ESERCITAZIONI FED

SESTA ESERCITAZIONE

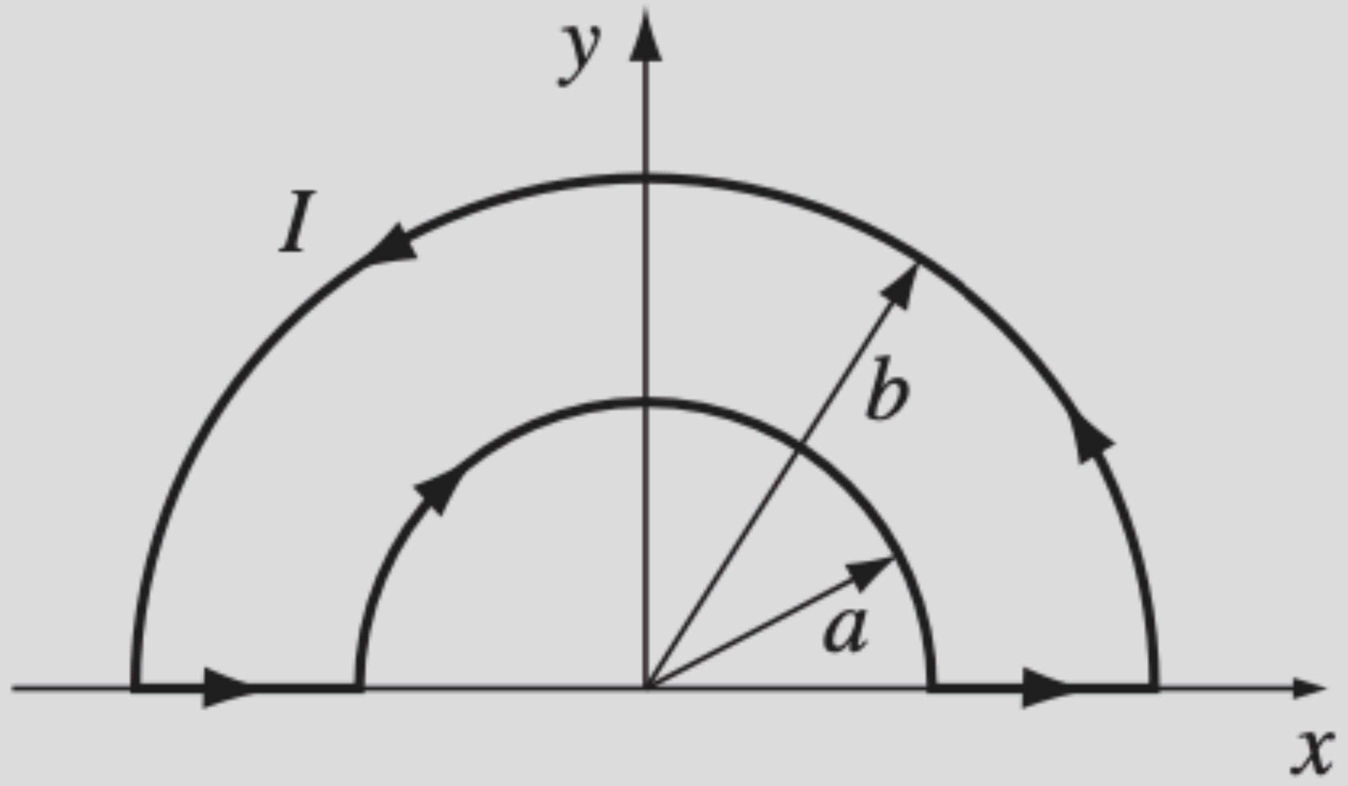
16-04-2026

Problema 10.12 del Griffiths

Problem 10.12. A piece of wire bent into a loop, as shown in Fig. 10.5, carries a current that increases linearly with time:

$$I(t) = kt \quad (-\infty < t < \infty).$$

Calculate the retarded vector potential $\mathbf{A}$ at the center. Find the electric field at the center. Why does this (neutral) wire produce an *electric* field? (Why can't you determine the *magnetic* field from this expression for $\mathbf{A}$?)



Problema 10.27 del Griffiths

Problem 10.27. An expanding sphere, radius $R(t) = vt$ ($t > 0$, constant v) carries a charge Q, uniformly distributed over its volume. Evaluate the integral

$$Q_{\text{eff}} \equiv \int \rho(\mathbf{r}, t_r)\, d\tau$$

with respect to the center. Show that $Q_{\text{eff}} \approx Q(1 - \frac{3v}{4c})$, if $v \ll c$.

Problema 10.31 del Griffiths

Problem 10.31. A uniformly charged rod (length L, charge density λ) slides out the x-axis at constant speed v. At time $t = 0$ the back end passes the origin (so its position as a function of time is $x = vt$, while the front end is at $x = vt + L$). Find the retarded scalar potential at the origin, as a function of time, for $t > 0$. [First determine the retarded time t_1 for the back end, the retarded time t_2 for the front end, and the corresponding retarded positions x_1 and x_2.] Is your answer consistent with the Liénard–Wiechert potential, in the point charge limit ($L \ll vt$, with $\lambda L = q$)? Do not assume $v \ll c$.

Problema 11.3 del Griffiths

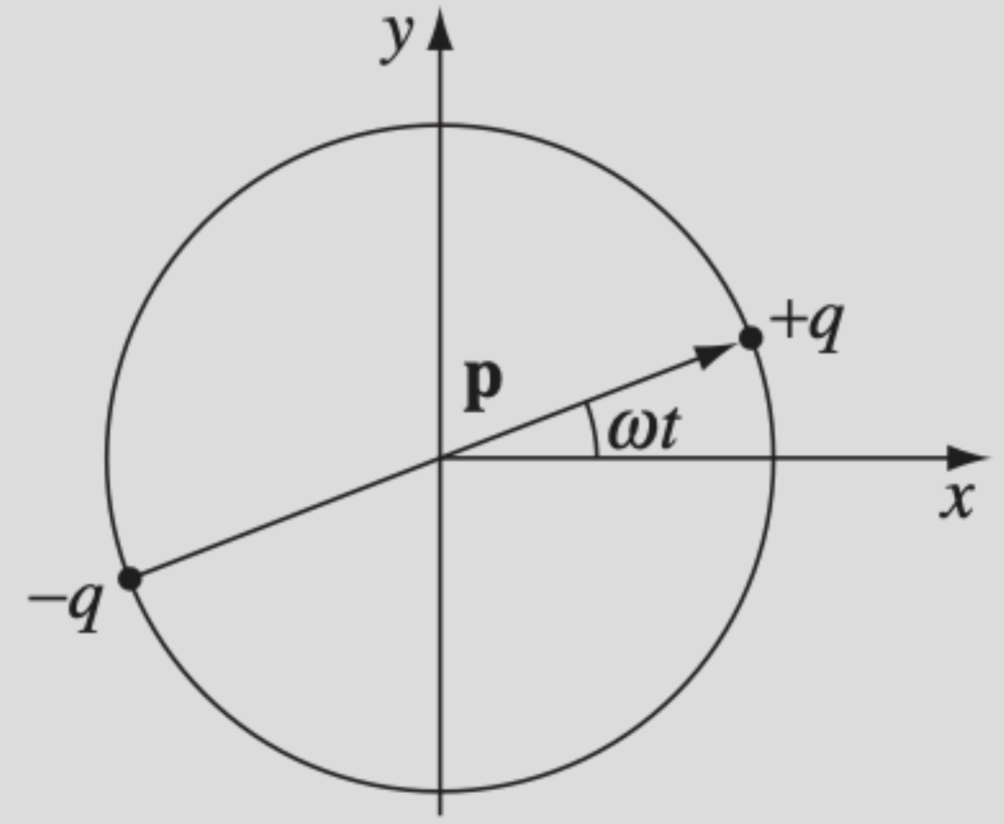
Problem 11.3. Find the **radiation resistance** of the wire joining the two ends of the dipole. (This is the resistance that would give the same average power loss – to heat – as the oscillating dipole in *fact* puts out in the form of radiation.) Show that $R = 790\,(d/\lambda)^2\,\Omega$, where λ is the wavelength of the radiation. For the wires in an ordinary radio (say, $d = 5\,\mathrm{cm}$), should you worry about the radiative contribution to the total resistance?

Problema 11.4 del Griffiths

Problem 11.4. A *rotating* electric dipole can be thought of as the superposition of two *oscillating* dipoles, one along the x-axis and the other along the y-axis (Fig. 11.7), with the latter out of phase by $90°$:

$$\mathbf{p} = p_0[\cos(\omega t)\hat{\mathbf{x}} + \sin(\omega t)\hat{\mathbf{y}}].$$

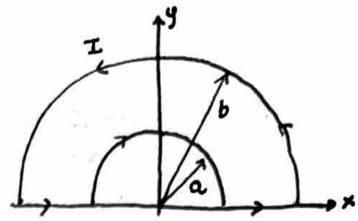
Using the principle of superposition and Eqs. 11.18 and 11.19 (perhaps in the form suggested by Prob. 11.2), find the fields of a rotating dipole. Also find the Poynting vector and the intensity of the radiation. Sketch the intensity profile as a function of the polar angle θ, and calculate the total power radiated. Does the answer seem reasonable? (Note that power, being *quadratic* in the fields, does *not* satisfy the superposition principle. In this instance, however, it *seems* to. How do you account for this? You might want to refer to the "caution" at the end of Section 8.2.4.)



ESERCITAZIONE 6.

PROBLEMA 10.12 DEL GRIFFITHS

SI CONSIDERI UN PEZZO DI FILO PIEGATO A LOOP
LA CORRENTE NEL FILO CAMBIA LINEARMENTE NEL TEMPO
$I(t) = Kt \qquad (-\infty < t < +\infty)$



IL POTENZIALE VETTORE RITARDATO É
$\bar{A}(\bar{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I(t_r)}{r}\,d\bar{l}$ DOVE $t_r = t - \frac{r}{c}$ É IL TEMPO RITARDATO

r É LA DISTANZA TRA L'ELEMENTO DI FILO $d\bar{l}$ E IL PUNTO DI OSSERVAZIONE

NEL NOSTRO CASO IL PUNTO DI OSSERVAZIONE É IL CENTRO DEL LOOP, QUINDI r DIPENDE SOLO DAL TRATTO DI FILO CONSIDERATO
→ · SUI DUE ARCHI DI RAGGIO a E b VALE $r = a$ E $r = b$
· SUI TRATTI RETTILINEI VALE $r = x$, CON $x \in [a,b]$

POICHÉ LA CORRENTE É $I(t) = Kt$, AL TEMPO RITARDATO ESSA VALE $I(t_r) = K\left(t - \frac{r}{c}\right)$

QUINDI $\bar{A}(0,t) = \frac{\mu_0 K}{4\pi}\int \frac{(t - r/c)}{r}\,d\bar{l} = \frac{\mu_0 K}{4\pi}\left[t\int\frac{d\bar{l}}{r} - \frac{1}{c}\underbrace{\oint d\bar{l}}_{=0}\right]$ L'INTEGRALE DI LINEA DEL VETTORE $d\bar{l}$ LUNGO UN PERCORSO CHIUSO É NULLO, PERCHÉ IL PUNTO FINALE COINCIDE CON QUELLO INIZIALE

$$\overset{!}{=} \frac{\mu_0 K}{4\pi}\,t\int\frac{d\bar{l}}{r}$$

ORA CALCOLIAMO SEPARATAMENTE IL CONTRIBUTO DEI DIVERSI PEZZI DEL CIRCUITO

· ARCO INTERNO: SU QUESTO ARCO $r = a$, QUINDI $\int\frac{d\bar{l}}{r} = \frac{1}{a}\int d\bar{l}$

→ L'INTEGRALE DI $d\bar{l}$ LUNGO UN ARCO VA DAL TRATTO INIZIALE A QUELLO FINALE DELL'ARCO → IN QUESTO CASO SI VA DA $x = -a$ A $x = +a$

⇒ $\int d\bar{l} = 2a\hat{x}$
⇒ $\int\frac{d\bar{l}}{r} = \frac{1}{a}2a\hat{x} = 2\hat{x}$

· ARCO ESTERNO: ANALOGAMENTE, $\int\frac{d\bar{l}}{r} = \frac{1}{b}\int d\bar{l}$

→ IN QUESTO CASO IL VERSO DELLA CORRENTE É OPPOSTO E SI VA DA $x = b$ A $x = -b$
⇒ $\int d\bar{l} = -2b\hat{x}$
⇒ $\int\frac{d\bar{l}}{r} = \frac{1}{b}(-2b\hat{x}) = -2\hat{x}$

· TRATTI RETTILINEI: I DUE SEGMENTI RETTILINEI SONO ENTRAMBI DIRETTI VERSO $+\hat{x}$.
PER CIASCUN ELEMENTO, $d\bar{l} = dx\,\hat{x}$
I TRATTI SONO DUE ⇒ $2\int_a^b\frac{d\bar{l}}{r} = 2\int_a^b\frac{dx}{x}\hat{x} = 2\ln\left(\frac{b}{a}\right)\hat{x}$

SOMMANDO I TRE CONTRIBUTI, $\int \frac{d\bar{l}}{r} = \left(2 - 2 + 2\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)\hat{x}$

$$= 2\ln\left(\frac{b}{a}\right)\hat{x}$$

DA CUI $\bar{A}(0,t) = \frac{\mu_0 K t}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)\hat{x}$

ORA, IN GENERALE $\bar{E} = -\bar{\nabla}V - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$

IL FILO É GLOBALMENTE NEUTRO $\Rightarrow$ $\bar{E}(0,t) = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$

$$= -\frac{\mu_0 K}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\hat{x}$$

IL CAMPO ELETTRICO É COSTANTE NEL TEMPO E DIRETTO LUNGO $-\hat{x}$

IL CAMPO ELETTRICO NON É DOVUTO A CARICHE NETTE SUL FILO, MA É UN CAMPO ELETTRICO INDOTTO DALLA VARIAZIONE TEMPORALE DEL CAMPO MAGNETICO PRODOTTO DALLA CORRENTE VARIABILE

NON POSSIAMO CALCOLARE $\bar{B}$ DA $\bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A}$, PERCHÉ CONOSCIAMO $\bar{A}$ SOLO IN UN PUNTO (IL CENTRO)

PROBLEMA 10.27 DEL GRIFFITHS

UNA SFERA IN ESPANSIONE DI RAGGIO $R(t) = vt$ PORTA UNA CARICA TOTALE Q, UNIFORMEMENTE DISTRIBUITA NEL SUO VOLUME

LA DENSITÁ DI CARICA AL TEMPO t É

$$\rho(\bar{r},t) \begin{cases} \frac{Q}{4\pi R^3(t)/3} & r < R(t) \\ 0 & r > R(t) \end{cases}$$

DOBBIAMO VALUTARE LA DENSITÁ CALCOLATA IN $t_r = t - \frac{\mathscr{r}}{c}$

POICHÉ IL PUNTO DI OSSERVAZIONE É IL CENTRO DELLA SFERA, $\mathscr{r} = r$
DA CUI $t_r = t - \frac{r}{c}$

$$\Rightarrow \rho(\bar{r},t_r) = \frac{3Q}{4\pi(vt_r)^3} = \frac{3Q}{4\pi v^3\left(t - \frac{r}{c}\right)^3}$$

$$= \frac{3Qc^3}{4\pi v^3(ct-r)^3} \qquad \text{SE} \quad r < v\left(t - \frac{r}{c}\right) \Rightarrow r < \frac{vt}{(1+v/c)}$$

DEF. $a = \frac{vt}{(1+v/c)}$ MASSIMA DISTANZA RADIALE CHE CONTRIBUISCE ALL'INTEGRALE RITARDATO

ORA CALCOLIAMO $Q_{eff} = \int \rho(\bar{r}, t_r)\, d\tau$

PER SIMMETRIA SFERICA, IL VOLUME ELEMENTARE $d\tau = 4\pi r^2 dr$

DA CUI $Q_{eff} = \frac{3Qc^3}{4\pi v^3} 4\pi \int_0^a \frac{r^2}{(ct-r)^3} dr$

$$= -\frac{3Q}{(v/c)^3}\left[\ln(ct-r) + \frac{2ct}{(ct-r)} - \frac{(ct)^2}{2(ct-r)^2}\right]\Big|_0^a$$

$$= +\frac{3Q}{(v/c)^3}\left[\frac{3}{2} + \ln\left(\frac{ct}{ct-a}\right) - 2\left(\frac{ct}{ct-a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{ct}{ct-a}\right)^2\right]$$

ORA, $ct-a = ct - \frac{vt}{1+v/c} = \frac{ct}{1+v/c}\left(1+\frac{v}{c}-\frac{v}{c}\right) = \frac{ct}{1+v/c}$

DA CUI $\frac{ct}{ct-a} = 1+\frac{v}{c}$

E QUINDI $Q_{eff} = \frac{3Q}{(v/c)^3}\left[\frac{3}{2} + \ln\left(1+\frac{v}{c}\right) - 2\left(1+\frac{v}{c}\right) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{v}{c}\right)^2\right]$

$$= \frac{3Q}{(v/c)^3}\left[\frac{3}{2} + \ln\left(1+\frac{v}{c}\right) - 2 - 2\frac{v}{c} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{v}{c}\right]$$

$$= \frac{3Q}{(v/c)^3}\left[\ln\left(1+\frac{v}{c}\right) - \frac{v}{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]$$

NEL LIMITE $\frac{v}{c} \ll 1$, $\ln(1+\varepsilon) \approx \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} + \dots$

$$\Rightarrow \ln\left(1+\frac{v}{c}\right) \approx \frac{v}{c} - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^3 + \dots$$

DA CUI $Q_{eff} = \frac{3Q}{(v/c)^3}\left[\left(\frac{v}{c} - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^3 + \dots\right) - \frac{v}{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]$

$$= \frac{3Q}{(v/c)^3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + \dots\right]$$

$$= 3Q\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\left(\frac{v}{c}\right)\right) = Q\left(1 - \frac{3v}{4c}\right)$$

SI VEDE QUINDI $Q_{eff} < Q$

PROBLEMA 10.31 DEL GRIFFITHS

UNA SBARRA UNIFORMEMENTE CARICA (L, λ) SI MUOVE LUNGO L'ASSE x CON VELOCITÀ COSTANTE v

IN $t=0$ L'ESTREMO POSTERIORE PASSA PER L'ORIGINE, QUINDI $x_{back}(t=0) = vt = 0$
$x_{front}(t=0) = vt + L = L$

SI VUOLE CALCOLARE IL POTENZIALE SCALARE RITARDATO NELL'ORIGINE

$$V(0,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda}{r}\,dx$$

PER UN PUNTO A DISTANZA x DALL'ORIGINE, $t_r = t - \frac{x}{c}$

LA POSIZIONE DELL'ESTREMO POSTERIORE AL TEMPO t_1 É $x_1 = vt_1$

LA CONDIZIONE DI RITARDO É $c(t-t_1) = x_1 = vt_1$

$$\Rightarrow \quad ct - ct_1 = vt_1$$
$$ct = ct_1 + vt_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{t}{1+v/c} \quad \text{E} \quad x_1 = \frac{vt_0}{1+v/c}$$

LA POSIZIONE DELL'ESTREMO ANTERIORE AL t_2 É $x_2 = vt_2 + L$

LA CONDIZIONE DI RITARDO É $c(t-t_2) = x_2 = vt_2 + L$

$$\Rightarrow \quad ct - ct_2 = vt_2 + L$$
$$ct - L = t_2(c+v) \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{t-L/c}{1+v/c} \quad \text{E} \quad x_2 = \frac{v(t-L/c)}{1+v/c} + L = \frac{vt+L}{1+v/c}$$

IL POTENZIALE SCALARE ALL'ORIGINE É $V(0,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\lambda}{x}\,dx$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{vt+L}{vt}\right)$$
$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(1+\frac{L}{vt}\right)$$

NEL LIMITE DI CARICA PUNTIFORME, $L \ll vt \quad \Rightarrow \quad \ln(1+\varepsilon) \approx \varepsilon$

$$\ln(1+L/vt) \approx \frac{L}{vt}$$

DA CUI $V(0,t) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{L}{vt} \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{vt}$

IL POTENZIALE DI LIENARD-WIECHERT $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(\mathscr{r} - \vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{v}/c)}$

NEL NOSTRO CASO IL PUNTO DI OSSERVAZIONE É L'ORIGINE, QUINDI $\vec{\mathscr{r}} = -x\hat{x}$
$\vec{v} = v\hat{x}$

QUINDI $\mathscr{r} - \frac{\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{v}}{c} = x - \frac{xv}{c} = x\left(1+\frac{v}{c}\right)$

MA BISOGNA VALUTARE QUESTA QUANTITÁ AL TEMPO RITARDATO

$$\mathscr{r} - \frac{\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{v}}{c} = vt_r\left(1+\frac{v}{c}\right), \quad t_r = t - \frac{x}{c} = \frac{t}{1+v/c}$$

$$= vt\frac{(1+v/c)}{(1+v/c)} = vt \qquad \text{DA CUI} \quad V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{vt}$$

PROBLEMA 11.3 DEL GRIFFITHS

SI VUOLE TROVARE LA RESISTENZA DI RADIAZIONE DEL FILO CHE UNISCE LE DUE ESTREMITÁ DI UN DIPOLO OSCILLANTE

PER UN DIPOLO OSCILLANTE COSTITUITO DA CARICHE $\pm q(t)$ AI CAPI, CON $q(t) = q_0 \cos(wt)$

LA CORRENTE NEL FILO É $I(t) = \frac{dq}{dt}$

IN MODULO, POSSIAMO SCRIVERE L'AMPIEZZA DELLA CORRENTE COME $I_0 = wq_0$
COSÍ CHE $I^2(t) = q_0^2 w^2 \sin^2(wt)$

SE IL FILO AVESSE UNA RESISTENZA R, LA POTENZA DISSIPATA PER EFFETTO JOULE SAREBBE $P(t) = I^2(t) R = q_0^2 w^2 \sin^2(wt) R$

FACENDO LA MEDIA TEMPORALE, $\langle P \rangle = \frac{1}{2} q_0^2 w^2 R$ $\langle \sin^2(wt) \rangle = \frac{1}{2}$ É LA POTENZA MEDIA CHE VERREBBE DISSIPATA DA UNA RESISTENZA R

DALLA FORMULA DELLA POTENZA TOTALE IRRADIATA DA UN DIPOLO OSCILLANTE, SAPPIAMO CHE $\langle P \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 w^4}{12\pi c}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} q_0^2 w^2 R = \frac{\mu_0 p_0^2 w^4}{12\pi c} \quad \Rightarrow R = \frac{\mu_0 d^2 w^2}{6\pi c}$$

ORA USIAMO LA RELAZIONE TRA PULSAZIONE E LUNGHEZZA D'ONDA $w = \frac{2\pi c}{\lambda}$

DA CUI $R = \frac{\mu_0 d^2 4\pi^2 c^2}{6\pi c \lambda^2} = \frac{2\pi}{3} \frac{\mu_0 d^2 c}{\lambda^2}$

USIAMO I VALORI $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
$c = 3 \cdot 10^8$ m/s

DA CUI
$$R = 120\pi \, \frac{2\pi}{3} \frac{d^2}{\lambda^2} \, \Omega = 80\pi^2 \frac{d^2}{\lambda^2} \, \Omega \simeq 790 \frac{d^2}{\lambda^2} \, \Omega$$

PER UN'ANTENNA RADIO ORDINARIA, $d \approx 5$ cm $= 5 \cdot 10^{-2}$ m
INOLTRE, NELLE COMUNI APPLICAZIONI RADIO, $d \ll \lambda$, AD ES. $\lambda = 10^3$ m

DA CUI $R \simeq 790 \left(5 \cdot 10^{-5}\right)^2 \simeq 2 \cdot 10^{-6} \, \Omega$

$\Rightarrow R \ll 1 \, \Omega$ PER I FILI DI UNA RADIO ORDINARIA, LA COMPONENTE RADIATIVA DELLA RESISTENZA É IN GENERE TRASCURABILE RISPETTO ALLA RESISTENZA OHMICA TOTALE DEL CIRCUITO

PROBLEMA 11.4 DEL GRIFFITHS

UN DIPOLO ELETTRICO ROTANTE PUÓ ESSERE PENSATO COME LA SOVRAPPOSIZIONE DI DUE DIPOLI OSCILLANTI :
- UNO LUNGO x CON MOMENTO $\bar{p}_x = p_0 \cos(\omega t)\hat{x}$
- UNO LUNGO y CON MOMENTO $\bar{p}_y = p_0 \sin(\omega t)\hat{y}$

SFASATI DI 90°
E PUÓ ESSERE SCRITTO COME $\bar{p} = p_0 \left[\cos(\omega t)\hat{x} + \sin(\omega t)\hat{y}\right]$

PER UN DIPOLO OSCILLANTE LUNGO L'ASSE z, É STATO TROVATO CHE

$$\bar{E} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\hat{\theta}$$

$$\bar{B} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\hat{\phi}$$

CONVIENE PASSARE DALLE COORDINATE CARTESIANE
→ VALE $\hat{z} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}$
INOLTRE $z = r\cos\theta$

$$\Rightarrow \quad -\sin\theta\,\hat{\theta} = \hat{z} - \cos\theta\,\hat{r} \overset{!}{=} \hat{z} - \frac{z}{r}\hat{r}$$

DA CUI $\bar{E} = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi}\frac{1}{r}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\left(\hat{z} - \frac{z}{r}\hat{r}\right)$

$\cancel{\bar{B} = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c}\frac{1}{r}\cos}$

OSS. IN GENERALE, QUESTA ESPRESSIONE É COVARIANTE RISPETTO ALLA DIREZIONE DEL DIPOLO, CIOÉ $\hat{z} \to \hat{n} \Rightarrow \bar{E} \propto \left(\hat{n} - (\hat{n}\cdot\hat{r})\hat{r}\right)$, $\hat{n}$ DIREZIONE DEL DIPOLO

→ LUNGO x : $\hat{n} = \hat{x}$
$\hat{n}\cdot\hat{r} = \frac{x}{r}$
$\Rightarrow \bar{E} \propto \left(\hat{x} - \frac{x}{r}\hat{r}\right)$

STESSA COSA LUNGO y

QUINDI PER UN DIPOLO OSCILLANTE LUNGO x SI HA $\bar{E} = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\left(\hat{x} - \frac{x}{r}\hat{r}\right)$

MENTRE LUNGO y $\bar{E} = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r}\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\left(\hat{y} - \frac{y}{r}\hat{r}\right)$

PER QUANTO RIGUARDA IL CAMPO MAGNETICO, QUESTO PUÓ ESSERE RISCRITTO COME

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c}\frac{1}{r}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\underbrace{(\hat{r}\times\hat{z})}_{=-\sin\theta\hat{\phi}}$$

$\Rightarrow$ SI HA LUNGO x : $\bar{B} = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c r}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right](\hat{r}\times\hat{x})$

LUNGO y : $\bar{B} = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c r}\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right](\hat{r}\times\hat{y})$

PER SOVRAPPOSIZIONE, $\bar{E} = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \left\{ \cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\left(\hat{x} - \frac{x}{r}\hat{r}\right) + \sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\left(\hat{y} - \frac{y}{r}\hat{r}\right)\right\}$

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c r} \left\{ \cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right](\hat{r}\times\hat{x}) + \sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right](\hat{r}\times\hat{y})\right\}$$

DEF. $\bar{a} = \hat{x} - \frac{x}{r}\hat{r}$ E $\bar{b} = \hat{y} - \frac{y}{r}\hat{r}$

COSÍ CHE $\bar{E} = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r}\left[\bar{a}\cos\psi + \bar{b}\sin\psi\right]$ $\quad \psi = \omega\left(t-\frac{r}{c}\right)$

DA CUI $E^2 = \left(\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r}\right)^2\left[a^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi + 2(\bar{a}\cdot\bar{b})\sin\psi\cos\psi\right]$

CON $a^2 = 1 - \frac{x^2}{r^2}$, $b^2 = 1 - \frac{y^2}{r^2}$, $\bar{a}\cdot\bar{b} = -\frac{xy}{r^2}$

DA CUI $E^2 = \left(\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r}\right)^2\left[\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)\cos^2\psi + \left(1-\frac{y^2}{r^2}\right)\sin^2\psi - \frac{2xy}{r^2}\sin\psi\cos\psi\right]$

$$\stackrel{!}{=} \left(\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r}\right)^2\left[1 - \frac{1}{r^2}(x\cos\psi + y\sin\psi)^2\right]$$

MA $x = r\sin\theta\cos\phi$
$y = r\sin\theta\sin\phi$ $\Rightarrow$ $x\cos\psi + y\sin\psi = r\sin\theta\cos\phi\cos\psi + r\sin\theta\sin\phi\sin\psi$

$$\stackrel{!}{=} r\sin\theta\left[\cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\psi\right]$$

$$\stackrel{!}{=} r\sin\theta\cos(\psi-\phi)$$

DA CUI $E^2 = \left(\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r}\right)^2\left[1 - \sin^2\theta\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)-\phi\right]\right]$

ORA, $\bar{S} = \frac{E^2}{\mu_0 c}\hat{r} = \frac{\mu_0}{c}\left(\frac{p_0\omega^2}{4\pi r}\right)^2\left[1 - \sin^2\theta\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]-\phi\right]\hat{r}$

$$\langle\bar{S}\rangle = \frac{\mu_0}{c}\left(\frac{p_0\omega^2}{4\pi r}\right)^2\left[1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right]\hat{r}$$

LA POTENZA TOTALE IRRADIATA É $\langle P\rangle = \int\langle\bar{S}\rangle\cdot d\bar{a}$

$$\stackrel{!}{=} \frac{\mu_0}{c}\left(\frac{p_0\omega^2}{4\pi}\right)^2\int\frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right)r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{\mu_0}{c}\left(\frac{p_0\omega^2}{4\pi}\right)^2 2\pi\left[\int_0^\pi\sin\theta\, d\theta - \frac{1}{2}\int_0^\pi\sin^3\theta\, d\theta\right]$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{\mu_0 p_0^2\omega^4}{c\,6\pi}$$

DOPPIO DELLA POTENZA IRRADIATA DA UN DIPOLO OSCILLANTE SINGOLO

OSS. PER RICAVARE IL CAMPO ELETTRICO, SI SAREBBE POTUTA ANCHE USARE LA FORMULA
$\bar{E}(\bar{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\hat{r}\times\left[\hat{r}\times\ddot{\bar{p}}(t_r)\right]$

E, DI CONSEGUENZA, $\bar{B}(\bar{r},t) = \frac{1}{c}\hat{r}\times\bar{E}(\bar{r},t)$

NEL NOSTRO CASO $\bar{p}(t) = p_0 [\cos(\omega t)\hat{x} + \sin(\omega t)\hat{y}]$

DA CUI $\ddot{\bar{p}}(t) = -\omega^2 \bar{p}(t)$

$\overset{!}{=} -\omega^2 p_0 [\cos(\omega t)\hat{x} + \sin(\omega t)\hat{y}]$

$\psi = \omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$

$$\ddot{\bar{p}}(t_r) = -\omega^2 p_0 \left[\cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]\hat{x} + \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]\hat{y}\right] \overset{!}{=} -\omega^2 p_0 [\cos\psi\,\hat{x} + \sin\psi\,\hat{y}]$$

DOBBIAMO CALCOLARE $\hat{r} \times (\hat{r} \times \ddot{\bar{p}}(t_r)) = -\omega^2 p_0 [\cos\psi\, \hat{r} \times (\hat{r} \times \hat{x}) + \sin\psi\, \hat{r} \times (\hat{r} \times \hat{y})]$

MA $\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = (\bar{A} \cdot \bar{C})\bar{B} - (\bar{A} \cdot \bar{B})\bar{C}$

DA CUI $\hat{r} \times (\hat{r} \times \hat{x}) = (\hat{r} \cdot \hat{x})\hat{r} - \underbrace{(\hat{r} \cdot \hat{r})}_{=1}\hat{x}$

$\overset{!}{=} (\hat{r} \cdot \hat{x})\hat{r} - \hat{x}$ CON $\hat{r} \cdot \hat{x} = x/r$

E ANALOGAMENTE $\hat{r} \times (\hat{r} \times \hat{y}) = (\hat{r} \cdot \hat{y})\hat{r} - \hat{y}$ $\hat{r} \cdot \hat{y} = y/r$

DA CUI $\bar{E} = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r}\left\{\cos\psi \left[\frac{x}{r}\hat{r} - \hat{x}\right] + \sin\psi \left[\frac{y}{r}\hat{r} - \hat{y}\right]\right\}$

$$= \frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r}\left\{\cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]\left(\hat{x} - \frac{x}{r}\hat{r}\right) + \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]\left(\hat{y} - \frac{y}{r}\hat{r}\right)\right\}$$

CHE È IL RISULTATO TROVATO PRIMA