLO STESSO PUNTO

PROBLEMA 12.34 DEL GRIFFITHS

UN PIONE NEUTRO DI MASSA A RIPOSO m E MOMENTO $p = \frac{3}{4}mc$ DECADE IN DUE FOTONI BACK-TO-BACK

VOGLIAMO TROVARE L'ENERGIA RELATIVISTICA DI CIASCUN FOTONE

$\underset{E_B}{\gamma} \leftarrow \pi^0 \rightarrow \underset{E_A}{\gamma}$

PER UNA PARTICELLA RELATIVISTICA DI MASSA A RIPOSO m, ENERGIA E QUANTITÁ DI MOTO SONO LEGATE DALLA RELAZIONE $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

DA CUI $E_\pi^2 = \left(\frac{3}{4}mc\right)^2 c^2 + m^2c^4$

$= \frac{9}{16}m^2c^4 + m^2c^4 = \frac{25}{16}m^2c^4 \quad \Rightarrow \quad E_\pi = \frac{5}{4}mc^2$ É L'ENERGIA INIZIALE DEL PIONE

IL PIONE DECADE IN DUE FOTONI, QUINDI L'ENERGIA TOTALE INIZIALE DEVE ESSERE UGUALE ALL'ENERGIA TOTALE FINALE $E_\pi = E_A + E_B$

$\frac{5}{4}mc^2 = E_A + E_B$

ORA IMPONIAMO LA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÁ DI MOTO
SCEGLIAMO L'ASSE x LUNGO LA DIREZIONE DI MOTO INIZIALE DEL PIONE
ALLORA LA QUANTITÁ DI MOTO INIZIALE É POSITIVA E VALE $p_\pi = \frac{3}{4}mc$

PER UN FOTONE VALE LA RELAZIONE $E = pc \Rightarrow p = \frac{E}{c}$

IL FOTONE A É EMESSO NELLA STESSA DIREZIONE DEL PIONE INIZIALE, QUINDI HA QUANTITÁ DI MOTO POSITIVA $p_A = \frac{E_A}{c}$

IL FOTONE B É EMESSO NELLA DIREZIONE OPPOSTA DEL PIONE INIZIALE, QUINDI HA QUANTITÁ DI MOTO NEGATIVA $p_B = -\frac{E_B}{c}$

LA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÁ DI MOTO QUINDI DÁ $p_\pi = p_A + p_B$

$\rightarrow \frac{3}{4}mc = \frac{E_A}{c} - \frac{E_B}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4}mc^2 = E_A - E_B$

ABBIAMO QUINDI IL SISTEMA $\begin{cases} E_A + E_B = \frac{5}{4} mc^2 \\ E_A - E_B = \frac{3}{4} mc^2 \end{cases}$

$(E_A + E_B) + (E_A - E_B) = \frac{5}{4} mc^2 + \frac{3}{4} mc^2$

$2E_A = 8\, mc^2 \Rightarrow E_A = 4\, mc^2$

$(E_A + E_B) - (E_A - E_B) = \frac{5}{4} mc^2 - \frac{3}{4} mc^2$

$2E_B = \frac{1}{2} mc^2 \Rightarrow E_B = \frac{1}{4} mc^2$

PROBLEMA 4. DEL 07/09/2021

I MUONI SONO PARTICELLE INSTABILI
IN UN CAMPIONE CON N_0 MUONI A RIPOSO, IL NUMERO DI MUONI RIMASTI DOPO UN TEMPO t É $N(t) = N_0 \exp(-t/\tau)$ CON $\tau = 2.4 \cdot 10^{-6}$ s VITA MEDIA PROPRIA DEL MUONE
I MUONI VENGONO PRODOTTI A QUOTA $h = 10^4$ m E SI MUOVONO VERSO IL SUOLO CON FATTORE RELATIVISTICO $\gamma = 10$

a) CALCOLARE $\beta = v/c$

IL FATTORE DI LORENTZ É DEFINITO COME $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$\Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \Rightarrow \gamma^2(1-\beta^2) = 1$

$\gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = 1$

$\gamma^2\beta^2 = \gamma^2 - 1$

$\beta^2 = \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \Rightarrow \beta = \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)^{1/2} \simeq 0.995$

b) DETERMINARE LA FRAZIONE DI MUONI ATTESI AL SUOLO SECONDO LA MECCANICA CLASSICA

IN MC NON SI TIENE CONTO DELLA DILATAZIONE DEI TEMPI, QUINDI SI ASSUME CHE IL TEMPO DI VITA DEI MUONI NEL SISTEMA TERRA SIA τ

NEL SISTEMA TERRA, IL TEMPO NECESSARIO AI MUONI A PERCORRERE LA DISTANZA h É $t_{cl} = \frac{h}{v} = \frac{h}{\beta c} = 3.3 \cdot 10^{-5}$ s

LA FRAZIONE DI MUONI CHE SOPRAVVIVE FINO AL SUOLO É $f = \frac{N}{N_0} = \frac{N_0 \exp(-t_{cl}/\tau)}{N_0} = 8.6 \cdot 10^{-7}$

c) DETERMINARE LA FRAZIONE DI MUONI ATTESI AL SUOLO SECONDO LA RELATIVITÁ RISTRETTA

NEL SISTEMA TERRA, I MUONI SONO IN MOTO RELATIVISTICO, QUINDI IL LORO OROLOGIO INTERNO APPARE RALLENTATO E IL TEMPO DI VITA MEDIO MISURATO DALLA TERRA É $\tau_T = \gamma\tau = 10\,\tau = 2.4 \cdot 10^{-5}$ s

IL TEMPO DI VOLO RISULTA $t_T = \frac{h}{v} = \frac{h}{\beta c} = 3.3 \cdot 10^{-5}$ s

LA FRAZIONE DI MUONI CHE ARRIVA AL SUOLO É $f = \frac{N}{N_0} = \frac{N_0 \exp(-t_T/\tau_T)}{N_0} = 0.25$

PROBLEMA 4. DEL 22/06/2021

SI CONSIDERINO DUE VETTURE IN MOTO RETTILINEO 1D

LA VETTURA IN FUGA SI MUOVE CON VELOCITÁ $v_1 = \frac{3}{4}c$ RISPETTO AL SUOLO

LA VETTURA INSEGUITRICE SI MUOVE NELLA STESSA DIREZIONE CON VELOCITÁ $v_2 = \frac{c}{2}$

A UN CERTO PUNTO, DALLA SECONDA VETTURA VIENE SPARATO UN PROIETTILE CON VELOCITÁ $u' = \frac{c}{3}$ RISPETTO ALLA VETTURA INSEGUITRICE

LA DOMANDA É SE IL PROIETTILE RIESCE A RAGGIUNGERE LA VELOCITÁ DELLA VETTURA IN FUGA

a) RISPETTO ALLA RELATIVITÁ GALILEIANA

IN RELATIVITÁ GALILEIANA LE VELOCITÁ SI SOMMANO SEMPLICEMENTE

→ SE IL PROIETTILE HA VELOCITÁ u' RISPETTO ALLA VETTURA INSEGUITRICE E QUESTA HA VELOCITÁ v_2 RISPETTO AL SUOLO, ALLORA LA VELOCITÁ DEL PROIETTILE RISPETTO AL SUOLO É $u = v_2 + u' = \frac{c}{2} + \frac{c}{3} = \frac{5}{6}c$

LA VELOCITÁ DELLA VETTURA IN FUGA É $v_1 = \frac{3}{4}c$ $\Rightarrow$ $u > v_1$ IL PROIETTILE RAGGIUNGE LA VETTURA

b) RISPETTO ALLA RELATIVITÁ RISTRETTA

LA LEGGE DI COMPOSIZIONE DELLE VELOCITÁ É $u = \frac{u' + v_2}{1 + u'v_2/c^2} = \frac{(5/6)c}{1 + 1/6} = \frac{5}{7}c$

DA CUI $u < v_1$ IL PROIETTILE, VISTO DAL SUOLO, É PIÚ LENTO DELLA VETTURA IN FUGA E NON PUÓ RAGGIUNGERLA