ESERCITAZIONI FED

SECONDA ESERCITAZIONE

19-03-2026

Problema 8.19 del Griffiths

Problem 8.19.[24] Picture the electron as a uniformly charged spherical shell, with charge e and radius R, spinning at angular velocity ω.

(a) Calculate the total energy contained in the electromagnetic fields.
(b) Calculate the total angular momentum contained in the fields.
(c) According to the Einstein formula ($E = mc^2$), the energy in the fields should contribute to the mass of the electron. Lorentz and others speculated that the *entire* mass of the electron might be accounted for in this way: $U_{\text{em}} = m_e c^2$. Suppose, moreover, that the electron's spin angular momentum is entirely attributable to the electromagnetic fields: $L_{\text{em}} = \hbar/2$.

On these two assumptions, determine the radius and angular velocity of the electron. What is their product, ωR? Does this classical model make sense?

Problema 1 del 29-06-2022

Un tubo cilindrico di lunghezza infinita e raggio a si muove con velocità costante v lungo il suo asse di simmetria. Sul tubo è distribuita uniformemente una densità di carica lineare pari a λ. Intorno ad esso, un secondo tubo, di lunghezza infinita e raggio $b > a$, su cui è presente una distribuzione uniforme di carica di densità lineare $-\lambda$, si muove con la stessa velocità. Determinare:

a) l'energia per unità di lunghezza immagazzinata nei campi;

b) la quantità di moto per unità di lunghezza immagazzinata nei campi;

c) la potenza trasportata dai campi attraverso una superficie piana perpendicolare all'asse di simmetria dei due cilindri.

Problema 2 del 05-09-2023

Due gusci sferici conduttori di raggi a e b, con $a < b$, sono disposti concentricamente e caricati con cariche $+q$ e $-q$, rispettivamente. Al centro di questa configurazione è fissato un dipolo magnetico ideale di momento $\vec{\mathbf{M}}$.

Determinare:

a) i campi elettrico e magnetico in tutto lo spazio;

b) il momento angolare totale del sistema;

c) la variazione di momento angolare se il guscio esterno viene scaricato a terra.

ESERCITAZIONE 2.   19/03/2026

PROBLEMA 1. DEL 29/06/2022

CONSIDERIAMO DUE TUBI CILINDRICI COASSIALI DI LUNGHEZZA INFINITA

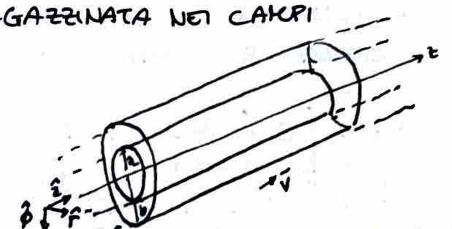
→ · CILINDRO DI RAGGIO a, SU CUI É DISTRIBUITA UNIFORMEMENTE UNA DENSITÁ DI CARICA LINEARE λ

· CILINDRO DI RAGGIO b, SU CUI É DISTRIBUITA UNIFORMEMENTE UNA DENSITÁ DI CARICA LINEARE $-\lambda$

ENTRAMBI I CILINDRI SI MUOVONO CON VELOCITÁ v LUNGO L'ASSE DI SIMMETRIA

IL PROBLEMA É A SIMMETRIA CILINDRICA → · IL CAMPO ELETTRICO É RADIALE
· IL CAMPO MAGNETICO É AZIMUTALE
· ENTRAMBI I CAMPI DIPENDONO DALLA DISTANZA r DALL'ASSE

a) DETERMINARE L'ENERGIA PER UNITÁ DI LUNGHEZZA IMMAGAZZINATA NEI CAMPI



$$u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right)$$ DENSITÁ DI ENERGIA

DET. IL CAMPO ELETTRICO

→ LEGGE DI GAUSS SU UN CILINDRO COASSIALE AI DUE TUBI, DI LUNGHEZZA L E RAGGIO r → · SULLA SUP. LATERALE $\bar{E}$ É PARALLELO ALLA NORMALE USCENTE E IL SUO MODULO É COSTANTE, PERCHÉ TUTTI I PUNTI STANNO ALLA STESSA DISTANZA DALL'ASSE
· SULLE DUE BASI IL VETTORE AREA É DIRETTO LUNGO $\pm\hat{z}$, QUINDI $\bar{E}\cdot d\bar{S} = 0$

QUINDI $\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{S} = E(r)\, 2\pi r L$

$r<a$: LA SUPERFICIE GAUSSIANA NON RACCHIUDE ALCUNA CARICA $Q_{int} = 0$
⇒ $\bar{E} = 0$

$a<r<b$: RACCHIUDE SOLO IL CILINDRO INTERNO → $Q_{int} = \lambda L$
⇒ $E(r)\, 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$ ⇒ $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$, $\bar{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$

$r>b$: RACCHIUDE ENTRAMBE LE CARICHE ($+\lambda L$ E $-\lambda L$) → $Q_{int} = 0$
⇒ $\bar{E} = 0$

↳ $$\bar{E}(r) = \begin{cases} 0 & r<a \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r} & a<r<b \\ 0 & r>b \end{cases}$$

IL CAMPO ELETTRICO É CONFINATO TRA I DUE CILINDRI (COME ACCADE IN UN CONDENSATORE)

DET. IL CAMPO MAGNETICO

→ POICHÉ I CILINDRI SONO CARICHI E SI MUOVONO CON VELOCITÁ v LUNGO z, LE CARICHE COSTITUISCONO DELLE CORRENTI

→ IL CILINDRO INTERNO PORTA CORRENTE $I_1 = \lambda v$
QUELLO ESTERNO $I_2 = -\lambda v$

→ LEGGE DI AMPERE IN FORMA INTEGRALE $\oint_\Gamma \bar{B}\cdot d\bar{\ell} = \mu_0 I_{int}$ SU UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO r COASSIALE AI CILINDRI → · $\bar{B}$ É TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA E IL SUO MODULO É COSTANTE LUNGO TUTTA LA CIRCONFERENZA

QUINDI $\oint_\Gamma \bar{B}\cdot d\bar{\ell} = B(r)\, 2\pi r$

$r<a$: LA LINEA AMPERIANA NON RACCHIUDE ALCUNA CORRENTE, PERCHÉ LA CORRENTE DEL CILINDRO INTERNO SI TROVA SULLA SUA SUPERFICIE, $I_{int} = 0$
$\Rightarrow \bar{B} = 0$

$a<r<b$: RACCHIUDE LA CORRENTE DEL CILINDRO INTERNO, $I_{int} = I_1$
$\Rightarrow B(r)\, 2\pi r = \mu_0 \lambda v \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r}$, $\bar{B}(r) = \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r}\hat{\phi}$

$r>b$: RACCHIUDE ENTRAMBE LE CORRENTI, $I_{int} = I_1 + I_2 = 0$
$\Rightarrow \bar{B} = 0$

$$\hookrightarrow \bar{B}(r) = \begin{cases} 0 & r<a \\ \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\lambda v}{r}\hat{\phi} & a<r<b \\ 0 & r>b \end{cases}$$

IL CAMPO MAGNETICO É CONFINATO NELLA REGIONE TRA I DUE CILINDRI

TORNANDO A u, SICCOME $\bar{E}$ E $\bar{B}$ SONO NON NULLI SOLO NELLA REGIONE $a<r<b$, L'ENERGIA É IMMAGAZZINATA SOLO TRA I DUE CILINDRI

$$u = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_0\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)^2 + \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\lambda v}{r}\right)^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda^2}{4\pi^2\varepsilon_0 r^2} + \frac{\mu_0\lambda^2 v^2}{4\pi^2 r^2}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{4\pi^2\varepsilon_0 r^2}\left(1 + \varepsilon_0\mu_0 v^2\right) \overset{\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2}{=} \frac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon_0 r^2}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)$$

PER TROVARE L'ENERGIA PER UNITÁ DI LUNGHEZZA, SI INTEGRA
$\rightarrow$ IN COORDINATE CILINDRICHE L'ELEMENTO DI VOLUME É $d\tau = r\,dr\,d\phi\,dz$

DA CUI $U = \int u\, d\tau = \int_0^L dz \int u\, r\,dr\,d\phi = L \int u\, r\,dr\,d\phi$

$$\Rightarrow \frac{U}{L} = \int u\, r\,dr\,d\phi = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon_0}\underbrace{\int_a^b \frac{1}{r}dr}_{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi}$$
$$= \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

b) DETERMINARE LA QUANTITÁ DI MOTO PER UNITÁ DI LUNGHEZZA IMMAGAZZINATA NEI CAMPI

LA DENSITÁ DI QUANTITÁ DI MOTO DEI CAMPI É $\bar{g} = \varepsilon_0(\bar{E}\times\bar{B})$

ABBIAMO TROVATO NELLA REGIONE $a<r<b$ $\bar{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$ E $\bar{B}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\lambda v}{r}\hat{\phi}$

QUINDI $\bar{E}\times\bar{B} = \frac{\lambda^2\mu_0}{4\pi^2\varepsilon_0 r^2} v(\hat{r}\times\hat{\phi}) = \frac{\lambda^2\mu_0}{4\pi^2\varepsilon_0 r^2} v\,\hat{z}$

DA CUI $\bar{g} = \varepsilon_0(\bar{E}\times\bar{B}) = \frac{\lambda^2\mu_0}{4\pi^2 r^2} v\,\hat{z}$

PER TROVARE LA QUANTITÁ DI MOTO PER UNITÁ DI LUNGHEZZA, SI INTEGRA

$$\rightarrow \quad \bar{P} = \int \bar{g}\, d\tau = \int_0^L dz \int \bar{g}\, r\, dr\, d\phi \overset{!}{=} L \int \bar{g}\, r\, dr\, d\phi$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{P}}{L} = \int \bar{g}\, r\, dr\, d\phi = \frac{\lambda^2 \mu_0}{4\pi^2} v \hat{z} \underbrace{\int_a^b \frac{r}{r^2} dr}_{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \overset{!}{=} \frac{\lambda^2 \mu_0}{2\pi} v \ln\left(\frac{b}{a}\right) \hat{z}$$

c) DETERMINARE LA POTENZA TRASPORTATA DAI CAMPI ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE PIANA PERPENDICOLARE ALL'ASSE DI SIMMETRIA

LA POTENZA TRASPORTATA SI RICAVA DAL VETTORE DI POYNTING $\bar{S} = \frac{1}{\mu_0} \bar{E} \times \bar{B} \overset{!}{=} \frac{\lambda^2}{4\pi^2 \varepsilon_0 r^2} v \hat{z}$

L'ENERGIA EM VIENE TRASPORTATA LUNGO LA DIREZIONE DI MOTO DEL SISTEMA

LA POTENZA CHE ATTRAVERSA UNA SUPERFICIE PIANA PERPENDICOLARE ALL'ASSE É $P = \int \bar{S} \cdot d\bar{a}$ CON $d\bar{a} = da\, \hat{z}$

$$\overset{!}{=} \frac{\lambda^2}{4\pi^2 \varepsilon_0} v \underbrace{\int_a^b \frac{r}{r^2} dr}_{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi}$$

$$\overset{!}{=} \frac{\lambda^2 v}{2\pi \varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

PROBLEMA 2. DEL 5/09/2023

GUSCI SFERICI CONDUTTORI DI RAGGI a E b $(a<b)$ CONCENTRICI E CARICATI CON $+q$ E $-q$.
AL CENTRO É FISSATO UN DIPOLO MAGNETICO IDEALE DI MOMENTO $\bar{M}$

ABBIAMO:
- UNA CONFIGURAZIONE ELETTROSTATICA SFERICAMENTE SIMMETRICA, DOVUTA AI DUE GUSCI CARICHI
- UN CAMPO MAGNETOSTATICO GENERATO DAL DIPOLO MAGNETICO

↳ ANCHE SE LE CARICHE SONO FERME E IL DIPOLO É STATICO, LA PRESENZA CONTEMPORANEA DI $\bar{E}$ E $\bar{B}$ PUÓ DARE LUOGO A DENSITÁ DI QUANTITÁ DI MOTO DEL CAMPO $\bar{g}$ E A UN MOMENTO ANGOLARE EM $\bar{L}_{em}$

a) DETERMINARE $\bar{E}$ E $\bar{B}$ IN TUTTO LO SPAZIO

PER SIMMETRIA, IL CAMPO ELETTRICO PUÓ SOLO ESSERE RADIALE $\bar{E}(r) = E(r)\hat{r}$

SI USA LA LEGGE DI GAUSS SU UNA SFERA DI RAGGIO r CONCENTRICA CON I GUSCI → SULLA SFERA:
- IL MODULO DEL CAMPO É COSTANTE, PERCHÉ TUTTI I PUNTI SONO ALLA STESSA DISTANZA DAL CENTRO
- IL CAMPO É PARALLELO AL VETTORE AREA $d\bar{S}$, PERCHÉ ENTRAMBI SONO RADIALI

$$\Rightarrow \oint_S \bar{E}\cdot d\bar{S} = E(r)\,4\pi r^2$$

$r<a$: LA SUPERFICIE GAUSSIANA NON RACCHIUDE ALCUNA CARICA, $Q_{int}=0$
$\Rightarrow \bar{E}=0$

$a<r<b$: RACCHIUDE SOLO LA CARICA DEL GUSCIO INTERNO, $Q_{int}=+q$
$$\Rightarrow E(r)\,4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}, \quad \bar{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

$r>b$: RACCHIUDE ENTRAMBE LE CARICHE, $Q_{int} = +q-q = 0$
$\Rightarrow \bar{E}(r)=0$

↳
$$\bar{E}(r) = \begin{cases} 0 & r<a \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\hat{r} & a<r<b \\ 0 & r>b \end{cases}$$

IL CAMPO ELETTRICO É CONFINATO TRA I DUE GUSCI

PER UN DIPOLO IDEALE, IL CAMPO MAGNETICO É $\bar{B}(\bar{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3(\bar{M}\cdot\hat{r})\hat{r} - \bar{M}\right]$

SCEGLIAMO L'ASSE z PARALLELO AL DIPOLO, OVVERO $\bar{M} = M\hat{z}$

IN COORDINATE SFERICHE, $\hat{z} = (\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta})$
DA CUI $\bar{M}\cdot\hat{r} = M(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta})\cdot\hat{r} = M\cos\theta$

$$\text{DA CUI } \bar{B}(r,\theta) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3M\cos\theta\,\hat{r} - M\cos\theta\,\hat{r} + M\sin\theta\,\hat{\theta}\right]$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[2M\cos\theta\,\hat{r} + M\sin\theta\,\hat{\theta}\right]$$

b) DETERMINARE IL MOMENTO ANGOLARE TOTALE DEL SISTEMA

LA DENSITÁ DI QUANTITÁ DI MOTO É $\bar{g} = \varepsilon_0 (\bar{E} \times \bar{B})$
POICHÉ $\bar{E} \neq 0$ SOLO NELLA REGIONE TRA I DUE GUSCI, ALLORA ANCHE $\bar{g} \neq 0$
SOLO IN QUELLA REGIONE

$$\bar{g} = \varepsilon_0 \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \right) \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi r^3} (2M\cos\theta \hat{r} + M\sin\theta \hat{\theta}) \right]$$

$\hat{r} \times \hat{r} = 0$
$\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\phi}$

$$\overset{!}{=} \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 r^5} q M \sin\theta \, \hat{\phi}$$

IL MOMENTO ANGOLARE TOTALE É $\bar{L}_{em} = \int \bar{r} \times \bar{g} \, d\tau$

$$\bar{r} \times \bar{g} = r\hat{r} \times \left(\frac{\mu_0 q}{16\pi^2 r^5} M \sin\theta \, \hat{\phi} \right) \overset{\hat{r}\times\hat{\phi} = -\hat{\theta}}{=} - \frac{\mu_0 q M}{16\pi^2 r^4} \sin\theta \, \hat{\theta}$$

PER SIMMETRIA ASSIALE, $\bar{L}_{em}$ PUÓ AVERE COMPONENTE SOLO LUNGO z

$$L_z = \int (\bar{r} \times \bar{g}) \cdot \hat{z} \, d\tau$$

ORA, IN COORDINATE SFERICHE $\hat{\theta} = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta)$
QUINDI LA SUA COMPONENTE LUNGO $\hat{z}$ É $\hat{\theta} \cdot \hat{z} = -\sin\theta$

DA CUI $(\bar{r} \times \bar{g}) \cdot \hat{z} = \frac{\mu_0 q M}{16\pi^2 r^4} \sin^2\theta$

$$L_z = \frac{\mu_0 q M}{16\pi^2} \underbrace{\int_a^b \frac{r^2}{r^4} dr}_{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \underbrace{\int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta}_{\frac{4}{3}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi}$$

$$\overset{!}{=} \frac{\mu_0 q M}{16\pi^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \frac{4}{3} 2\pi = \frac{\mu_0 q M}{6\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$\bar{L}_{em} = \frac{\mu_0 q \bar{M}}{6\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

c) DETERMINARE LA VARIAZIONE DI MOMENTO ANGOLARE SE IL GUSCIO VIENE MESSO A TERRA

"METTERE A TERRA" SIGNIFICA ELIMINARE LA CARICA $-q$ DEL GUSCIO ESTERNO

IN QUESTO CASO IL CAMPO ELETTRICO NON SARÁ PIÚ CONFINATO TRA I GUSCI, MA SI HA $\bar{E}_f(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad r > a$

IN QUESTO CASO IL MOMENTO ANGOLARE SI OTTIENE QUINDI INTEGRANDO TRA $r = a$ E $r = \infty$ $\Rightarrow$ $L_z = \frac{\mu_0 q M}{16\pi^2} \int_a^\infty \frac{1}{r^2} dr \int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$

$$\overset{!}{=} \frac{\mu_0 q M}{6\pi} \frac{1}{a}$$

DA CUI $\Delta\bar{L} = \bar{L}_f - \bar{L}_i = \frac{\mu_0 q \bar{M}}{6\pi} \frac{1}{b}$

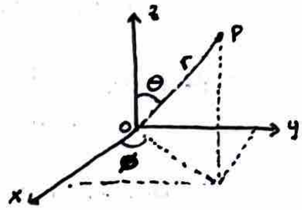
PROBLEMA 8.19 DEL GRIFFITHS

CONSIDERARE L'ELETTRONE COME UN GUSCIO SFERICO DI RAGGIO R, CON CARICA TOTALE e DISTRIBUITA UNIFORMEMENTE SULLA SUPERFICIE, CHE RUOTA CON VELOCITÁ ANGOLARE ω

↳ IDEA FISICA: LA CARICA DISTRIBUITA SU GUSCIO GENERA UN CAMPO ELETTRICO, MENTRE IL FATTO CHE RUOTI IMPLICA CHE LA CARICA SIA IN MOTO E QUINDI CHE ESISTA UNA CORRENTE SUPERFICIALE; QUESTA CORRENTE PRODUCE A SUA VOLTA UN CAMPO MAGNETICO
$\Rightarrow$ NELLO SPAZIO SARANNO PRESENTI SIA UN CAMPO ELETTRICO CHE UN CAMPO MAGNETICO CHE TRASPORTANO SIA ENERGIA CHE MOMENTO ANGOLARE

a) CALCOLARE L'ENERGIA TOTALE CONTENUTA NEI CAMPI ELETTROMAGNETICI

POICHÉ LA CARICA É DISTRIBUITA UNIFORMEMENTE SU UNA SUPERFICIE SFERICA, LA CONFIGURAZIONE É A SIMMETRIA SFERICA



$\Rightarrow \bar{E}(\bar{r}) = E(r)\,\hat{r}$ IL CAMPO ELETTRICO DIPENDE DALLA DISTANZA r DAL CENTRO ED É DIRETTO RADIALMENTE

PER DET. $E(r)$ USIAMO LA LEGGE DI GAUSS $\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

E SCEGLIAMO COME SUPERFICIE GAUSSIANA UNA SFERA DI RAGGIO r CONCENTRICA COL GUSCIO →
- SULLA SFERA IL MODULO DEL CAMPO É COSTANTE, PERCHÉ TUTTI I PUNTI DELLA ~~SFERA~~ SUPERFICIE SONO ALLA DISTANZA DAL CENTRO
- $\bar{E} \parallel d\bar{S}$ PERCHÉ ENTRAMBI SONO RADIALI $\Rightarrow \bar{E}\cdot d\bar{S} = E(r)\,dS$

DA CUI $\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{S} = E(r)\oint_S dS = E(r)\,4\pi r^2$

$r<R$: LA SFERA GAUSSIANA SI TROVA COMPLETAMENTE DENTRO IL GUSCIO, QUINDI $Q_{int}=0$, PERCHÉ TUTTA LA CARICA É POSTA SULLA SUPERFICIE $\Rightarrow E(r) = 0$

$r>R$: LA SFERA GAUSSIANA RACCHIUDE TUTTA LA CARICA DEL GUSCIO, $Q_{int} = e$
$\Rightarrow E(r)\,4\pi r^2 = \frac{e}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2}$ CAMPO CHE PRODURREBBE UNA CARICA PUNTIFORME E CONCENTRATA NEL CENTRO

$$↳ \bar{E}(r) = \begin{cases} 0 & r<R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2}\,\hat{r} & r>R \end{cases}$$

ORA, IL GUSCIO É CARICO E RUOTA → UNA CARICA IN MOTO COSTITUISCE UNA CORRENTE. E POICHÉ É DISTRIBUITA SULLA SUPERFICIE, SI TRATTA DI UNA CORRENTE SUPERFICIALE

LA DENSITÁ SUPERFICIALE DI CARICA É $\sigma = \frac{e}{4\pi R^2}$ CARICA PER UNITÁ DI AREA

LA SFERA RUOTA CON VELOCITÁ ANGOLARE ω ATTORNO ALL'ASSE z
UN PUNTO SULLA SUPERFICIE CHE SI TROVA ALL'ANGOLO POLARE θ DESCRIVE UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO $R\sin\theta$
→ LA SUA VELOCITÁ TANGENZIALE VALE QUINDI $v = \omega R\sin\theta$

LA DENSITÁ DI CORRENTE SUPERFICIALE É $\bar{K} = \sigma\bar{v}$

$= \sigma\omega R\sin\theta\,\hat{\phi}$

→ QUESTA CORRENTE GENERA UN CAMPO MAGNETICO

↓

- ALL'INTERNO DEL GUSCIO É UNIFORME E PARALLELO ALL'ASSE DI ROTAZIONE $\bar{B}_{in} = \frac{2}{3}\mu_0\sigma R\omega\,\hat{z}$
- ALL'ESTERNO IL CAMPO É QUELLO DI UN DIPOLO MAGNETICO $\bar{B}_{out} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}(2m\cos\theta\,\hat{r} + m\sin\theta\,\hat{\theta})$, $m = \frac{4}{3}\pi\sigma\omega R^4 = \frac{1}{3}e\omega R^2$ MOMENTO DI DIPOLO MAGNETICO

LA DENSITÁ DI ENERGIA DEL CAMPO ELETTRICO É $u_E = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2$

→ POICHÉ ALL'INTERNO DEL GUSCIO $E=0$, L'ENERGIA DEL CAMPO É INTERAMENTE CONTENUTA NELLA REGIONE $r>R$ ⇒ $W_E = \int_{r>R} u_E\,d\tau$

$$u_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2}\right)^2 = \frac{e^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}$$

IN COORDINATE SFERICHE L'ELEMENTO DI VOLUME É $d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

$$\hookrightarrow W_E = \int_R^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{e^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$= \frac{e^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\underbrace{\int_R^\infty\frac{1}{r^2}dr}_{\frac{1}{R}}\underbrace{\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta}_{2}\underbrace{\int_0^{2\pi}d\phi}_{2\pi}$$

$$\int_R^\infty\frac{dr}{r^2} = \left[-\frac{1}{r}\right]_R^\infty = \frac{1}{R}$$

$$= \frac{e^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\frac{1}{R}\,2\,2\pi = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R}$$

LA DENSITÁ DI ENERGIA DEL CAMPO MAGNETICO É $u_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2$

ALL'INTERNO DEL GUSCIO, $B_{in} = \frac{2}{3}\mu_0\sigma R\omega$

$$= \frac{2}{3}\mu_0 R\omega\left(\frac{e}{4\pi R^2}\right) = \frac{\mu_0 e\omega}{6\pi R}$$

$$u_B^{int} = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 e\omega}{6\pi R}\right)^2 = \frac{\mu_0 e^2\omega^2}{72\pi^2 R^2}$$

POICHÉ LA DENSITÁ É UNIFORME, L'ENERGIA SI OTTIENE MOLTIPLICANDOLA PER IL VOLUME DELLA SFERA $W_B^{int} = u_B^{int}V = \frac{\mu_0 e^2\omega^2}{72\pi^2R^2}\frac{4\pi R^3}{3}$

$$= \frac{\mu_0 e^2\omega^2 R}{54\pi}$$

ALL'ESTERNO, $\bar{B}_{out} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}(2m\cos\theta\,\hat{r} + m\sin\theta\,\hat{\theta})$

$$B^2 = \left(\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\right)^2[(2m\cos\theta)^2 + (m\sin\theta)^2]$$

PERCHÉ $\hat{r}$ E $\hat{\theta}$ SONO ORTOGONALI, IL MODULO QUADRO SI OTTIENE SOMMANDO IL QUADRATO DELLE COMPONENTI

$$= \frac{\mu_0^2 m^2}{16\pi^2 r^6}[4\cos^2\theta + \sin^2\theta]$$

$4\cos^2\theta + \sin^2\theta = 4\cos^2\theta + (1-\cos^2\theta)$

$$= \frac{\mu_0^2 m^2}{16\pi^2 r^6}(1 + 3\cos^2\theta)$$

$$u_B^{out} = \frac{1}{2\mu_0}\left[\frac{\mu_0^2 m^2}{16\pi^2 r^6}(1+3\cos^2\theta)\right]$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}\left[\frac{\mu_0^2}{16\pi^2 r^6}\left(\frac{1}{3}e\omega R^2\right)^2(1+3\cos^2\theta)\right] = \frac{\mu_0 e^2\omega^2 R^4}{288\pi^2 r^6}(1+3\cos^2\theta)$$

$$W_B^{out} = \int_R^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} u_B^{out}\, r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{\mu_0 e^2\omega^2}{(18)(16)\pi^2} R^4 \underbrace{\int_R^\infty \frac{1}{r^4}dr}_{\frac{1}{3R^3}} \underbrace{\int_0^\pi (1+3\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta}_{4^*} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi}$$

$$= \frac{\mu_0 e^2\omega^2}{(18)(16)\pi^2} R^4 \frac{1}{3R^3}\, 4\, 2\pi = \frac{\mu_0 e^2\omega^2 R}{108\pi}$$

$*$ $u = \cos\theta$ $du = -\sin\theta\, d\theta$
PER $\theta = 0 \Rightarrow u = 1$
$\theta = \pi \Rightarrow u = -1$

$$\int_1^{-1}(1+3u^2)(-du) = \int_{-1}^{1}(1+3u^2)du = (u+u^3)\Big|_{-1}^{1} = 2-(-2) = 4$$

SOMMANDO CONTRIBUTO INTERNO ED ESTERNO, $W_B = W_B^{int} + W_B^{out} = \frac{\mu_0 e^2\omega^2 R}{36\pi}$

L'ENERGIA TOTALE É LA SOMMA DELL'ENERGIA ELETTRICA E MAGNETICA

$$W = W_E + W_B = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R} + \frac{\mu_0 e^2\omega^2 R}{36\pi}$$

b) DETERMINARE IL MOMENTO ANGOLARE TRASPORTATO DAI CAMPI

IL CAMPO EM TRASPORTA QUANTITÁ DI MOTO E QUINDI ANCHE MOMENTO ANGOLARE

LA DENSITÁ DI MOMENTO ANGOLARE É $\bar{\ell} = \bar{r}\times\bar{g}$, $\bar{g} = \varepsilon_0(\bar{E}\times\bar{B})$ DENSITÁ DI QUANTITÁ DI MOTO.

→ IL MOMENTO ANGOLARE TOTALE SI OTTIENE INTEGRANDO SU TUTTO LO SPAZIO

ORA, $\bar{g} = \varepsilon_0\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2}\right)\left(\frac{\mu_0}{4\pi r^3} m\sin\theta\right)\underbrace{(\hat{r}\times\hat{\theta})}_{\hat{\phi}}$

$$= \frac{\mu_0 e m}{(4\pi)^2 r^5}\sin\theta\,\hat{\phi}$$

QUINDI $\bar{\ell} = \bar{r}\times\bar{g} = \frac{\mu_0 e m}{(4\pi)^2 r^4}\sin\theta \underbrace{(\hat{r}\times\hat{\phi})}_{-\hat{\theta}}$

$$\bar{L} = \frac{\mu_0 e m}{(4\pi)^2}\hat{z}\underbrace{\int_R^\infty \frac{1}{r^2}dr}_{\frac{1}{R}} \underbrace{\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta}_{\frac{4}{3}^*} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi}$$

$$= \frac{\mu_0 e m}{6\pi R}\hat{z}$$

$$= \frac{\mu_0 e}{6\pi R}\left(\frac{1}{3}e\omega R^2\right)\hat{z} = \frac{\mu_0 e^2\omega R}{18\pi}\hat{z}$$

$*$ $\sin^3\theta = \sin\theta(1-\cos^2\theta)$
$u = \cos\theta$ $du = -\sin\theta\, d\theta$
PER $\theta = 0 \Rightarrow u = 1$
$\theta = \pi \Rightarrow u = -1$

$$\int_{-1}^{1}(1-u^2)du = \left(u - \frac{u^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \left(1-\frac{1}{3}\right) - \left(-1+\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

c) SUPPORRE CHE TUTTA LA MASSA DELL'ELETTRONE É DOVUTA ALL'ENERGIA ELETTROMAGNETICA E CHE LO SPIN É DOVUTO AL MOMENTO ANGOLARE DEI CAMPI

$$L_{em} = \frac{\mu_0 e^2 \omega R}{18\pi} = \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \omega R = \frac{9\pi\hbar}{\mu_0 e^2}$$

$$= \frac{9\pi(1.05\cdot 10^{-34})}{(4\pi\cdot 10^{-7})(1.60\cdot 10^{-19})^2} = 9.23\cdot 10^{10}\ m/s$$

$\downarrow$

ωR RAPPRESENTA LA VELOCITÁ TANGENZIALE DI UN PUNTO DELL'EQUATORE DEL GUSCIO

SE CONFRONTATA CON c, $\frac{\omega R}{c} = \frac{9.23\cdot 10^{10}}{3\cdot 10^8} \sim 300$ $\Rightarrow$ IL MODELLO CLASSICO NON É REALISTICO

$$W = \underbrace{\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R} + \frac{\mu_0 e^2 \omega^2 R}{36\pi}}_{} = m_e c^2$$

$$\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R}\left[1 + \frac{8\pi\varepsilon_0 R}{e^2}\frac{\mu_0 e^2 \omega^2}{36\pi}R\right] \overset{\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2}{=} \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R}\left[1 + \frac{2}{9}\frac{\omega^2 R^2}{c^2}\right]$$

DA CUI $\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R}\left[1 + \frac{2}{9}\left(\frac{\omega R}{c}\right)^2\right] = m_e c^2$.

$$R = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{m_e c^2}\left[1 + \frac{2}{9}\left(\frac{\omega R}{c}\right)^2\right] \simeq 2.95\cdot 10^{-11}\ m$$

$$\omega = \frac{\omega R}{R} \simeq 3.13\cdot 10^{21}\ rad/s$$

↳ SI TROVA QUINDI CHE IL MODELLO CLASSICO DELL'ELETTRONE COME GUSCIO SFERICO ROTANTE NON É FISICAMENTE ACCETTABILE