ESERCITAZIONI FED

QUINTA ESERCITAZIONE

09-04-2026

Esempio 10.4 del Griffiths

Calcolo dei campi elettrico e magnetico per una carica puntiforme che si muove a velocità costante

Problema 2 del 13-07-2022

Si consideri una carica puntiforme q in moto circolare uniforme, con velocità angolare ω, lungo una circonferenza di raggio R giacente nel piano xy e con centro nell'origine degli assi. Al tempo $t = 0$ la carica è nel punto $(R,0)$. Determinare

a) i potenziali di Lienard-Wiechert per i punti lungo l'asse z

b) i campi elettrico e magnetico nell'origine.

Problema 2 del 07-09-2021

Si consideri una corrente di superficie $K(t)\hat{\mathbf{z}}$ localizzata nel piano yz, che è elettricamente neutro. Determinare i campi elettrici e magnetici ad un'altezza x sopra al piano:

a) nel caso in cui una corrente superficiale di ampiezza $K(t) = K_0$, con K_0 costante, venga accesa all'istante $t = 0$;

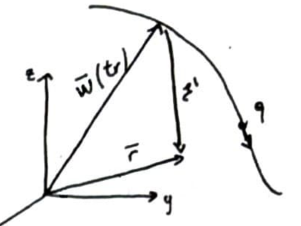
b) nel caso in cui una corrente superficiale di ampiezza $K(t) = \alpha t$, con $\alpha > 0$ e costante, venga accesa all'istante $t = 0$.

Nel caso della domanda b), determinare:

c) la potenza totale irradiata dal piano per unità di superficie.

ESERCITAZIONE 5.

CALCOLO DEI CAMPI ELETTRICO E MAGNETICO PER UNA CARICA IN MOTO A VELOCITÁ COSTANTE



ABBIAMO TROVATO I POTENZIALI DI LIÉNARD - WIECHERT PER UNA CARICA IN MOTO $V(\bar{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qc}{(\text{\r{r}}c - \bar{\text{\r{r}}}\cdot\bar{v})}$, $\bar{v} = \bar{v}(t_r)$ VELOCITÁ DELLA CARICA AL TEMPO RITARDATO

$$\bar{A}(\bar{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qc\bar{v}}{(\text{\r{r}}c - \bar{\text{\r{r}}}\cdot\bar{v})} \overset{!}{=} \frac{\bar{v}}{c^2}V(\bar{r},t)$$

$\bar{\text{\r{r}}}$ VETTORE DALLA POSIZIONE RITARDATA AL PUNTO x_μ DI CAMPO

PER UNA CARICA PUNTIFORME CHE SI MUOVE A VELOCITÁ COSTANTE, LE ESPRESSIONI DEI POTENZIALI DIVENTANO $V(\bar{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qc}{[(c^2t-\bar{r}\cdot\bar{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)]^{1/2}}$

$$\bar{A}(\bar{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qc\bar{v}}{[(c^2t-\bar{r}\cdot\bar{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)]^{1/2}}$$

ORA, LE ESPRESSIONI DEI CAMPI PER UNA CARICA PUNTIFORME IN MOTO VARIO RISULTANO ESSERE $\bar{E}(\bar{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\text{\r{r}}}{(\bar{\text{\r{r}}}\cdot\bar{u})^3}[(c^2-v^2)\bar{u} + \bar{\text{\r{r}}}\times(\bar{u}\times\bar{a})]$, $\bar{u} = c\hat{\text{\r{r}}} - \bar{v}$

$$\bar{B}(\bar{r},t) = \frac{1}{c}\hat{\text{\r{r}}}\times\bar{E}(\bar{r},t)$$

CONSIDERIAMO ORA UNA CARICA CHE SI MUOVE A VELOCITÁ COSTANTE
$\Rightarrow$ $\bar{a} = 0$

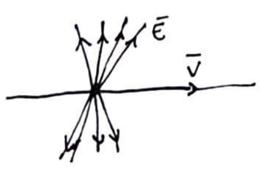
DA CUI $\bar{E}(\bar{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\text{\r{r}}\bar{u}}{(\bar{\text{\r{r}}}\cdot\bar{u})^3}(c^2-v^2)$

USANDO IL FATTO CHE $\bar{w} = \bar{v}t$,
$$\begin{aligned}\text{\r{r}}\bar{u} &\overset{!}{=} \text{\r{r}}(c\hat{\text{\r{r}}} - \bar{v}) \\ &\overset{!}{=} c\bar{\text{\r{r}}} - \bar{v}\text{\r{r}} \\ &\overset{!}{=} c(\bar{r} - \bar{v}t_r) - c(t-t_r)\bar{v} \\ &\overset{!}{=} c(\bar{r} - \bar{v}t) \\ &\overset{!}{=} c\bar{R}\end{aligned}$$
, $\bar{R} = \bar{r} - \bar{v}t$ VETTORE CHE VA DALLA POSIZIONE ATTUALE DELLA CARICA AL PUNTO DI OSSERVAZIONE

INOLTRE, É STATO DIMOSTRATO CHE
$$\bar{\text{\r{r}}}\cdot\bar{u} = [(c^2t-\bar{r}\cdot\bar{v})^2 + (c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)]^{1/2} \overset{!}{=} Rc\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right]^{1/2}$$

DA CUI
$$\bar{E}(\bar{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{c\bar{R}}{R^3c^3\left[\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}\right]^3}(c^2-v^2) \overset{!}{=} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(1-v^2/c^2)}{[1-v^2/c^2\sin^2\theta]^{3/2}}\frac{\hat{R}}{R^2}$$

IL CAMPO ELETTRICO NON PUNTA VERSO LA POSIZIONE RITARDATA, MA VERSO LA POSIZIONE ATTUALE DELLA PARTICELLA



IL CAMPO ELETTRICO DI UNA CARICA PUNTIFORME IN MOTO UNIFORME NON É ISOTROPO: É RIDOTTO LUNGO LA DIREZIONE DEL MOTO E AMPLIFICATO NELLA DIREZIONE PERPENDICOLARE
$\Rightarrow$ EFFETTO PANCAKE

PER IL CAMPO MAGNETICO, $\bar{B}(\bar{r},t) = \frac{1}{c}(\hat{\imath} \times \bar{E})$

ORA, $\hat{\imath} = \frac{\bar{r} - \bar{v}t_r}{\imath} \overset{\pm\bar{v}t}{=} \frac{(\bar{r} - \bar{v}t)}{\imath} + \frac{(t - t_r)\bar{v}}{\imath}$ $\qquad \imath = c(t - t_r)$

$= \frac{\bar{R}}{\imath} + \frac{\bar{v}}{c}$

DA CUI $\bar{B}(\bar{r},t) = \frac{1}{c}\left[\left(\frac{\bar{R}}{\imath} + \frac{\bar{v}}{c}\right) \times \bar{E}\right]$

$= \frac{1}{c^2}(\bar{v} \times \bar{E})$

PROBLEMA 2 DEL 13/07/2022

CARICA PUNTIFORME q IN MOTO CIRCOLARE UNIFORME CON VELOCITÀ ANGOLARE ω LUNGO UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO R ; IN $t=0$ LA CARICA È NEL PUNTO $(R,0)$

a) DETERMINARE I POTENZIALI DI LIENARD-WIECHERT PER I PUNTI LUNGO z

ALL'ISTANTE t LA CARICA È IN $\bar{w}(t) = (R\cos\omega t, R\sin\omega t, 0)$

LA VELOCITÀ È $\bar{v}(t) = \dot{\bar{w}}(t) = (-R\omega\sin\omega t, R\omega\cos\omega t, 0)$

E L'ACCELERAZIONE È $\bar{a}(t) = \dot{\bar{v}}(t) = (-R\omega^2 \cancel{\sin}\cos\omega t, -R\omega^2\sin\omega t, 0)$

ORA, TUTTE LE QUANTITÀ NEI POTENZIALI DI LIENARD-WIECHERT VANNO VALUTATE A TEMPO RITARDATO t_r, DEFINITO COME $t_r = t - \frac{\kappa}{c}$

CONSIDERIAMO UN PUNTO DI OSSERVAZIONE SULL'ASSE z $\bar{r} = (0,0,z)$

$$\bar{\kappa} = \bar{r} - \bar{w}(t_r) = z\hat{z} - R(\cos\omega t\,\hat{x} + \sin\omega t\,\hat{y}) \overset{!}{=} (-R\cos\omega t, -R\sin\omega t, z)$$

E HA MODULO $\kappa = |\bar{\kappa}| = \sqrt{R^2\cos^2\omega t + R^2\sin^2\omega t + z^2} = \sqrt{R^2+z^2}$

DA CUI $t_r = t - \frac{\sqrt{R^2+z^2}}{c}$

ORA, IL POTENZIALE RITARDATO È $V(\bar{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qc}{(\kappa c - \bar{\kappa}\cdot\bar{v})}$

$$\overset{!}{=} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\kappa}\frac{1}{\left(1 - \frac{\hat{\kappa}\cdot\bar{v}}{c}\right)}$$

DOVE $\hat{\kappa}\cdot\bar{v} = \frac{1}{\kappa}(\bar{\kappa}\cdot\bar{v}) = \frac{1}{\kappa}(-R\cos\omega t_r, -R\sin\omega t_r, z)(-R\omega\sin\omega t_r, R\omega\cos\omega t_r, 0)$

$$\overset{!}{=} \frac{1}{\kappa}\left[R^2\omega\cos\omega t_r\sin\omega t_r - R^2\omega\cos\omega t_r\sin\omega t_r\right] = 0$$

DA CUI $V(\bar{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\kappa} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}$

IL POTENZIALE VETTORE RISULTA

$$\bar{A}(\bar{r},t) = \frac{\bar{v}}{c^2} V(\bar{r},t)$$

$$\stackrel{!}{=} -\frac{R\omega q}{4\pi\varepsilon_0 c^2\sqrt{R^2+z^2}}\left[\sin\omega t_r\,\hat{x} - \cos\omega t_r\,\hat{y}\right]$$

b) CALCOLARE IL CAMPO ELETTRICO E MAGNETICO NELL'ORIGINE

ABBIAMO TROVATO $V(\bar{r},t) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}$

$$\bar{A}(\bar{r},t) = -\frac{R\omega q}{4\pi\varepsilon_0 c^2\sqrt{R^2+z^2}}\left[\sin\omega t_r\,\hat{x} - \cos\omega t_r\,\hat{y}\right]$$

CON $t_r = t - \dfrac{\sqrt{R^2+z^2}}{c}$

ORA, ABBIAMO VISTO CHE I CAMPI PER UNA CARICA IN MOTO VARIO HANNO L'ESPRESSIONE $\bar{E}(\bar{r},t) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\imath}{(\bar{\imath}\cdot\bar{u})^3}\left[(c^2-v^2)\bar{u} + \bar{\imath}\times(\bar{u}\times\bar{a})\right]$

$$\bar{B}(\bar{r},t) = \frac{1}{c}\hat{\imath}\times\bar{E}(\bar{r},t)$$

ABBIAMO GIÁ TROVATO $\bar{a}(t) = -R\omega^2(\cos\omega t\,\hat{x} + \sin\omega t\,\hat{y}) \stackrel{!}{=} -\omega^2\bar{w}(t)$

$$\bar{v}(t) = -\omega R(\sin\omega t\,\hat{x} - \cos\omega t\,\hat{y})$$

ORA, $\bar{r} = 0 \Rightarrow \bar{\imath} = \bar{r} - \bar{w}(t_r) = -\bar{w}(t_r) \stackrel{!}{=} -R(\cos\omega t_r\,\hat{x} + \sin\omega t_r\,\hat{y})$

$$\imath = R$$

DA CUI $\hat{\imath} = \dfrac{\bar{\imath}}{\imath} = -(\cos\omega t_r\,\hat{x} + \sin\omega t_r\,\hat{y})$

$$\bar{u} = c\hat{\imath} - \bar{v}(t_r) = -c(\cos\omega t_r\,\hat{x} + \sin\omega t_r\,\hat{y}) + \omega R(\sin\omega t_r\,\hat{x} - \cos\omega t_r\,\hat{y})$$

$$\bar{\imath}\times(\bar{u}\times\bar{a}) = \bar{u}(\bar{\imath}\cdot\bar{a}) - \bar{a}(\bar{\imath}\cdot\bar{u})$$

$$\bar{\imath}\cdot\bar{a} = \omega^2[\bar{w}(t_r)]\cdot[\bar{w}(t_r)] = \omega^2R^2$$

$$\bar{\imath}\cdot\bar{u} = Rc$$

$$\bar{E}(\bar{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R}{(Rc)^3}\left[(c^2-v^2)\bar{u} + \bar{u}(\omega^2R^2) - \bar{a}(Rc)\right]$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2c^3}\left[c^2\bar{u} - \bar{a}Rc\right]$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2c^2}\left(c\bar{u} - \bar{a}R\right)$$

$$\overset{!}{=} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(Rc)^2}\Big\{c\left[-c(\cos\omega t_r\,\hat{x} + \sin\omega t_r\,\hat{y}) + \omega R(\sin\omega t_r\,\hat{x} - \cos\omega t_r)\hat{y}\right] + - R\left[-R\omega^2(\cos\omega t_r\,\hat{x} + \sin\omega t_r\,\hat{y})\right]\Big\}$$

$$\overset{!}{=} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(Rc)^2}\Big\{\hat{x}\left[-c^2\cos\omega t_r + \omega Rc\sin\omega t_r + R^2\omega^2\cos\omega t_r\right] + \hat{y}\left[-c^2\sin\omega t_r - \omega Rc\cos\omega t_r + R^2\omega^2\sin\omega t_r\right]\Big\}$$

$$\overset{!}{=} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(Rc)^2}\Big\{\hat{x}\left[\omega Rc\sin\omega t_r + (R^2\omega^2 - c^2)\cos\omega t_r\right] + \hat{y}\left[-\omega Rc\cos\omega t_r + (R^2\omega^2 - c^2)\sin\omega t_r\right]\Big\}$$

$$\bar{B}(\bar{r},t) = \frac{1}{c}\hat{\mathscr{r}} \times \bar{E}(\bar{r},t)$$

$$\overset{!}{=} \frac{1}{c}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \hat{\mathscr{r}}_x & \hat{\mathscr{r}}_y & \hat{\mathscr{r}}_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \frac{1}{c}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \hat{\mathscr{r}}_x & \hat{\mathscr{r}}_y & 0 \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{!}{=} \frac{\hat{z}}{c}\left(E_y\hat{\mathscr{r}}_x - E_x\hat{\mathscr{r}}_y\right)$$

$$\overset{!}{=} \frac{\hat{z}}{c}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(Rc)^2}\Big\{\left[-\omega Rc\cos\omega t_r + (R^2\omega^2 - c^2)\sin\omega t_r\right]\cdot(-\cos\omega t_r) + - \left[\omega Rc\sin\omega t_r + (R^2\omega^2 - c^2)\cos\omega t_r\right]\cdot(-\sin\omega t_r)\Big\}$$

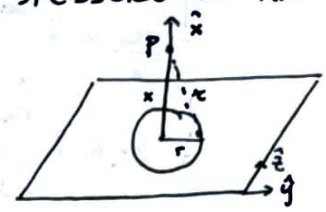
$$\overset{!}{=} \hat{z}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{1}{(Rc)^2}\Big\{\left[\omega Rc\cos^2\omega t_r \mp \cancel{(R^2\omega^2 - c^2)}\sin\omega t_r\cos\omega t_r\right] + \left[\omega Rc\sin^2\omega t_r + \cancel{(R^2\omega^2 - c^2)}\cos\omega t_r\sin\omega t_r\right]$$

$$\overset{!}{=} \hat{z}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{\omega Rc}{(Rc)^2}$$

$$\overset{!}{=} \frac{q\omega}{4\pi\varepsilon_0 Rc^2}\hat{z}$$

PROBLEMA 2. DEL 04/09/2011

IL PIANO yz VIENE SCOMPOSTO IN CORONE CIRCOLARI CONCENTRICHE ATTORNO ALL'ASSE x
SE r È LA DISTANZA DALL'ASSE x, UNA CORONA DI RAGGIO r E SPESSORE dr HA AREA
$da = 2\pi r dr$



IL PUNTO DI OSSERVAZIONE È $P = (x,0,0)$
TUTTI I PUNTI DELLA STESSA CORONA SONO ALLA STESSA DISTANZA DA P, PARI A $\kappa = \sqrt{x^2+r^2}$

POICHÉ LA CORRENTE SUPERFICIALE È UNIFORME LUNGO $\hat{z}$, ANCHE IL POTENZIALE VETTORE RISULTERÀ DIRETTO LUNGO $\hat{z}$

$$\rightarrow \bar{A}(x,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\bar{K}(t_r)}{\kappa}\, da$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{K(t_r)}{\kappa} 2\pi r\, dr\, \hat{z} \qquad \text{CON } t_r = t - \frac{\kappa}{c} = t - \frac{\sqrt{x^2+r^2}}{c}$$

LA CORRENTE VIENE ACCESA IN $t=0$, QUINDI IN ENTRAMBI I CASI VALE
$\bar{K}(t) = 0 \quad t<0 \quad \Rightarrow$ CONTRIBUISCONO ALL'INTEGRALE SOLO LE CORONE PER CUI IL TEMPO RITARDATO È POSITIVO

$$t - \frac{\sqrt{x^2+r^2}}{c} \geq 0$$

$$ct \geq \sqrt{x^2+r^2} \quad \Rightarrow \quad r^2 \leq c^2t^2 - x^2$$

DA CUI IL RAGGIO MASSIMO DELLE CORONE CHE CONTRIBUISCONO È $r_{max} = \sqrt{c^2t^2-x^2}$
↓
HA SENSO SOLO PER $ct > x$; SE $ct < x$, ALLORA L'INFORMAZIONE NON HA ANCORA RAGGIUNTO P E I CAMPI SONO NULLI

$$\text{DA CUI} \quad \bar{A}(x,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi\, \hat{z} \int_0^{r_{max}} \frac{K(t_r)\, r\, dr}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

a) SI CONSIDERI $K(t) = K_0$

L'INTEGRALE DIVENTA

$$\bar{A}(x,t) = \frac{\mu_0}{2} K_0\, \hat{z} \underbrace{\int_0^{r_{max}} \frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}\, dr}_{\left[\sqrt{r^2+x^2}\right]_0^{r_{max}} = \sqrt{r_{max}^2+x^2} - x = ct - x}$$

$$= \frac{\mu_0}{2} K_0 (ct - x)\, \hat{z} \qquad ct > x$$

$$\bar{E}(x,t) = -\frac{\partial \bar{A}(x,t)}{\partial t} = -\frac{\mu_0 K_0}{2} c\, \hat{z} \qquad ct > x$$

$$\bar{B}(x,t) = \bar{\nabla} \times \bar{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{y} = \frac{\mu_0 K_0}{2}\hat{y} \qquad ct > x$$

FINCHÉ $ct < x$, P NON SA ANCORA CHE IL PIANO È STATO ACCESO E I CAMPI SONO NULLI
QUANDO $ct > x$, ARRIVA IL FRONTE DELLA PERTURBAZIONE E SUBITO DIETRO IL FRONTE I CAMPI ASSUMONO VALORI COSTANTI

b) SI CONSIDERI $K(t) = \alpha t$, $\alpha > 0$

$$\bar{A}(x,t) = \frac{\mu_0}{2}\hat{z}\int_0^{r_{max}} \frac{\alpha t_r}{\sqrt{r^2+x^2}}\, r\,dr$$

$$= \frac{\mu_0 \alpha}{2}\hat{z}\int_0^{r_{max}} \left(t - \frac{\sqrt{r^2+x^2}}{c}\right)\frac{1}{\sqrt{r^2+x^2}}\, r\,dr$$

$$= \frac{\mu_0 \alpha}{2}\hat{z}\int_0^{r_{max}} \left[\frac{tr}{\sqrt{r^2+x^2}} - \frac{r}{c}\right] dr$$

$$= \frac{\mu_0 \alpha}{2}\hat{z}\left[t(ct-x) - \frac{1}{c}\frac{r_{max}^2}{2}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 \alpha}{2}\hat{z}\left[ct^2 - xt - \frac{c^2t^2 - x^2}{2c}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 \alpha}{2}\hat{z}\left(\frac{1}{2}ct^2 - xt + \frac{x^2}{2c}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 \alpha}{4c}\hat{z}\,(c^2t^2 - 2cxt + x^2) = \frac{\mu_0 \alpha}{4c}\hat{z}\,(ct-x)^2$$

$$\bar{E}(x,t) = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 \alpha}{2}(ct-x)\hat{z}$$

$$\bar{B}(x,t) = \bar{\nabla} \times \bar{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{y} = +\frac{\mu_0 \alpha}{2c}(ct-x)\,\hat{y}$$

c) SI DETERMINI LA POTENZA IRRADIATA DAL PIANO PER UNITÁ DI SUPERFICIE

IL VETTORE DI POYNTING NEL CASO b) É

$$\bar{S} = \frac{1}{\mu_0}(\bar{E}\times\bar{B}) = \frac{1}{\mu_0}\left[\left(-\frac{\mu_0\alpha}{2}(ct-x)\right)\left(\frac{\mu_0\alpha}{2c}(ct-x)\right)(\hat{z}\times\hat{y})\right]$$

$$= -\frac{\mu_0\alpha^2}{4c}(ct-x)^2(-\hat{x})$$

$$= \frac{\mu_0\alpha^2}{4c}(ct-x)^2\,\hat{x}$$

FLUSSO DI ENERGIA PER UNITÁ DI SUPERFICIE CHE ATTRAVERSA IL PIANO $x = cost$ NEL SEMISPAZIO $x > 0$

~~POICHÉ~~ LA POTENZA PER UNITÁ DI SUPERFICIE EMESSA VERSO L'ALTO ALL'ISTANTE t SI OTTIENE VALUTANDO IL FLUSSO IN $x = 0$

$$\bar{S}(0,t) = \frac{\mu_0\alpha^2}{4c}(ct)^2\,\hat{x}$$

→ SICCOME IL PIANO IRRADIA SIMMETRICAMENTE ANCHE NEL SEMISPAZIO $x < 0$ CON UGUALE INTENSITÁ, LA POTENZA TOTALE IRRADIATA É IL DOPPIO $\frac{P}{A} = 2|\bar{S}(0,t)| = \frac{\mu_0\alpha^2}{2}ct^2$