ESERCITAZIONI FED

PRIMA ESERCITAZIONE

12-03-2026

Problema 2 del 28-06-2023

In presenza di cariche magnetiche isolate (monopoli), le equazioni di Maxwell prenderebbero la forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \rho/\epsilon_0 \ ; \ \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\mu_o \vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{m}} - \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{t}} \ ; \ \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \rho_{\mathbf{m}} \ ; \ \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_o \vec{\mathbf{J}} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{t}}$$

dove ρ_{m} e $\vec{\mathbf{J}}_{\mathrm{m}}$ sono, rispettivamente, le densità di carica e corrente magnetiche. Determinare:

a) le dimensioni della carica magnetica nel Sistema Internazionale;

b) la forza che si scambierebbero due cariche magnetiche puntiformi.

Si supponga ora di avere un fascio di monopoli magnetici, ciascuno di carica q_{m}, che si muovono con la stessa velocità $\vec{\mathbf{v}}$. Il fascio ha la forma di un cilindro infinito, a base circolare di raggio a, e contiene una densità numerica uniforme di n particelle per unità di volume. Determinare:

c) i campi elettrico e magnetico generati dal fascio in tutto lo spazio.

ESERCITAZIONE 1. 12/03/2026

PROBLEMA 2. DEL 28/06/2023

IN PRESENZA DI CARICHE MAGNETICHE ISOLATE (MONOPOLI), LE EQ. DI MAXWELL ASSUMONO LA FORMA

$$\nabla\cdot\bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla\cdot\bar{B} = \mu_0\rho_m$$

$$\nabla\times\bar{E} = -\mu_0\bar{J}_m - \partial_t\bar{B} \qquad \nabla\times\bar{B} = \mu_0\bar{J} + \varepsilon_0\mu_0\,\partial_t\bar{E}$$

CON ρ_m DENSITÁ DI CARICA MAGNETICA
E $\bar{J}_m$ DENSITÁ DI CORRENTE MAGNETICA

a) DETERMINARE LE DIMENSIONI DELLA CARICA MAGNETICA NEL SI

PER TROVARE LE DIMENSIONI DELLA CARICA MAGNETICA q_m PARTO DALL'EQUAZIONE $\nabla\cdot\bar{B} = \mu_0\rho_m$ DOVE

- $\bar{B}$ CAMPO MAGNETICO
- $\nabla\cdot\bar{B}$ DIVERGENZA DEL CAMPO MAGNETICO
- ρ_m DENSITÁ VOLUMICA DI CARICA MAGNETICA, OVVERO LA CARICA MAGNETICA PER UNITÁ DI VOLUME
- μ_0 PERMEABILITÁ MAGNETICA DEL VUOTO

ORA, $\rho_m = \frac{q_m}{V}$ $\Rightarrow$ DIMENSIONALMENTE $[\rho_m] = \frac{[q_m]}{L^3}$

LA DIVERGENZA INTRODUCE UNA DERIVATA SPAZIALE, QUINDI UNA DIVISIONE PER UNA LUNGHEZZA, QUINDI $[\nabla\cdot\bar{B}] = \frac{[B]}{L}$

ALLORA DA $\nabla\cdot\bar{B} = \mu_0\rho_m$ $\Rightarrow$ DIMENSIONALMENTE $\frac{[B]}{L} = [\mu_0][\rho_m] = [\mu_0]\frac{[q_m]}{L^3}$

DA CUI $[q_m] = \frac{[B]\,L^2}{[\mu_0]}$

SOSTITUENDO CON LE UNITÁ DEL SI, $[B] = T = \frac{N}{A\cdot m}$

$[\mu_0] = \frac{N}{A^2}$

DA CUI $[q_m] = \frac{(N/A\cdot m)\,m^2}{N/A^2} = A\cdot m = \frac{C\cdot m}{s}$

b) DETERMINARE LA FORZA CHE SI SCAMBIEREBBERO DUE CARICHE MAGNETICHE PUNTIFORMI

CONVIENE DIVIDERE IN DUE PASSAGGI:
1. TROVO IL CAMPO MAGNETICO PRODOTTO DA UNA CARICA MAGNETICA PUNTIFORME
2. DA QUEL CAMPO RICAVO LA FORZA SULLA SECONDA CARICA

PER TROVARE IL CAMPO MAGNETICO, USO LA LEGGE DI GAUSS

$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = \mu_0 Q_m^{int}$ DOVE

$\oint_S$ INTEGRALE ESTESO A UNA SUPERFICIE CHIUSA S

$d\bar{S}$ ELEMENTO INFINITESIMO DI SUPERFICIE, DIRETTO LUNGO LA NORMALE USCENTE

$\bar{B} \cdot d\bar{S}$ FLUSSO INFINITESIMO DI $\bar{B}$ ATTRAVERSO L'ELEMENTO DI SUPERFICIE

Q_m^{int} CARICA MAGNETICA TOTALE RACCHIUSA ALL'INTERNO DELLA SUPERFICIE CHIUSA

$\Downarrow$

DICE CHE IL FLUSSO TOTALE DEL CAMPO MAGNETICO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE CHIUSA È PROPORZIONALE ALLA CARICA MAGNETICA RACCHIUSA

SE LA SORGENTE È UNA CARICA MAGNETICA PUNTIFORME POSTA NELL'ORIGINE, IL PROBLEMA HA SIMMETRIA SFERICA

$\Rightarrow$ $\bar{B}$ DEVE ESSERE DIRETTO RADIALMENTE

DEVE DIPENDERE DALLA DISTANZA r DALL'ORIGINE

$\hookrightarrow$ $\bar{B}(\bar{r}) = B(r)\hat{r}$

SCELGO COME SUPERFICIE GAUSSIANA UNA SFERA CENTRATA SULLA CARICA

$\rightarrow$ SULLA SFERA, IL MODULO DEL CAMPO È COSTANTE, PERCHÉ TUTTI I PUNTI SONO ALLA STESSA DISTANZA DALL'ORIGINE

INOLTRE IL CAMPO È RADIALE, QUINDI PARALLELO AL VERSORE NORMALE ALLA SUPERFICIE $\Rightarrow$ $\bar{B} \cdot d\bar{S} = B(r)dS$

QUINDI IL FLUSSO TOTALE È $\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = B(r) \underbrace{\oint dS}_{\text{AREA DELLA SFERA DI RAGGIO } r} \overset{!}{=} 4\pi r^2 B(r)$

LA CARICA MAGNETICA INTERNA È q_m $\Rightarrow$ $4\pi r^2 B(r) = \mu_0 q_m$

DA CUI $B(r) = \dfrac{\mu_0 q_m}{4\pi r^2}$ $\Rightarrow$ $\bar{B}(\bar{r}) = \dfrac{\mu_0 q_m}{4\pi r^2}\hat{r}$

ORA CONSIDERO UNA SECONDA CARICA MAGNETICA PUNTIFORME POSTA A DISTANZA r DALLA PRIMA

IN GENERALE, ESISTE UN CORRISPETTIVO DELLE CARICHE MAGNETICHE DELLA FORZA DI COULOMB $\Rightarrow$ UNA CARICA q_m SUBISCE UNA FORZA $F_m = q_m B$

IL CAMPO PRODOTTO DALLA PRIMA CARICA NEL PUNTO IN CUI SI TROVA LA SECONDA È $\bar{B}_1 = \dfrac{\mu_0 q_{m1}}{4\pi r^2}\hat{r}$ $\Rightarrow$ LA FORZA SUL SECONDO È $\bar{F}_{12} = q_{m2}\bar{B}_1 \overset{!}{=} q_{m2}\dfrac{\mu_0 q_{m1}}{4\pi r^2}\hat{r}$

$\downarrow$

RISULTATO ANALOGO ALLA FORZA DI COULOMB, SE $q_{m1} q_{m2} > 0$ LA FORZA È REPULSIVA, ALTRIMENTI È ATTRATTIVA

c) CONSIDERARE UN FASCIO DI MONOPOLI MAGNETICI

IL FASCIO É UN CILINDRO DI RAGGIO a, DENSITÁ UNIFORME n E OGNI PARTICELLA HA CARICA q_m

n É IL NUMERO DI PARTICELLE PER UNITÁ DI VOLUME
LA DENSITÁ DI CARICA MAGNETICA É $\rho_m = n q_m$ → VALE ALL'INTERNO DEL FASCIO $r<a$
↓
ALL'ESTERNO DEL FASCIO NON CI SONO MONOPOLI, QUINDI $\rho_m = 0$ $r>a$

CONSIDERIAMO ORA LA DENSITÁ DI CORRENTE MAGNETICA (QUANTITÁ DI CARICA MAGNETICA CHE ATTRAVERSA UNA SUPERFICIE UNITARIA NELL'UNITÁ DI TEMPO); SE TUTTE LE PARTICELLE SI MUOVONO A VELOCITÁ $\bar{v}$, SI HA $\bar{J}_m = \rho_m \bar{v} \stackrel{!}{=} n q_m \bar{v}$

ORA, IL SISTEMA É:
- INVARIANTE PER TRASLAZIONI LUNGO z, PERCHÉ IL CILINDRO É INFINITO
- INVARIANTE PER ROTAZIONI ATTORNO A z, PERCHÉ LA DISTRIBUZIONE É CILINDRICAMENTE SIMMETRICA
- UNIFORME IN OGNI DIREZIONE AZIMUTALE

⇒ IL CAMPO DIPENDERÁ DALLA SOLA DISTANZA r DALL'ASSE

PER DETERMINARE $\bar{B}$ USO SEMPRE LA LEGGE DI GAUSS, APPLICATA A UN CILINDRO COASSIALE AL FASCIO DI RAGGIO r E LUNGHEZZA L

LA SUPERFICIE DEL CILINDRO É COMPOSTA DA:
- SUPERFICIE LATERALE
- BASE INFERIORE
- BASE SUPERIORE

→ · SULLE BASI, $\bar{B}\cdot d\bar{S} = 0$ PERCHÉ $d\bar{S}$ É PARALLELO ALL'ASSE z (DIRETTO $\pm\hat{z}$) MENTRE $\bar{B}$ É RADIALE, OVVERO DIRETTO COME $\hat{r}$: $\hat{r} \perp \hat{z} \Rightarrow \bar{B}\cdot d\bar{S} = 0$

· SULLA SUP. LATERALE, IL VETTORE NORMALE USCENTE É RADIALE, QUINDI $/\!/ \bar{B}$ INOLTRE A r FISSATO, $B(r)$ É COSTANTE SU TUTTA LA SUPERFICIE LATERALE

$$\rightarrow \oint_S \bar{B}\cdot d\bar{S} = B(r) \oint dS \stackrel{!}{=} 2\pi r L \, B(r)$$

SE IL CILINDRO GAUSSIANO HA RAGGIO $r<a$, RACCHIUDE SOLO UNA PARTE DEL FASCIO → LA Q_m^{inc} É LA DENSITÁ DI CARICA PER IL VOLUME RACCHIUSO
$Q_m^{inc} = \rho_m \pi r^2 L$

$$\Rightarrow B(r)\, 2\pi r L = \mu_0 \rho_m \pi r^2 L \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 \rho_m}{2} r = \frac{\mu_0 n q_m}{2} r \qquad r<a$$

SE INVECE $r>a$, ALLORA RACCHIUDE TUTTO IL FASCIO, OVVERO TUTTA LA CARICA CONTENUTA NEL CILINDRO DI RAGGIO a E LUNGHEZZA L ⇒ $Q_m^{inc} = \rho_m \pi a^2 L$

$$\Rightarrow B(r)\, 2\pi r L = \mu_0 \rho_m \pi a^2 L \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 \rho_m a^2}{2r} = \frac{\mu_0 n q_m a^2}{2r} \qquad r \geq a$$

PER TROVARE IL CAMPO ELETTRICO, USO L'EQUAZIONE $\nabla \times \bar{E} = -\mu_0 \bar{J}_m - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$

DOVE $\partial_t \bar{B} = 0$ PERCHÉ STIAMO CONSIDERANDO UN FASCIO STAZIONARIO

ORA, DATO CHE $\bar{J}_m$ É LUNGO L'ASSE z, IL CAMPO ELETTRICO DEVE AVERE LINEE CHIUSE ATTORNO ALL'ASSE PER SIMMETRIA
$\Rightarrow$ $\bar{E}$ É DIRETTO LUNGO $\hat{\phi}$, CIOÉ TANGENTE ALLE CIRCONFERENZE CENTRATE SULL'ASSE $\bar{E} = E(r)\hat{\phi}$ IL MODULO DIPENDE DA r PER SIMMETRIA

$\oint_\Gamma \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\mu_0 I_m^{inc}$ LA CIRCUITAZIONE DEL CAMPO ELETTRICO LUNGO UNA LINEA CHIUSA Γ É PROPORZIONALE ALLA CORRENTE MAGNETICA TOTALE CONCATENATA A QUELLA LINEA

$\oint_\Gamma$ INTEGRALE LUNGO LA LINEA CHIUSA
$d\bar{l}$ ELEMENTO INFINITESIMO DI LINEA TANGENTE ALLA CURVA
I_m^{inc} CORRENTE MAGNETICA CHE ATTRAVERSA UNA SUPERFICIE DELIMITATA DALLA CURVA

SCELGO COME LINEA Γ UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO r CENTRATA SULL'ASSE DEL FASCIO
$\rightarrow$ SICCOME $\bar{E}$ É TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA E COSTANTE IN MODULO SU DI ESSA $\oint_\Gamma \bar{E} \cdot d\bar{l} = E(r)\, 2\pi r$

SE $r<a$, LA CORRENTE MAGNETICA RACCHIUSA É LA DENSITÁ DI CORRENTE PER L'AREA DEL DISCO DI RAGGIO r
$\rightarrow$ $I_m^{inc} = J_m \pi r^2 \overset{!}{=} \rho_m v \pi r^2$
$\Rightarrow E(r)\, 2\pi r = -\rho_m v \pi r^2 \mu_0 \Rightarrow E(r) = -\frac{\mu_0 \rho_m v}{2} r \quad r<a$

SE $r \geq a$, ALLORA LA LINEA CHIUSA RACCHIUDE TUTTA LA CORRENTE MAGNETICA DEL FASCIO $\Rightarrow$ L'AREA CHE CONTA É IL DISCO DI AREA a
$\Rightarrow$ $I_m^{inc} = J_m \pi a^2 \overset{!}{=} \rho_m v \pi a^2$
$\Rightarrow E(r) = -\frac{\mu_0 \rho_m v}{2r} a^2 \quad r \geq a$