ESERCITAZIONI FED

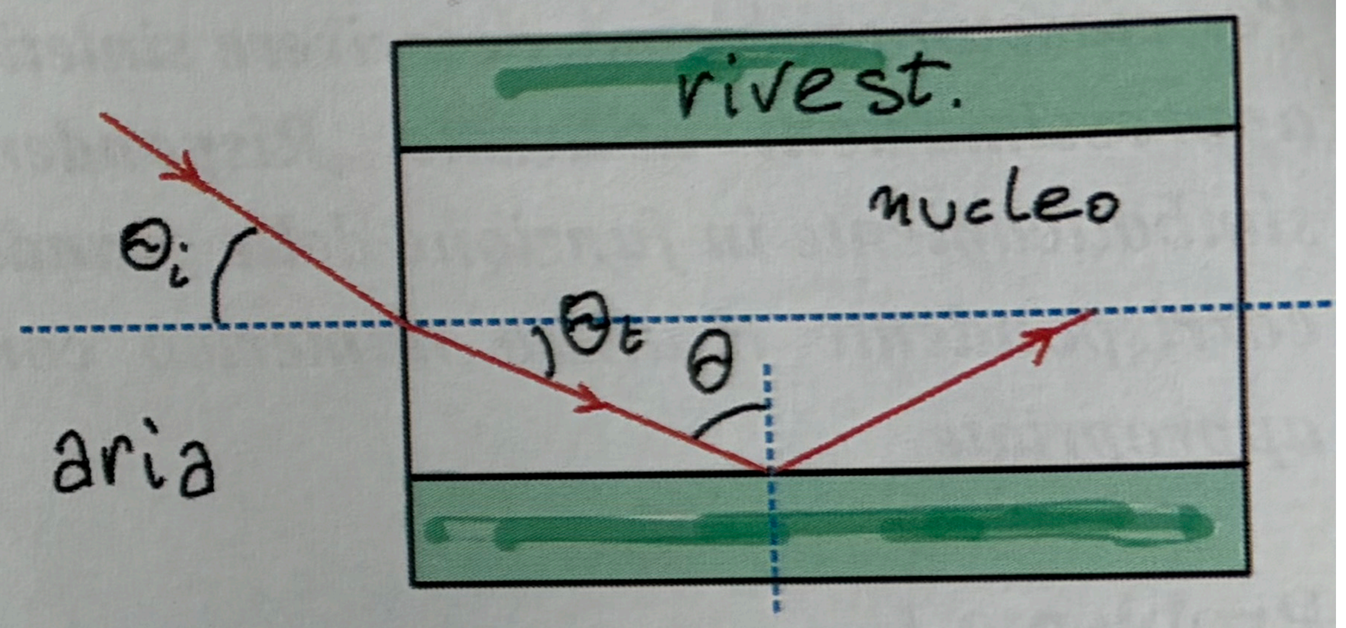
QUARTA ESERCITAZIONE

02-04-2026

Problema 3 del 13-02-2024

Problema 3

Una fibra ottica è costituita da un nucleo di indice di rifrazione $n_i = 1.40$ e da un rivestimento di indice di rifrazione $n_c = 1.10$. Con riferimento alla figura, determinare:



a) l'angolo critico θ_C di riflessione interna totale per un raggio luminoso che incida dal nucleo sul rivestimento;

b) l'angolo di massima accettanza $\theta_i = \theta_M$ per un raggio luminoso che incida dall'aria ($n_{aria} = 1.00$) sul nucleo della fibra.

Problema 2 del 13-02-2024

Problema 2

Un'onda elettromagnetica piana che si propaga lungo l'asse z, descritta da $U_1 = A_1 e^{-ikz}$, interferisce nel piano $z = d$ con una seconda onda elettromagnetica descritta da $U_2 = \frac{A_2}{z} e^{-ikz} e^{-ik\frac{(x^2+y^2)}{2z}}$, dove $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$. Determinare:

esplicita

a) l'espressione dell'irradianza totale nel piano $z = d$. e meno di costanti di proporzionalità

Si supponga ora che $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ con $A_1 = A_2/d = A$. Determinare:

b) il luogo dei punti, nel piano $z = d$, dove l'irradianza è nulla;

c) se il risultato trovato in b) continua a valere quando $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$.

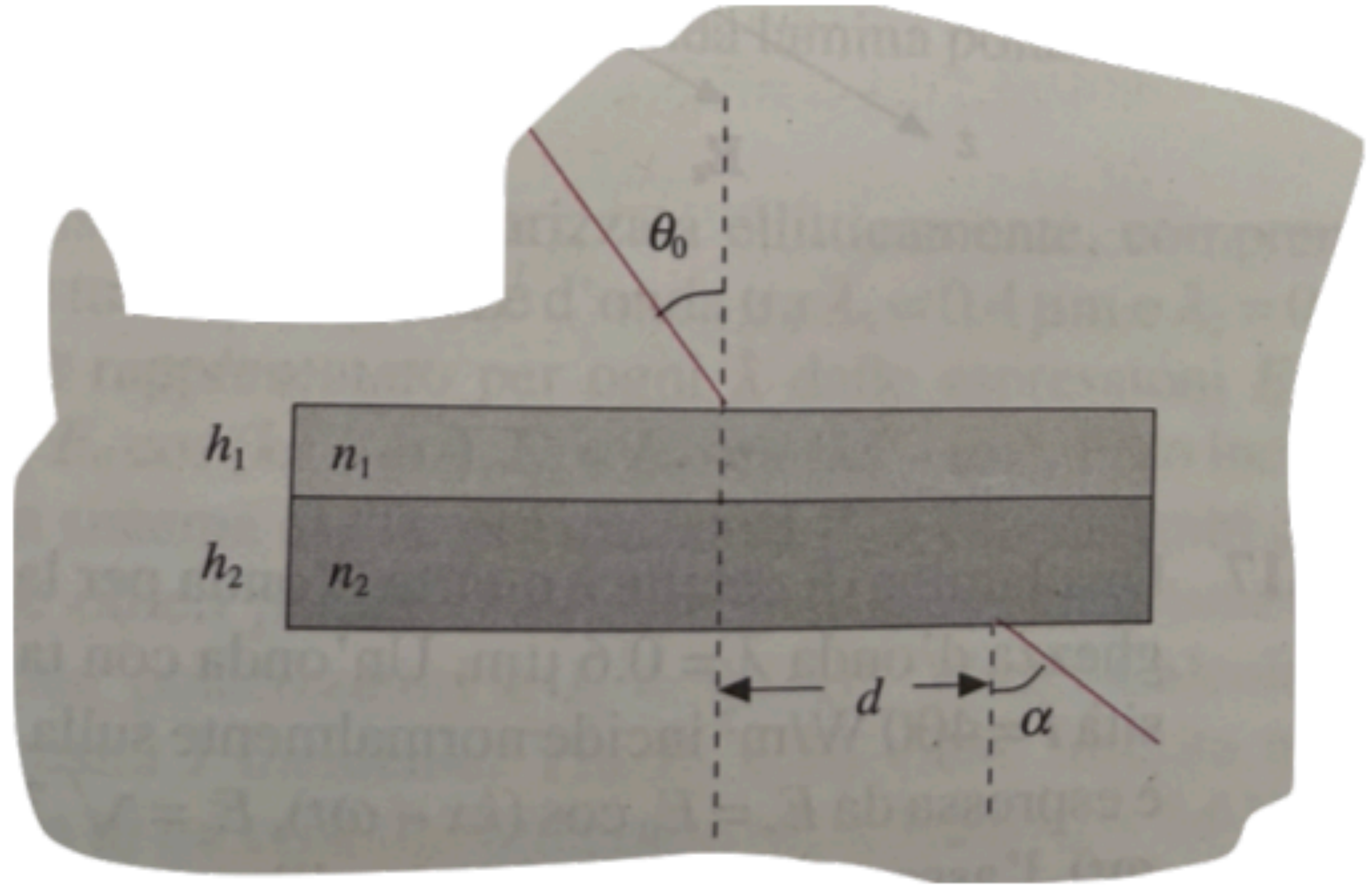
Problema 3 del 13-07-2022

Problema 3

Un fascio luminoso incide con angolo di incidenza $\theta_0 = 30°$ su un sistema ottico formato da due lastre di vetro piane e parallele in contatto fra loro. Le lastre hanno spessori $h_1 = 0.080$ m e $h_2 = 0.12$ m e indici di rifrazione $n_1 = 1.2$ e $n_2 = 1.5$, rispettivamente. Determinare:

a) la direzione α e la distanza d dal punto di incidenza alla quale il fascio esce dalla seconda lastra;

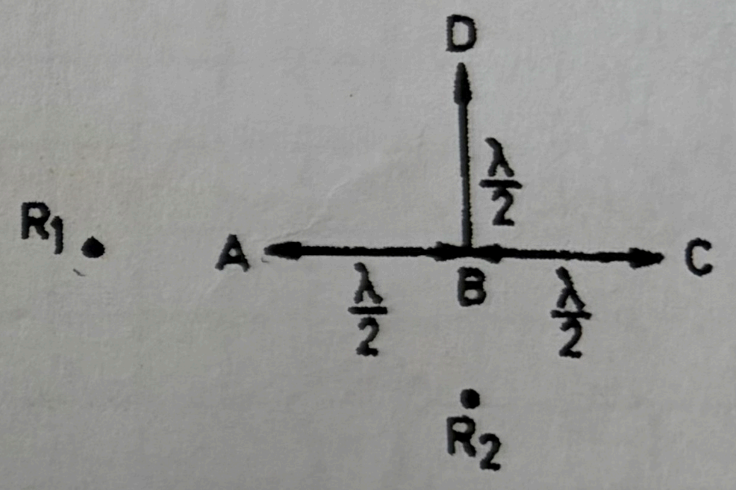
b) per quali valori dell'angolo θ_0 il fascio non emerge dalla seconda lastra.



Problema 1 del 30-01-2024

Problema 2

Quattro identiche sorgenti di onde elettromagnetiche monocromatiche, A, B, C, D, che emettono alla medesima lunghezza d'onda λ, sono posizionate come in figura, distanti fra loro $\lambda/2$. Due ricevitori, R_1 e R_2, sono posti, come in figura, alla medesima distanza L da B, con $L \gg \lambda$. Si supponga che, in corrispondenza dei ricevitori, il campo elettrico dell'onda incidente abbia la forma di un'onda piana di ampiezza E_0. Determinare:



a) quale dei due ricevitori misura il segnale più intenso;

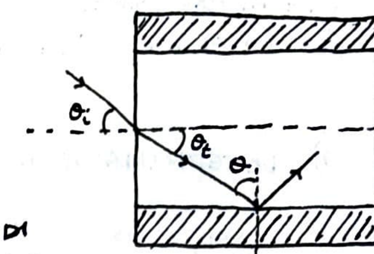
b) quale dei due ricevitori misura il segnale più intenso se la sorgente B è spenta;

c) quale dei due ricevitori misura il segnale più intenso se la sorgente D è spenta;

d) quale dei due ricevitori può stabilire quale delle due sorgenti, B o D, è stata spenta.

ESERCITAZIONE 4.

PROBLEMA 3. DEL 13/02/2024



FIBRA OTTICA CON NUCLEO DI INDICE DI RIFRAZIONE $n_i = 1.40$
E RIVESTIMENTO DI INDICE DI RIFRAZIONE $n_c = 1.10$

↳ UNA FIBRA OTTICA GUIDA LA LUCE NEL SUO NUCLEO GRAZIE ALLA RIFLESSIONE INTERNA TOTALE
→ AVVIENE SE :
- LA LUCE PASSA DA UN MEZZO CON INDICE DI RIFRAZIONE MAGGIORE A UNO CON INDICE DI RIFRAZIONE MINORE
- L'ANGOLO DI INCIDENZA SULLA SUPERFICIE DI SEPARAZIONE É MAGGIORE DI UN CERTO ANGOLO CRITICO

a) DETERMINARE L'ANGOLO CRITICO DI RIFLESSIONE INTERNA TOTALE

L'ANGOLO CRITICO θ_c É DEFINITO COME L'ANGOLO DI INCIDENZA, MISURATO RISPETTO ALLA NORMALE ALLA SUPERFICIE NUCLEO-RIVESTIMENTO, PER CUI IL RAGGIO RIFRATTO NEL RIVESTIMENTO EMERGE RADENTE ALLA SUPERFICIE (CON ANGOLO DI RIFRAZIONE PARI A 90°)

APPLICANDO LA LEGGE DI SNELL TRA NUCLEO E RIVESTIMENTO,

$n_i \sin\theta_c = n_c \sin\theta'$ CON $\theta' = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ $n_i \sin\theta_c = n_c$

$\sin\theta_c = \frac{n_c}{n_i} = \frac{1.10}{1.40} \simeq 0.78$ $\Rightarrow$ $\theta_c = \arcsin(0.78) \simeq 51.8°$

b) DETERMINARE L'ANGOLO DI MASSIMA ACCETTANZA $\theta_i = \theta_M$ PER UN RAGGIO LUMINOSO CHE INCIDA DALL'ARIA ($n_{aria} = 1.00$)

SE θ_t É L'ANGOLO DEL RAGGIO NEL NUCLEO RISPETTO ALL'ASSE ORIZZONTALE DELLA FIBRA, ALLORA L'ANGOLO DI INCIDENZA SULLA PARETE ORIZZONTALE RISPETTO ALLA NORMALE VALE $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta_t$

LA CONDIZIONE LIMITE DI ACCETTANZA MASSIMA É QUELLA PER CUI IL RAGGIO INCIDE ALL'ANGOLO CRITICO $\theta = \theta_c$

DA CUI $\theta_t = \frac{\pi}{2} - \theta_c$

ORA APPLICHIAMO LA LEGGE DI SNELL ALL'INTERFACCIA ARIA-NUCLEO

$n_{aria} \sin\theta_M = n_i \sin\theta_t$ $\Rightarrow$ $\sin\theta_M = n_i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_c\right)$

$\sin\theta_M = n_i \cos(\theta_c)$

MA $\sin\theta_c = \frac{n_c}{n_i}$ $\Rightarrow$ $\cos\theta_c = \sqrt{1-\sin^2\theta_c} \overset{!}{=} \sqrt{1-\left(\frac{n_c}{n_i}\right)^2}$

DA CUI $\sin\theta_M = n_i \sqrt{1-\left(\frac{n_c}{n_i}\right)^2} \simeq 0.86$ $\Rightarrow$ $\theta_M \simeq 60°$

PROBLEMA 2. DEL 13/02/2024

UN'ONDA ELETTROMAGNETICA PIANA CHE SI PROPAGA LUNGO L'ASSE z, DESCRITTA DA $U_1 = A_1 \exp(-ikz)$, INTERFERISCE NEL PIANO $z=d$ CON UNA SECONDA ONDA EM DESCRITTA DA $U_2 = \frac{A_2}{z} \exp(-ikz) \exp\left[\frac{-ik(x^2+y^2)}{2z}\right]$, DOVE $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$

a) DETERMINARE L'ESPRESSIONE DELL'IRRADIANZA TOTALE NEL PIANO $z=d$

NEL PIANO $z=d$ I DUE CAMPI DIVENTANO

$$U_1(x,y,d) = A_1 \exp(-ikd)$$
$$U_2(x,y,d) = \frac{A_2}{d} \exp(-ikd) \exp\left[\frac{-ik(x^2+y^2)}{2d}\right]$$

IL CAMPO TOTALE É QUINDI

$$U(x,y,d) = U_1(x,y,d) + U_2(x,y,d) = \exp(-ikd)\left[A_1 + \frac{A_2}{d}\exp\left[\frac{-ik(x^2+y^2)}{2d}\right]\right]$$

ORA, L'IRRADIANZA É PROPORZIONALE AL MODULO QUADRO DEL CAMPO TOTALE

$$I(x,y,d) \propto |U(x,y,d)|^2$$
$$= U^*(x,y,d)\, U(x,y,d)$$
$$= \exp(ikd)\left[A_1^* + \frac{A_2^*}{d}\exp\left[\frac{ik(x^2+y^2)}{2d}\right]\right] \cdot \exp(-ikd)\left[A_1 + \frac{A_2}{d}\exp\left[\frac{-ik(x^2+y^2)}{2d}\right]\right]$$
$$= A_1^*A_1 + \frac{A_1^*A_2}{d}\exp\left[\frac{-ik(x^2+y^2)}{2d}\right] + \frac{A_2^*A_1}{d}\exp\left[\frac{ik(x^2+y^2)}{2d}\right] + \frac{A_2^*A_2}{d^2}$$
$$= |A_1|^2 + \frac{|A_2|^2}{d^2} + \underbrace{\frac{A_1^*A_2}{d}\exp\left[\frac{-ik(x^2+y^2)}{2d}\right] + \frac{A_2^*A_1}{d}\exp\left[\frac{ik(x^2+y^2)}{2d}\right]}_{\text{QUESTI DUE TERMINI SONO UNO IL COMPLESSO CONIUGATO DELL'ALTRO}}$$
$$= |A_1|^2 + \frac{|A_2|^2}{d^2} + \frac{2}{d}\mathrm{Re}\left\{A_1^*A_2 \exp\left[\frac{-ik(x^2+y^2)}{2d}\right]\right\}$$

→ L'IRRADIANZA É DATA DA 3 CONTRIBUTI:
- $|A_1|^2$ DOVUTO ALLA PRIMA ONDA
- $|A_2|^2/d^2$ DOVUTO ALLA SECONDA ONDA
- IL TERMINE DI INTERFERENZA, CHE DIPENDE DALLA FASE RELATIVA TRA LE DUE ONDE

b) DETERMINARE NEL PIANO $z=d$ IL LUOGO DEI PUNTI IN CUI L'IRRADIANZA É NULLA

$A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ CON $A_1 = \frac{A_2}{d} = A$

$$I(x,y,d) \propto A^2 + A^2 + 2A^2\,\mathrm{Re}\left\{\exp\left[\frac{-ik(x^2+y^2)}{2d}\right]\right\}$$
$$= 2A^2\left[1 + \cos\left(\frac{k(x^2+y^2)}{2d}\right)\right]$$

L'IRRADIANZA È NULLA NEI PUNTI (x,y) t.c $I(x,y,d)=0$

OVVERO $1+\cos\left(\frac{K}{2d}(x^2+y^2)\right)=0$

$$\cos\left(\frac{K}{2d}(x^2+y^2)\right)=-1$$

MA, IN GENERALE, $\cos\theta=-1 \iff \theta=(2n+1)\pi \quad n=0,1,2,\dots \quad n\in\mathbb{Z}$

DA CUI $\frac{K}{2d}(x^2+y^2)=(2n+1)\pi$ FAMIGLIA DI CIRCONFERENZE CONCENTRICHE DI RAGGIO r

~~[illegible]~~ PONIAMO $r^2=x^2+y^2 \Rightarrow \frac{K}{2d}r^2=(2n+1)\pi$

$$r=\sqrt{\frac{2d}{K}(2n+1)\pi}$$

→ L'INTENSITÀ SI ANNULLA QUANDO LE DUE ONDE ARRIVANO CON UGUALE AMPIEZZA E CON DIFFERENZA DI FASE PARI A UN MULTIPLO DISPARI DI π, CIOÈ IN OPPOSIZIONE DI FASE

→ IN QUEI PUNTI SI HA INTERFERENZA DISTRUTTIVA ; POICHÉ LA FASE DIPENDE SOLO DA x^2+y^2, TALI PUNTI FORMANO DELLE CIRCONFERENZE CONCENTRICHE

c) DETERMINARE SE IL RISULTATO PRECEDENTE VALE SE $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$

$A_1=\frac{A_2}{d}=A \quad , \quad A_1, A_2 \in \mathbb{C}$

$$I(x,y,d) \propto |A|^2+|A|^2+2|A|^2\,\mathrm{Re}\left\{\exp\left[\frac{-iK(x^2+y^2)}{2d}\right]\right\}$$

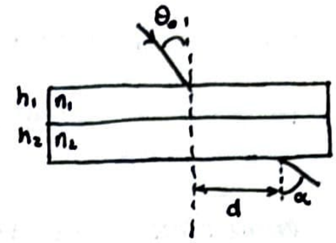
$$= 2|A|^2\left[1+\cos\left(\frac{K(x^2+y^2)}{2d}\right)\right]$$

→ LA FASE DI A COMPARE SOLO COME FATTORE GLOBALE E NON MODIFICA I PUNTI IN CUI L'IRRADIANZA SI ANNULLA

PROBLEMA 3. DEL 13/07/2022

UN FASCIO LUMINOSO INCIDE CON ANGOLO DI INCIDENZA $\theta_0 = 30°$ SU UN SISTEMA OTTICO FORMATO DA DUE LASTRE DI VETRO PIANE E PARALLELE IN CONTATTO FRA LORO

a) DETERMINARE LA DIREZIONE α E LA DISTANZA d DAL PUNTO DI INCIDENZA ALLA QUALE IL FASCIO ESCE DALLA SECONDA LASTRA



DEF. θ_1 ANGOLO DEL RAGGIO NELLA PRIMA LASTRA
E θ_2 ANGOLO DEL RAGGIO NELLA SECONDA LASTRA

APPLICHIAMO LA LEGGE DI SNELL (ARIA - VETRO)
$n_{aria} \sin\theta_0 = n_1 \sin\theta_1 \Rightarrow \sin\theta_1 = \dfrac{\sin\theta_0}{n_1} = 0.42$

$\Rightarrow \theta_1 = \arcsin(0.42) \approx 24.6°$

TRA I DUE VETRI LA LEGGE DI SNELL É $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$
DA CUI $\sin\theta_2 = \dfrac{n_1}{n_2} \sin\theta_1 = 0.33 \Rightarrow \theta_2 = \arcsin(0.33) \simeq 19.5°$

ALL'USCITA DALLA SECONDA LASTRA, SNELL DÁ $n_2 \sin\theta_2 = n_{aria} \sin\alpha$
DA CUI $\sin\alpha = n_2 \sin\theta_2 \Rightarrow \alpha = 30°$

LA DISTANZA d É LO SPOSTAMENTO TOTALE ORIZZONTALE TRA LA VERTICALE PASSANTE PER IL PUNTO DI INCIDENZA E IL PUNTO DI USCITA DALLA SECONDA LASTRA

→ NEL PRIMO STRATO LO SPOSTAMENTO ORIZZONTALE É
$d_1 = h_1 \tan\theta_1$
NEL SECONDO STRATO É $d_2 = h_2 \tan\theta_2$

DA CUI LO SPOSTAMENTO TOTALE É $d \overset{!}{=} d_1 + d_2 = h_1 \tan\theta_1 + h_2 \tan\theta_2 = 0.079$ m

b) PER QUALI VALORI DI θ_0 IL FASCIO NON EMERGE DALLA SECONDA LASTRA?

AFFINCHÉ IL RAGGIO NON EMERGA DALLA SECONDA LASTRA, DEVE VERIFICARSI RIFLESSIONE INTERNA TOTALE ALL'INTERFACCIA $n_2 \to$ aria

↳ LA CONDIZIONE É CHE L'ANGOLO DI INCIDENZA NELLA SECONDA LASTRA SIA MAGGIORE DELL'ANGOLO CRITICO θ_c, DEFINITO DA $\sin\theta_c = \dfrac{n_{aria}}{n_2} = \dfrac{1}{n_2}$

DA CUI $\theta_c = \arcsin(1/n_2) \approx 41.8°$
→ AFFINCHÉ IL RAGGIO NON EMERGA DEVE ESSERE $\theta_2 > \theta_c$

ORA, POICHÉ IL RAGGIO É ENTRATO DALL'ARIA NELLA SECONDA LASTRA PASSANDO ATTRAVERSO SUPERFICI PARALLELE, VALE $n_2 \sin\theta_2 = \sin\theta_0$
$\Rightarrow \sin\theta_2 = \dfrac{\sin\theta_0}{n_2}$

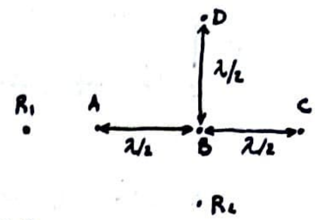
MA SICCOME $\sin\theta_0 \leq 1$, SI HA SEMPRE $\sin\theta_2 \leq \dfrac{1}{n_2}$

QUINDI $\theta_2 \leq \arcsin\left(\dfrac{1}{n_2}\right) = \theta_c \Rightarrow$ NON CI SONO VALORI DI θ_0 PER CUI IL FASCIO EMERGE DALLA SECONDA LASTRA

PROBLEMA 2. DEL 30/01/2014

QUATTRO SORGENTI COERENTI A, B, C, D EMETTONO ONDE MONOCROMATICHE DI LUNGHEZZA D'ONDA λ E SONO DISPOSTE A DISTANZA $\lambda/2$

DUE RICEVITORI R_1 E R_2 SONO A DISTANZA L DA B, CON $L \gg \lambda$



a) DETERMINARE QUALE DEI DUE RICEVITORI MISURA IL SEGNALE PIÙ INTENSO

TRASCURANDO LA DIPENDENZA TEMPORALE, IL CAMPO PRODOTTO DA UNA SORGENTE A DISTANZA R SI SCRIVE COME $E = E_0 \exp(ikR)$

PONIAMO $B = (0,0)$ $\quad A = \left(-\frac{\lambda}{2}, 0\right)$ $\quad C = \left(\frac{\lambda}{2}, 0\right)$ $\quad D = \left(0, \frac{\lambda}{2}\right)$

$R_1 = (-L, 0)$ $\quad R_2 = (0, -L)$

QUINDI LE DISTANZE DELLE SORGENTI DA R_1 SONO

$R_A = L - \frac{\lambda}{2}$ $\quad R_B = L$ $\quad R_C = L + \frac{\lambda}{2}$ $\quad R_D = \sqrt{L^2 + \frac{\lambda^2}{4}}$

E I CAMPI DELLE SINGOLE SORGENTI: $E_A(R_1) = E_0 \exp\left[ik\left(L - \frac{\lambda}{2}\right)\right]$

$$E_B(R_1) = E_0 \exp(ikL)$$
$$E_C(R_1) = E_0 \exp\left[ik\left(L + \frac{\lambda}{2}\right)\right]$$
$$E_D(R_1) = E_0 \exp\left[ik\sqrt{L^2 + \frac{\lambda^2}{4}}\right]$$

DA CUI IL CAMPO TOTALE SUL RICEVITORE R_1 É

$$E_{R_1} = E_0\left[\exp\left[ik\left(L - \frac{\lambda}{2}\right)\right] + \exp(ikL) + \exp\left[ik\left(L + \frac{\lambda}{2}\right)\right] + \exp\left[ik\sqrt{L^2 + \frac{\lambda^2}{4}}\right]\right]$$

PER $L \gg \lambda$, $\sqrt{L^2 + \frac{\lambda^2}{4}} = L\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{4L^2}} \simeq L\left(1 + \frac{\lambda^2}{8L^2}\right) \simeq L$

DA CUI $E_{R_1} = E_0 \exp(ikL)\left[\exp\left(-\frac{ik\lambda}{2}\right) + 1 + \exp\left(\frac{ik\lambda}{2}\right) + 1\right]$

MA $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ E $\exp(\pm i\pi) = -1$

QUINDI $E_{R_1} = E_0 \exp(ikL)\left[\exp(-i\pi) + 1 + \exp(i\pi) + 1\right] = 0$

CONSIDERIAMO ORA IL RICEVITORE R_2

LE DISTANZE DELLE SORGENTI DA R_2 SONO

$R_A = \sqrt{L^2 + \frac{\lambda^2}{4}}$ $\quad R_B = L$ $\quad R_C = \sqrt{L^2 + \frac{\lambda^2}{4}}$ $\quad R_D = L + \frac{\lambda}{2}$

IL CAMPO TOTALE É QUINDI

$$E_{R2} = E_0\left[\exp\left[ik\sqrt{L^2+\frac{\lambda^2}{4}}\right] + \exp(ikL) + \exp\left[ik\sqrt{L^2+\frac{\lambda^2}{4}}\right] + \exp\left[ik\left(L+\frac{\lambda}{2}\right)\right]\right]$$

$$\overset{L\gg\lambda}{\approx} E_0\exp(ikL)\left[1+1+1+\exp\left(ik\frac{\lambda}{2}\right)\right]$$

$$\overset{e^{i\pi}=-1}{=} 2E_0\exp(ikL)$$

ORA, L'INTENSITÁ É PROPORZIONALE AL MODULO QUADRO DEL CAMPO

$$I = \frac{\varepsilon_0 c}{2}|E|^2$$

QUINDI IN R_1, $I_1 = 0$

IN R_2, $I_2 = \frac{\varepsilon_0 c}{2}4E_0^2 = 2\varepsilon_0 c E_0^2$ $\rightarrow$ IL RICEVITORE CHE MISURA IL SEGNALE PIÚ INTENSO É R_2

b) QUALE DEI DUE RICEVITORI MISURA IL SEGNALE PIÚ INTENSO SE LA SORGENTE B É SPENTA

SE B É SPENTA, IL SUO CONTRIBUTO VA ELIMINATO

IN R_1, $E_{R1} \approx E_0\left[\exp\left[ik\left(L-\frac{\lambda}{2}\right)\right] + \exp\left[ik\left(L+\frac{\lambda}{2}\right)\right] + \exp(ikL)\right]$

$$\overset{e^{i\pi}=-1}{=} E_0\exp(ikL)[-1-1+1] = -E_0\exp(ikL)$$

IN R_2, $E_{R2} \approx E_0\left[\exp(ikL)+\exp(ikL)+\exp\left[ik\left(L+\frac{\lambda}{2}\right)\right]\right]$

$$= E_0\exp(ikL)[1+1-1] = E_0\exp(ikL)$$

E LE RISPETTIVE IRRADIANZE SONO $I_1 = \frac{\varepsilon_0 c}{2}E_0^2$

$I_2 = \frac{\varepsilon_0 c}{2}E_0^2$ $\Rightarrow$ I DUE RICEVITORI RICEVONO LA STESSA INTENSITÁ

c) SE LA SORGENTE D É SPENTA

IN R_1, $E_{R1} \approx E_0\exp(ikL)\left[\exp\left(-\frac{i\lambda k}{2}\right) + 1 + \exp\left(\frac{ik\lambda}{2}\right)\right]$

$$= E_0\exp(ikL)[-1+1-1] = -E_0\exp(ikL)$$

IN R_2, $E_{R2} \approx 3E_0\exp(ikL)$

DA CUI $I_1 = \frac{\varepsilon_0 c}{2}E_0^2$

$I_2 = \frac{\varepsilon_0 c}{2}9E_0^2$ $\Rightarrow$ R_2 RICEVE IL SEGNALE PIÚ INTENSO

d) QUALE DEI DUE RICEVITORI PUÓ STABILIRE QUALE DELLE DUE SORGENTI B O D É SPENTA

PER R_1, $E_{R_1}^{B\,spenta} = -E_0 \exp(ikL)$

$E_{R_1}^{D\,spenta} = -E_0 \exp(ikL)$ $\Rightarrow I_1^{B\,spenta} = I_1^{D\,spenta} = \frac{\varepsilon_0 c}{2} E_0^2$

PER R_2, $E_{R_2}^{B\,spenta} = +E_0 \exp(ikL)$

$E_{R_2}^{D\,spenta} = 3E_0 \exp(ikL)$ $\Rightarrow I_2^{B\,spenta} = \frac{\varepsilon_0 c}{2} E_0^2 \neq I_2^{D\,spenta} = \frac{9}{2} \varepsilon_0 c E_0^2$

R_2 PUÓ STABILIRE QUALE DELLE DUE SORGENTI É SPENTA