ESERCITAZIONI FED

OTTAVA ESERCITAZIONE

30-04-2026

Problema 3 del 27-01-2022

Un granello di polvere cosmica, approssimabile ad una sferetta di raggio a_0 perfettamente assorbente, è soggetto, nel sistema solare, alla forza di attrazione gravitazionale del sole ed alla pressione dovuta alla radiazione solare. Sapendo che la potenza irradiata dal sole è $P = 3.96 \cdot 10^{26}$ W, la massa del sole è $M = 2.0 \cdot 10^{30}$ kg e che la densità del granello è $\rho = 2.7 \cdot 10^3$ kg/m³, determinare il valore minimo di a_0 al di sotto del quale la particella sarebbe spinta fuori dal sistema solare.

Problema 11.23 del Griffiths

Problem 11.23. A radio tower rises to height h above flat horizontal ground. At the top is a magnetic dipole antenna, of radius b, with its axis vertical. FM station KRUD broadcasts from this antenna at (angular) frequency ω, with a total radiated power P (that's averaged, of course, over a full cycle). Neighbors have complained about problems they attribute to excessive radiation from the tower – interference with their stereo systems, mechanical garage doors opening and closing mysteriously, and a variety of suspicious medical problems. But the city engineer who measured the radiation level at the base of the tower found it to be well below the accepted standard. You have been hired by the Neighborhood Association to assess the engineer's report.

(a) In terms of the variables given (not all of which may be relevant), find the formula for the intensity of the radiation at ground level, a distance R from the base of the tower. You may assume that $b \ll c/\omega \ll h$. [*Note:* We are interested only in the *magnitude* of the radiation, not in its *direction* – when measurements are taken, the detector will be aimed directly at the antenna.]

(b) How far from the base of the tower *should* the engineer have made the measurement? What is the formula for the intensity at this location?

(c) KRUD's actual power output is $35\,\mathrm{kW}$, its frequency is $90\,\mathrm{MHz}$, the antenna's radius is $6\,\mathrm{cm}$, and the height of the tower is $200\,\mathrm{m}$. The city's radio-emission limit is $200\,\mu\mathrm{W/cm}^2$. Is KRUD in compliance?

Problema 1 del 28-06-2023

Due dipoli oscillanti $\vec{\mathbf{p}}_-$ e $\vec{\mathbf{p}}_+$ sono posizionati rispettivamente nei punti di coordinate $(0, -d/2, 0)$ e $(0, d/2, 0)$ di un sistema di riferimento cartesiano. I due dipoli, aventi momento di eguale modulo p_0, sono paralleli all'asse z e oscillano armonicamente con pulsazioni leggermente differenti: $\omega_\pm = \omega_0 \pm \delta\omega$, dove $\delta\omega \ll \omega_0$. La distanza tra i due dipoli è tale che $d = \lambda_0/2 = \pi c/\omega_0$. Si consideri un punto P nel piano $z = 0$ distante $r \gg \lambda_0$ dall'origine O e sia ϕ l'angolo tra l'asse x e la direzione di $\vec{\mathbf{r}} = \overrightarrow{\mathbf{OP}}$. Determinare:

a) la direzione e il modulo del campo elettrico osservato in P (al primo ordine in $\delta\omega/\omega_0$);

b) la potenza misurata da un rivelatore di superficie efficace pari ad A, posizionato in P, avente un tempo di risposta T, con $2\pi/\omega_0 \ll T \ll 2\pi/\delta\omega$.

c) la direzione di massima emissione del sistema dei due dipoli nel piano $z = 0$ all'istante t, discutendone poi l'andamento al variare del tempo.

[Suggerimento: nel punto P le ampiezze di oscillazione dei campi generati dai due dipoli possono essere considerate approssimativamente uguali, si tenga invece conto dello sfasamento dovuto alla differenza di cammino ottico in P tra le onde provenienti da $\vec{\mathbf{p}}_-$ e quelle provenienti da $\vec{\mathbf{p}}_+$]

Problema 2 del 29-06-2022

Una particella di carica q si muove, sotto l'azione di una forza centripeta, di moto circolare uniforme con velocità di modulo v lungo una circonferenza di raggio R. Determinare:

a) la forza aggiuntiva che occorre applicare per compensare la reazione di radiazione;

b) il rapporto tra la potenza sviluppata dalla forza calcolata in a) e la potenza totale irradiata.

Si consideri ora la stessa particella in moto armonico con $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = A\cos(\omega t)\hat{\mathbf{z}}$. Determinare:

c) il rapporto tra la potenza sviluppata dalla forza che compensa la reazione di radiazione e la potenza totale irradiata.

ESERCITAZIONE 8.

PROBLEMA 11.23 DEL GRIFFITHS

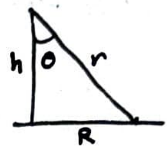
CONSIDERIAMO UNA TORRE DI ALTEZZA h, ALLA CUI SOMMITÀ SI TROVA UN'ANTENNA A DIPOLO MAGNETICO OSCILLANTE, CON ASSE VERTICALE
IL DIPOLO IRRADIA UNA POTENZA TOTALE MEDIA P ALLA FREQUENZA ANGOLARE ω

L'ANTENNA È UN DIPOLO MAGNETICO VERTICALE → LA RADIAZIONE NON È EMESSA ISOTROPICAMENTE, MA HA UNA DISTRIBUZIONE ANGOLARE

m_0 AMPIEZZA DEL MOMENTO DI DIPOLO MAGNETICO
r DISTANZA DAL DIPOLO
θ ANGOLO RISPETTO ALL'ASSE DEL DIPOLO

$$\langle \vec{S} \rangle = \left(\frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3} \right) \frac{\sin^2\theta}{r^2}\, \hat{r}$$

UN PUNTO AL SUOLO, A DISTANZA ORIZZONTALE R DALLA BASE DELLA TORRE, SI TROVA A DISTANZA $r = \sqrt{R^2+h^2}$ DALL'ANTENNA



INOLTRE, $\sin\theta = \dfrac{R}{r} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2+h^2}} \Rightarrow \sin^2\theta = \dfrac{R^2}{R^2+h^2}$

SOSTITUENDO, $$\langle \vec{S} \rangle = \left(\frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3} \right) \frac{R^2}{(R^2+h^2)^2}$$

a) TROVARE LA FORMULA DELL'INTENSITÀ DELLA RADIAZIONE A DISTANZA R DALLA BASE DELLA TORRE

LA POTENZA TOTALE IRRADIATA È $P = \dfrac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$

DA CUI $$I(R) = \frac{3P}{8\pi} \frac{R^2}{(R^2+h^2)^2}$$

b) QUANTO DISTANTE DALLA BASE DELLA TORRE VA MISURATA L'INTENSITÀ?

DOBBIAMO TROVARE IL MASSIMO DI $I(R)$, QUINDI STUDIAMO $f(R) = \dfrac{R^2}{(R^2+h^2)^2}$

DERIVIAMO $$\frac{df}{dR} = \frac{2R(R^2+h^2)^2 - R^2\, 2(R^2+h^2)\, 2R}{(R^2+h^2)^4}$$
$$= \frac{2R(R^2+h^2)}{(R^2+h^2)^4} \left[(R^2+h^2) - 2R^2 \right]$$
$$= \frac{2R}{(R^2+h^2)^3} (h^2 - R^2)$$

IMPONIAMO $\dfrac{df}{dR} = 0 \Rightarrow$ LE SOLUZIONI SONO $R = 0$
$h^2 - R^2 = 0 \Rightarrow R = h$
↓
IL TECNICO AVREBBE DOVUTO MISURARE A UNA DISTANZA DALLA BASE PARI ALL'ALTEZZA DELLA TORRE

$$I(h) = \frac{3P}{8\pi} \frac{h^2}{(2h^2)^2} = \frac{3P}{8\pi} \frac{1}{4h^2}$$

c) $P = 35\ KW = 35 \cdot 10^3\ W$, $h = 200\ m$

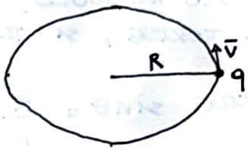
$$I_{max} = I(h) = \frac{3P}{32\pi h^2} \simeq 0.026\ W/m^2$$

ORA, $1\ \frac{W}{m^2} = 100\ \frac{\mu W}{cm^2}$

DA CUI $I_{max} = 2.6\ \mu W/cm^2 \ll 200\ \mu W/cm^2$ SOTTO IL LIMITE IMPOSTO DALLA CITTÁ

PROBLEMA 2. DEL 29/06/2022

PARTICELLA DI CARICA q CHE SI MUOVE DI MOTO CIRCOLARE UNIFORME CON VELOCITÁ v LUNGO UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO R



a) DETERMINARE LA FORZA AGGIUNTIVA CHE OCCORRE APPLICARE PER COMPENSARE LA REAZIONE DI RADIAZIONE

PER LA FORZA DI RADIAZIONE POSSIAMO USARE LA FORMULA DI ABRAHAM-LORENTZ

$$\bar{F}_{rad} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\dot{\bar{a}}$$

$\bar{r}(t) = R\left[\cos(wt)\hat{x} + \sin(wt)\hat{y}\right]$ CON $w = \frac{v}{R}$ FREQUENZA ANGOLARE

$$\bar{v}(t) = \dot{\bar{r}}(t) = wR\left[-\sin(wt)\hat{x} + \cos(wt)\hat{y}\right]$$
$$\bar{a}(t) = \dot{\bar{v}}(t) = -w^2R\left[\cos(wt)\hat{x} + \sin(wt)\hat{y}\right] \overset{!}{=} -w^2\bar{r}(t)$$
$$\dot{\bar{a}}(t) = -w^2\dot{\bar{r}}(t) = -w^2\bar{v}(t)$$

QUINDI $\bar{F}_{rad} = -\frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}w^2\bar{v}(t)$

PER MANTENERE IL MOTO CIRCOLARE UNIFORME BISOGNA APPLICARE UNA FORZA AGGIUNTIVA OPPOSTA ALLA REAZIONE DI RADIAZIONE

$$\bar{F}_{add} = -\bar{F}_{rad} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}w^2\bar{v}(t)$$

b) DETERMINARE IL RAPPORTO TRA P_{add} E P_{rad}

LA POTENZA SVILUPPATA DALLA FORZA AGGIUNTIVA É

$$P_{add} = \bar{F}_{add}\cdot\bar{v} \overset{!}{=} \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}w^2v^2 \overset{!}{=} \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\frac{v^4}{R^2}$$

LA POTENZA TOTALE IRRADIATA É DATA DALLA FORMULA DI LARMOR

$$P_{rad} = \frac{\mu_0}{6\pi c}q^2a^2 = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}w^4R^2 = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\frac{v^4}{R^2}$$

DA CUI $\frac{P_{add}}{P_{rad}} = 1$

c) DETERMINARE P_{add}/P_{rad} NEL CASO DI MOTO ARMONICO

$$\bar{r}(t) = A\cos(\omega t)\hat{z}$$
$$\bar{v}(t) = \dot{\bar{r}}(t) = -A\omega\sin(\omega t)\hat{z}$$
$$\bar{a}(t) = \dot{\bar{v}}(t) = -A\omega^2\cos(\omega t)\hat{z} \overset{!}{=} -\omega^2\bar{r}(t)$$
$$\dot{\bar{a}}(t) = A\omega^3\sin(\omega t)\hat{z} = -\omega^2\bar{v}(t)$$

QUINDI $\bar{F}_{rad} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\dot{\bar{a}} = -\frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\omega^2\bar{v}(t)$

DA CUI $P_{rad} = \frac{\mu_0}{6\pi c}q^2 a^2 = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\omega^4 A^2\cos^2(\omega t)$

$$\bar{F}_{add} = -\bar{F}_{rad} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\omega^2\bar{v}(t)$$
$$P_{add} = \bar{F}_{add}\cdot\bar{v} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\omega^2 v^2 = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\omega^4 A^2\sin^2(\omega t)$$

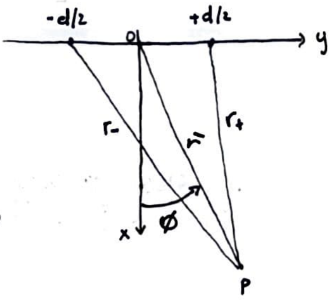
DA CUI $\frac{P_{add}}{P_{rad}} = \tan^2(\omega t)$

OSS. SE CONSIDERASSIMO UN PERIODO COMPLETO, $\langle\sin^2(\omega t)\rangle = \langle\cos^2(\omega t)\rangle = \frac{1}{2}$

DA CUI $P_{add}/P_{rad} = 1$

PROBLEMA 1. DEL 28/06/2023

DUE DIPOLI OSCILLANTI $\bar{p}_-$ E $\bar{p}_+$ SONO DISPOSTI NEI PUNTI DI COORDINATE
$(0, -d/2, 0)$; $(0, +d/2, 0)$
OSCILLANO CON PULSAZIONI DIFFERENTI $\omega_\pm = \omega_0 \pm \delta\omega$
CON $\delta\omega \ll \omega_0$
LA DISTANZA TRA I DUE DIPOLI É $d = \frac{\lambda_0}{2} = \frac{\pi c}{\omega_0}$



a) DETERMINARE LA DIREZIONE E IL MODULO DEL CAMPO ELETTRICO OSSERVATO IN P

IL CAMPO ELETTRICO OSSERVATO IN UN PUNTO P DA UN DIPOLO ELETTRICO É
$$\bar{E} = -\frac{\mu_0 p_0\omega^2}{4\pi}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\hat{\theta}$$

PER I DUE DIPOLI, $\bar{E}_\pm = -\frac{\mu_0 p_0\omega^2}{4\pi}\left(\frac{\sin\theta}{r_\pm}\right)\cos\left[\omega\left(t-\frac{r_\pm}{c}\right)\right]\hat{\theta}$

$$P = (r\cos\phi, r\sin\phi, 0)$$
$$r_+ = \sqrt{(r\cos\phi)^2 + \left(r\sin\phi - \frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi + \frac{d^2}{4} - rd\sin\phi}$$
$$\overset{!}{=} \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} - rd\sin\phi}$$
$$\overset{r\gg d}{=} r\sqrt{1 - \frac{d}{r}\sin\phi}$$

$\sqrt{1+\varepsilon} \simeq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$

DA CUI $r_+ \simeq r\left(1 - \frac{d}{2r}\sin\phi\right) = r - \frac{d}{2}\sin\phi$

ANALOGAMENTE, $r_- = r + \frac{d}{2}\sin\phi$

ORA, POICHÉ I DIPOLI OSCILLANO LUNGO $\hat{z}$ E IL PUNTO DI OSSERVAZIONE STA NEL PIANO $z=0$ $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \sin\theta = 1$ E $\hat{\theta} = -\hat{z}$

DA CUI $\bar{E}_\pm = \frac{\mu_0 p_0 \omega_\pm^2}{4\pi r_\pm}\cos\left[\omega_\pm\left(t - \frac{r_\pm}{c}\right)\right]\hat{z}$

POICHÉ $\omega_\pm = \omega_0 \pm \delta\omega$ CON $\delta\omega \ll \omega_0$, ALLORA $\omega_\pm \simeq \omega_0$

INOLTRE, $r \gg \lambda_0 \Rightarrow r_\pm \simeq r$

DA CUI $\bar{E}_\pm = \frac{\mu_0 p_0 \omega_0^2}{4\pi r}\cos\left[\omega_\pm\left(t - \frac{r_\pm}{c}\right)\right] = E_0\cos\left[\omega_\pm\left(t - \frac{r_\pm}{c}\right)\right]$

$$\bar{E}_+ = E_0\cos\left[\omega_+\left(t - \frac{r_+}{c}\right)\right] = E_0\cos\left[\omega_+\left(t - \frac{1}{c}\left(r - \frac{d}{2}\sin\phi\right)\right)\right]\hat{z} = E_0\cos\left[\omega_+\left(t - \frac{r}{c} + \frac{d}{2c}\sin\phi\right)\right]\hat{z}$$

$$\bar{E}_- = E_0\cos\left[\omega_-\left(t - \frac{r_-}{c}\right)\right] = E_0\cos\left[\omega_-\left(t - \frac{1}{c}\left(r + \frac{d}{2}\sin\phi\right)\right)\right]\hat{z} = E_0\cos\left[\omega_-\left(t - \frac{r}{c} - \frac{d}{2c}\sin\phi\right)\right]\hat{z}$$

IL CAMPO TOTALE É

$$\bar{E} = \bar{E}_+ + \bar{E}_- = E_0\cos\left[\omega_+\left(\tau + \frac{d}{2c}\sin\phi\right)\right] + E_0\cos\left[\omega_-\left(\tau - \frac{d}{2c}\sin\phi\right)\right]\hat{z} \qquad \tau = t - \frac{r}{c}$$

DEF. $A = \omega_+\left(\tau + \frac{d}{2c}\sin\phi\right) = (\omega_0 + \delta\omega)\left(\tau + \frac{d}{2c}\sin\phi\right) = \omega_0\tau + \frac{\omega_0 d}{2c}\sin\phi + \delta\omega\tau + \frac{\delta\omega d}{2c}\sin\phi$

$B = \omega_-\left(\tau - \frac{d}{2c}\sin\phi\right) = (\omega_0 - \delta\omega)\left(\tau - \frac{d}{2c}\sin\phi\right) = \omega_0\tau - \frac{\omega_0 d}{2c}\sin\phi - \delta\omega\tau + \frac{\delta\omega d}{2c}\sin\phi$

ORA, $\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

$$A+B = 2\omega_0\tau + \frac{\delta\omega d}{c}\sin\phi \quad \Rightarrow \quad \frac{A+B}{2} = \omega_0\tau + \frac{\delta\omega d}{2c}\sin\phi$$

$$A-B = \frac{\omega_0 d}{c}\sin\phi + 2\delta\omega\tau \quad \Rightarrow \quad \frac{A-B}{2} = \frac{\omega_0 d}{2c}\sin\phi + \delta\omega\tau$$

DA CUI $\bar{E} = 2E_0 \cos\left[\omega_0\tau + \frac{\delta\omega d}{2c}\sin\phi\right]\cos\left[\frac{\omega_0 d}{2c}\sin\phi + \delta\omega\tau\right]\hat{z}$

ORA, $d = \frac{\lambda_0}{2} = \frac{\pi c}{\omega_0} \Rightarrow \frac{\omega_0 d}{2c} = \frac{\pi}{2}$ E $\frac{\delta\omega d}{2c} = \frac{\delta\omega}{\omega_0}\frac{\pi}{2} \to 0$

DA CUI $\bar{E} \simeq 2E_0 \cos\left[\omega_0\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\cos\left[\delta\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{\pi}{2}\sin\phi\right]\hat{z}$

b) DETERMINARE LA POTENZA MISURATA DA UN RIVELATORE DI SUPERFICIE EFFICACE A CON TEMPO DI RISPOSTA T

IL MODULO DEL VETTORE DI POYNTING NEL PUNTO P É

$$S = \frac{1}{\mu_0 c}E^2 = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2\left[\omega_0\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\cos^2\left[\delta\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{\pi}{2}\sin\phi\right]$$

MEDIANDO TEMPORALMENTE, $\langle S\rangle = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c}\frac{1}{2}\cos^2\left[\delta\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{\pi}{2}\sin\phi\right]$

IL RIVELATORE MISURA UNA POTENZA $P = \langle S\rangle A$

$$= \frac{4AE_0^2}{\mu_0 c}\cos^2\left[\delta\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{\pi}{2}\sin\phi\right]$$

c) DETERMINARE LA DIREZIONE DI MASSIMA EMISSIONE DEL SISTEMA DEI DUE DIPOLI NEL PIANO $z=0$

LA POTENZA É MASSIMA PER $\cos^2\left[\delta\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{\pi}{2}\sin\phi\right] = 1$

OVVERO PER $\delta\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{\pi}{2}\sin\phi = m\pi$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}\sin\phi = m\pi - \delta\omega\left(t-\frac{r}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad \sin\phi_m = 2m - \frac{2\delta\omega}{\pi}\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

PROBLEMA 3. DEL 27/01/2022

UN GRANELLO DI POLVERE COSMICA, APPROSSIMABILE A UNA SFERETTA DI RAGGIO a_0 PERFETTAMENTE ASSORBENTE É SOGGETTO A DUE FORZE:

- FORZA DI ~~[illegible]~~ ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE DEL SOLE
- FORZA DOVUTA ALLA PRESSIONE DELLA RADIAZIONE SOLARE

ORA, LA PARTICELLA SARÁ ESPULSA SE LA FORZA DOVUTA ALLA RADIAZIONE SUPERA QUELLA GRAVITAZIONALE → IL VALORE LIMITE DEL RAGGIO SI OTTIENE IMPONENDO L'UGUAGLIANZA TRA LE DUE FORZE $F_{rad} = F_g$

→ SE IL GRANELLO É PIÚ PICCOLO DI QUESTO VALORE CRITICO, LA PRESSIONE DI RADIAZIONE PREVALE

CONSIDERIAMO IL SOLE COME SORGENTE ISOTROPA DI POTENZA TOTALE P

A DISTANZA r DAL SOLE, IL FLUSSO DI ENERGIA VALE $I(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$

PER UNA SUPERFICIE PERFETTAMENTE ASSORBENTE, LA PRESSIONE DI RADIAZIONE É $P_{rad} = \frac{I}{c}$

DA CUI $P_{rad}(r) = \frac{P}{4\pi c r^2}$

IL GRANELLO É UNA SFERA DI RAGGIO a_0, MA LA RADIAZIONE INTERCETTA SOLO LA SUA SEZIONE GEOMETRICA PERPENDICOLARE AI RAGGI INCIDENTI, OVVERO $A = \pi a_0^2$

PERTANTO, LA FORZA ESERCITATA DALLA RADIAZIONE É $F_{rad} = P_{rad} A = \frac{P a_0^2}{4 c r^2}$

LA FORZA DI ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE VALE $F_g = G \frac{Mm}{r^2}$ CON m MASSA DEL GRANELLO

POICHÉ IL GRANELLO É UNA SFERA DI RAGGIO a_0 E DENSITÁ ρ, $m = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi a_0^3$

DA CUI $F_g = G \frac{M}{r^2} \rho \frac{4}{3} \pi a_0^3$

IMPONENDO $F_{rad} = F_g \Rightarrow G \frac{M}{r^2} \rho \frac{4}{3} \pi a_0^3 = \frac{P a_0^2}{4 c r^2}$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{3P}{16\pi c G M \rho} = a_{critico}$$

$$\sim 2.2 \cdot 10^{-7}\,m$$

QUINDI
- SE $a_0 > a_{critico}$ LA GRAVITÁ PREVALE
- SE $a_0 < a_{critico}$ LA PRESSIONE DI RADIAZIONE PREVALE E IL GRANELLO VIENE SPINTO VIA